

1

解答解説のページへ

数列 $\{a_n\}$ を, $a_1 = \tan \frac{\pi}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により定める。次

の問いに答えよ。

- (1) $a_2 = \tan \frac{\pi}{6}$, $a_3 = \tan \frac{\pi}{12}$ であることを示せ。
- (2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し, それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

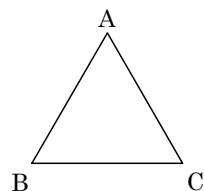
$a > 0$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geq 0$ における最小値を、 a を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。 A^3 を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1 、点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。
 C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。
- (4) 座標平面において、点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

表が出る確率が p , 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0 < p < 1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k ($k=2, 3, \dots, 2N+3$) とする。次の問いに答えよ。

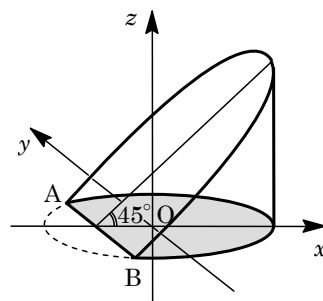
- (1) P_2, P_3 を求めよ。
- (2) P_{2m}, P_{2m+1} ($2 \leq m \leq N+1$) を求めよ。
- (3) $p = \frac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。

4

解答解説のページへ

座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。 C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。 C 上の 2 点 $A(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, $B(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ に対し、線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする。ただし、平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H , 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。

- (1) 立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。
- (2) 立体 V を平面 $x=t$ ($-1 < t < 2$) で切ったとき、断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。
- (3) 立体 V の体積を求めよ。



5

解答解説のページへ

x 座標, y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $O(0, 0)$ および $A(50, 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ を満たす格子点 P を 1 つ求めよ。
- (2) m を自然数とする。 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ を満たす格子点 P のうち、長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。 P_1 および P_2 を求めよ。
- (3) P_m を (2) で定めた格子点とする。自然数 k に対し、ベクトル $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}}$ を成分表示せよ。
- (4) P_m を (2) で定めた格子点とする。 Q を $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ とおくと, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$f(\tan \theta) = \frac{\tan \theta}{\sqrt{\tan^2 \theta + 1} + 1} = \frac{\tan \theta}{\frac{1}{\cos \theta} + 1} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}$$

さて, $a_1 = \tan \frac{\pi}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}+1} = f(a_n)$ に対して, $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ とおくと,

$$a_2 = f(a_1) = f(\tan \theta_1) = \tan \frac{\theta_1}{2} = \tan \frac{\pi}{6}$$

さらに, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ とおくと, $a_3 = f(a_2) = f(\tan \theta_2) = \tan \frac{\theta_2}{2} = \tan \frac{\pi}{12}$

(2) まず, $a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$ と推測できるので, これを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$ のとき $a_1 = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^0} = \tan \frac{\pi}{3}$ より成立している。

(ii) $n=k$ のとき $a_k = \tan \theta_k$ ($\theta_k = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}}$) と仮定すると, $0 < \theta_k < \frac{\pi}{2}$ で,

$$a_{k+1} = f(a_k) = f(\tan \theta_k) = \tan \frac{\theta_k}{2} = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}$$

よって, $n=k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より, $a_n = \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$ である。

(3) まず, $\theta \rightarrow 0$ のとき $\frac{\tan \theta}{\theta} \rightarrow 1$ であることに着目して変形すると,

$$2^n a_n = 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}{\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}$$

よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n a_n = \frac{2\pi}{3}$ である。

[解説]

数列の極限に関する基本的な問題です。ただ, 同じプロセスを 3 回記すのは気後れしましたので, 初めに作った解をリフォームしています。

2

問題のページへ

(1) $a > 0$ のとき、 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ に対して、

$$f'(t) = 3t^2 - 2a$$

$t \geq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると、右表の

ようになり、最小値は、

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right) = \left(\frac{2a}{3} - 2a\right)\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 = -\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}} + 1 = -\frac{4}{9}a\sqrt{6a} + 1$$

t	0	...	$\sqrt{\frac{2a}{3}}$...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	1	↘		↗

