1　　解答解説のページへ

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え，A，B 間の距離を L とする。ただし，θ は条件 $(*)\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ かつ $\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$(*)$を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　$t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　L を(2)の t を用いて表せ。

(4)　L の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 O(0, 0)，A(3, 0)，B(1, 2) を考える。C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ を満たす点とする。また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする。点 Q, R, P$'$ を次により定める。

(a)　点 P を通り傾きが 1 の直線と，直線 AB の交点を Q とする。

(b)　点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする。

(c)　点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P$'$ とする。

次の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 R の座標を t を用いて表せ。

(3)　点 P$'$ の座標を t を用いて表せ。

(4)　点 P$'$ の x 座標を $f(t)$ とする。数列 $\{t_n\}$ を $t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする。次の問いに答えよ。

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ。

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ。ただし，$\log_2 3 = 1.585$，$\log_2 5 = 2.322$ とする。

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ。

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ。

4

解答解説のページへ

座標平面上の 2 つの曲線$C_1 : y=4x^3-1$，$C_2 : y=x^3$を考える。$a>0$に対して，x座標がaであるC_1上の点を A とし，A におけるC_1の接線をlとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_1とC_2の交点のx座標をpとする。pの値を求めよ。

(2)　直線lの方程式を，aを用いて表せ。

(3)　直線lがC_2に接するとき，aの値を求めよ。

(3)　(3)のとき，直線lとC_2の接点を B とする。C_1，C_2と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ より $\sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) > 1$ となり，

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\dfrac{\pi}{4} < \theta - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{4}\pi$ から，$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ である。

(2)　$t = \sin\theta\cos\theta$ より $t = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta$ となり，$\pi < 2\theta < 2\pi$ から $-\dfrac{1}{2} \leqq t < 0$ である。

(3)　2 点 $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ に対して，$L = \mathrm{AB}$ より，

$$L^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2$$
$$= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} = (1 - 2t)(2 + 2t) = -4t^2 - 2t + 2$$

よって，$L = \sqrt{-4t^2 - 2t + 2}$ である。

(4)　(2)から $-\dfrac{1}{2} \leqq t < 0$ において，(3)から $L^2 = -4\left(t + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$ となる。

これより，$t = -\dfrac{1}{4}$ $\left(\sin 2\theta = -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，L^2 は最大値 $\dfrac{9}{4}$ をとる。すなわち，$\theta = \dfrac{7}{12}\pi,\ \dfrac{11}{12}\pi$ のとき，L は最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ をとる。

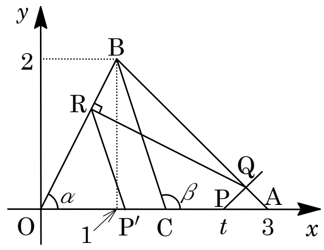
また，$t = -\dfrac{1}{2}$ $(\sin 2\theta = -1)$ のとき，L^2 は最小値 2 をとる。すなわち，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき，L は最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

［解 説］

三角関数と 2 次関数を題材にした最大・最小問題です。たいへん細かな誘導がついています。

2

問題のページへ



(1)　P$(t,\ 0)$を通り傾き 1 の直線の方程式は,

$y=x-t$ ………①

A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 2)$に対し，直線 AB の方程式は,

$y=-(x-3)$ ………②

①②を連立して，$x-t=-(x-3)$となり，$x=\dfrac{t+3}{2}$，

$y=\dfrac{t+3}{2}-t=\dfrac{-t+3}{2}$から，Q$\left(\dfrac{t+3}{2},\ \dfrac{-t+3}{2}\right)$となる。

(2)　直線 OB の方程式は，$y=2x$ ………③

Q を通り OB に垂直な直線の方程式は，$y-\dfrac{-t+3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{t+3}{2}\right)$ ………④

③④を連立して，$2x-\dfrac{-t+3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{t+3}{2}\right)$となり，$x=\dfrac{-t+9}{10}$

$y=2\cdot\dfrac{-t+9}{10}=\dfrac{-t+9}{5}$

よって，R$\left(\dfrac{-t+9}{10},\ \dfrac{-t+9}{5}\right)$となる。

(3)　$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$のとき，$\angle\mathrm{BOC}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCA}=\beta$とおくと，$\tan\alpha=2$より，

$\tan\beta=\tan(\alpha+45^\circ)=\dfrac{2+1}{1-2\cdot1}=-3$

これより，直線 BC の傾きは-3となり，点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線の方程式は,