(2) 条件より、 $-\frac{4}{9}A\sqrt{6A} + 1 = 0$ となるので、 $\frac{4}{9}A\sqrt{6A} = 1$ から、

$$\frac{16 \cdot 6}{81}A^3 = 1, \quad A^3 = \frac{81}{16 \cdot 6} = \frac{27}{32}$$

(3) $C_1 : y = x^4 \dots\dots ①$, $C_2 : x^2 + (y - a)^2 = a^2 \dots\dots ②$ を連立し、

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2, \quad x^8 - 2ax^4 + x^2 = 0$$

ここで、 $x^2 = t \geq 0$ とおくと、 $t^4 - 2at^2 + t = 0$ から、

$$t(t^3 - 2at + 1) = 0 \dots\dots ③$$

すると、 $t = 0 \dots\dots ④$ または $t^3 - 2at + 1 = 0 \dots\dots ⑤$

さて、(1) から ⑤ は $f(t) = 0$ となり、しかも $t \neq 0$ である。

また、(2) から $A = \sqrt[3]{\frac{27}{32}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので、 C_1 と C_2 の共有点の個数は、

(i) $-\frac{4}{9}a\sqrt{6a} + 1 > 0$ ($0 < a < \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$) のとき

⑤ の実数解は 0 個なので、③ の実数解は④の $t = 0$ のみとなる。よって、 C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii) $-\frac{4}{9}a\sqrt{6a} + 1 = 0$ ($a = \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$) のとき

⑤ の異なる正の実数解は 1 個なので、③ の実数解は④の $t = 0$ と合わせて 2 個となる。よって、 C_1 と C_2 の共有点の個数は $1 + 1 \times 2 = 3$ である。

(iii) $-\frac{4}{9}a\sqrt{6a} + 1 < 0$ ($a > \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$) のとき

⑤ の異なる正の実数解は 2 個なので、③ の実数解は④の $t = 0$ と合わせて 3 個となる。よって、 C_1 と C_2 の共有点の個数は $1 + 2 \times 2 = 5$ である。

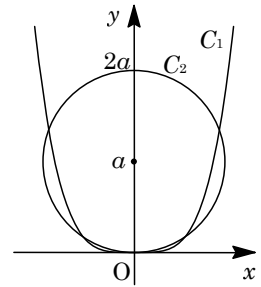
(4) C_1 上の点 $P(p, p^4)$ と点 $(0, a)$ の距離を d とおくと、

$$d^2 = p^2 + (p^4 - a)^2 = p^8 - 2ap^4 + p^2 + a^2$$

ここで、 $p^2 = t \geq 0$ とおくと、 $d^2 = t^4 - 2at^2 + t + a^2 = tf(t) + a^2$

さて、 d^2 の最小値は a^2 なので、 $t \geq 0$ において $tf(t) \geq 0$ すなわち $f(t) \geq 0$ が必要となり、(3) から、 $0 < a \leq \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

逆に、このとき $t = 0$ で $tf(t) = 0$ となるので、 d^2 の最小値は a^2 である。



以上より，求める条件は $0 < a \leq \frac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ である。

[解説]

微分の応用についての問題です。(3)では x を消去するか， y を消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また， t の個数と x の個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

3

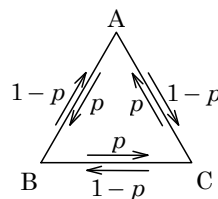
問題のページへ

- (1) まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは, $A \rightarrow B \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow A$ から, その確率 P_2 は,

$$P_2 = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$$

- また, R が 3 回目に A に初めて戻るのは, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ から, その確率 P_3 は,

$$P_3 = p^3 + (1-p)^3 = 1 - 3p + 3p^2$$



- (2) R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ から, その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m} = p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p) + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p = 2p^m(1-p)^m$$

- また, R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは, $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ から, その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned} P_{2m+1} &= p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2 + (1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2 \\ &= p^3\{p(1-p)\}^{m-1} + (1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1} \\ &= (1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1} \end{aligned}$$

- (3) $p = \frac{1}{2}$ のとき, (2)より, $P_{2m} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^m = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1} = \left(1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

- (i) R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 ($m = 1, 2, \dots, N$) のとき

$$\text{その確率は, } P_{2m}P_{2N+3-2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-2m+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

- (ii) R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 ($m = 1, 2, \dots, N$) のとき

$$\text{その確率は, } P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-2m+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}$$

- (i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q = \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} + \sum_{m=1}^N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = 2N \left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1} = \frac{N}{2^{2N}}$$

[解説]

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

4

問題のページへ

(1) 楕円 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ に対して,

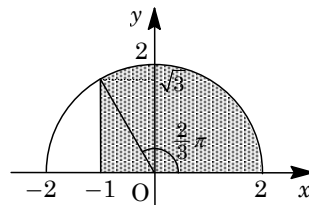
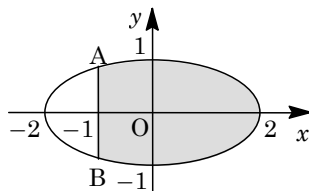
$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \dots\dots\dots (*)$$

さて、 C に囲まれる図形の $x \geq -1$ の部分の面積を U とすると、 x 軸に関する対称性より、

$$U = 2 \int_{-1}^2 \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{-1}^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

そして、 U の値は右図の網点部の面積が対応し、

$$U = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \frac{4}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



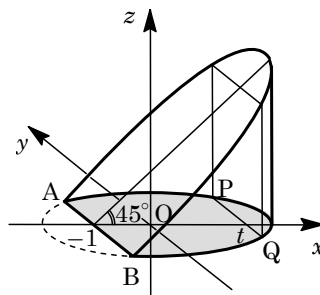
(2) (*) に $x = t$ を代入すると、 $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 - t^2}$ となり、 C

と直線 $x = t$ の交点を P, Q とおくと、

$$PQ = \sqrt{4 - t^2}$$

これより、立体 V を平面 $x = t$ で切ったとき、断面の長方形の面積 $S(t)$ は、

$$S(t) = PQ \cdot \{t - (-1)\} \tan 45^\circ = (t + 1) \sqrt{4 - t^2}$$



(3) 立体 V の体積 W は、(1) の結果も利用して、

$$\begin{aligned} W &= \int_{-1}^2 S(t) dt = \int_{-1}^2 t \sqrt{4 - t^2} dt + \int_{-1}^2 \sqrt{4 - t^2} dt \\ &= \int_{-1}^2 t \sqrt{4 - t^2} dt + \frac{4}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ここで、 $4 - t^2 = u$ とおくと、 $-2t dt = du$ から、

$$\int_{-1}^2 t \sqrt{4 - t^2} dt = \int_3^0 \sqrt{u} \left(-\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{2} \int_0^3 u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_0^3 = \sqrt{3}$$

よって、 $W = \sqrt{3} + \frac{4}{3} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3} \pi + \frac{3}{2} \sqrt{3}$ となる。

[解 説]

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため、見通しはかなりよくなっています。

5

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{OA} = (50, 14)$ に対して、 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ とおくと、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = 6$ より、

$$50x + 14y = 6, \quad 25x + 7y = 3 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

すると、 $\textcircled{1}$ を満たす解の 1 つとして $(x, y) = (-1, 4)$ から、 $P(-1, 4)$ となる。

(2) (1) より、 $25 \cdot (-1) + 7 \cdot 4 = 3 \cdots \cdots \textcircled{2}$ となり、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ から、

$$25(x+1) + 7(y-4) = 0, \quad 25(x+1) = -7(y-4)$$

すると、25 と 7 は互いに素なので l を整数として、 $x+1 = -7l$ 、 $y-4 = 25l$

$$(x, y) = (-7l-1, 25l+4) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 OP が m 番目に小さい点を P_m とすると、 $\textcircled{3}$ から、

$$OP^2 = (-7l-1)^2 + (25l+4)^2 = 674l^2 + 214l + 17$$

$$= 674 \left(l + \frac{107}{674} \right)^2 - \frac{107^2}{674} + 17$$

これより、 $-\frac{1}{2} < -\frac{107}{674} < 0$ から、 OP が一番小さい ($m=1$) のは $l=0$ のときより

$P_1(-1, 4)$ 、次に小さい ($m=2$) のは $l=-1$ のときより $P_2(6, -21)$ である。

(3) (2) と同様に考えて、 $m=1$ のとき $l=0$ 、 $m=2$ のとき $l=-1$ 、 $m=3$ のとき $l=1$ 、 $m=4$ のとき $l=-2$ 、 $m=5$ のとき $l=2$ 、 \cdots より、自然数 k に対して帰納的に、 $m=2k+1$ のとき $l=k$ 、 $m=2k$ のとき $l=-k$ となり、 $\textcircled{3}$ から、

$$\overrightarrow{OP_{2k+1}} = (-7k-1, 25k+4), \quad \overrightarrow{OP_{2k}} = (7k-1, -25k+4)$$

よって、 $\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}} = (-7k-1-(7k-1), 25k+4-(-25k+4)) = (-14k, 50k)$

$$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}} = (7k+6-(7k-1), -25k-21-(-25k+4)) = (7, -25)$$

(4) (3) より、 $\overrightarrow{OP_{14}} = (7 \cdot 7 - 1, -25 \cdot 7 + 4) = (48, -171)$

$$\overrightarrow{OP_{16}} = (7 \cdot 8 - 1, -25 \cdot 8 + 4) = (55, -196)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{P_{14}P_{16}} = (7, -25)$$

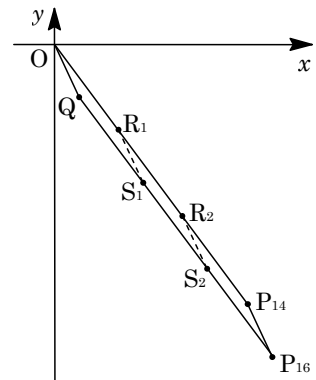
すると、右図のように四角形 $OQP_{16}P_{14}$ は平行四辺形となり、この周および内部に含まれる格子点を調べる。

まず、頂点 O, Q, P_{16}, P_{14} はすべて格子点である。

次に、辺 OQ の方程式は、 $y = -\frac{25}{7}x$ から、両端点以外に格子点はない。また、辺 $P_{14}P_{16}$ も同様である。

また、辺 OP_{14} の方程式は、 $y = -\frac{171}{48}x = -\frac{57}{16}x$ から、両端点以外に格子点 $R_1(16, -57)$ 、 $R_2(32, -114)$ が存在する。また、辺 QP_{16} も同様で、両端点以外に格子点 $S_1(23, -82)$ 、 $S_2(39, -139)$ が存在する。

さらに、四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の内部に格子点 (a, b) が存在すると仮定すると、



$$-\frac{57}{16}(a-7)-25 < b < -\frac{57}{16}a, \quad -\frac{57a+1}{16} < b < -\frac{57}{16}a \cdots \cdots \textcircled{4}$$

④より、 $-57a-1 < 16b < -57a$ 、 $-1 < 57a+16b < 0$ となり、 a 、 b は整数より成立しない。すなわち、四角形 $OQP_{16}P_{14}$ の内部に格子点は存在しない。

以上より、 $OQP_{16}P_{14}$ の周および内部に含まれる格子点の座標は、

$$(0, 0), (7, -25), (23, -82), (39, -139), (55, -196), (48, -171) \\ (16, -57), (32, -114)$$

[解説]

格子点と整数についての問題です。(3)までは標準的ですが、最後の設問の(4)は数値が大きく、さらに図が描きにくいために、かなり面倒です。