$y-\dfrac{-t+9}{5}=-3\left(x-\dfrac{-t+9}{10}\right)$

直線 OA すなわち x 軸との交点は，$-\dfrac{-t+9}{5}=-3\left(x-\dfrac{-t+9}{10}\right)$より，$x=\dfrac{-t+9}{6}$

となり，P′$\left(\dfrac{-t+9}{6},\ 0\right)$である。

(4)　$f(t)=\dfrac{-t+9}{6}$より，数列$\{t_n\}$は，$t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)=\dfrac{-t_n+9}{6}$で定められ,

$t_{n+1}-\dfrac{9}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(t_n-\dfrac{9}{7}\right)$

すると，$t_n-\dfrac{9}{7}=\left(t_1-\dfrac{9}{7}\right)\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{5}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$となり,

$t_n=\dfrac{5}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}+\dfrac{9}{7}$

［解 説］

直線の方程式についての基本的な問題です。(4)で漸化式という付録がついていますが。

3

問題のページへ

(1) n 個のさいころの出た目の積を X とし，X が 5 の倍数である事象を A とおくと，$\overline{A}$ は n 個とも 5 以外の目が出ることから，その確率は $P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ となり，

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2) 条件より，$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0.99$ となり，$\left(\frac{5}{6}\right)^n<0.01=10^{-2}\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$n\log_2\frac{5}{6}<-2\log_2 10$ となり，$\log_2 3=1.585$，$\log_2 5=2.322$ から，

$$\log_2\frac{5}{6}=\log_2 5-\log_2 6=\log_2 5-1-\log_2 3=-0.263$$

$$-2\log_2 10=-2(1+\log_2 5)=-6.644$$

よって，$(*)$を満たす最小の n は，$n>\frac{-6.644}{-0.263}>25.2$ から 26 である。

(3) X が 3 の倍数である事象を B とおくと，X が 3 でも 5 でも割り切れない事象は $\overline{A}\cap\overline{B}$ と表せ，これは n 個とも 1, 2, 4 のいずれかの目が出ることより，その確率は，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4) まず，$\overline{B}$ は n 個とも 3, 6 以外の目が出ることから，その確率は，

$$P(\overline{B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

すると，X が 15 の倍数である事象は $A\cap B$ と表せ，その確率は，

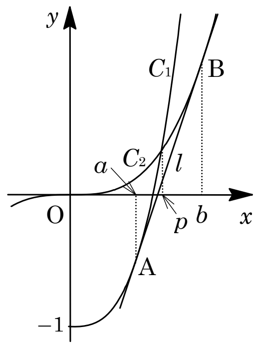
$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$

[解 説]

余事象の考え方が効果的な確率の頻出題です。誘導がまったくなく，いきなり(4)の設問でも，よく見かけるものです。

4

問題のページへ



(1)　$C_1: y=4x^3-1\cdots\cdots$①，$C_2: y=x^3\cdots\cdots$②を連立し，

$$4x^3-1=x^3,\ 3x^3=1,\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

よって，C_1 と C_2 の交点の x 座標 p は $p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ である。

(2)　$a>0$ のとき，$\mathrm{A}(a,\ 4a^3-1)$ における C_1 の接線 l の方程式は，①より $y'=12x^2$ から，

$$y-(4a^3-1)=12a^2(x-a)$$

$$y=12a^2x-8a^3-1\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　$\mathrm{B}(b,\ b^3)$ における C_2 の接線の方程式は，②より $y'=3x^2$ から，

$$y-b^3=3b^2(x-b),\ y=3b^2x-2b^3\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，l が C_2 に接することより，①と②が一致し，

$$12a^2=3b^2\cdots\cdots\cdots③,\ -8a^3-1=-2b^3\cdots\cdots\cdots④$$

③より，$b^2=4a^2$ となり $b=\pm 2a$ である。

$a>0$ で，④より $8a^3+1=2b^3$ から $b>0$ となり，$b=-2a$ は不適である。よって，$b=2a$ を④に代入することにより，

$$8a^3+1=16a^3,\ 8a^3=1$$

以上より，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$ である。

(4)　(3)より，$l: y=3x-2$ となり，C_1，C_2 と線分 AB で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{p}(4x^3-1-3x+2)\,dx+\int_{p}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\Big[\,x^4-\frac{3}{2}x^2+x\,\Big]_{\frac{1}{2}}^{p}+\Big[\,\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\,\Big]_{p}^{1}$$

$$=p^4-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\Big(p^2-\frac{1}{4}\Big)+p-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-p^4)-\frac{3}{2}(1-p^2)+2(1-p)$$

$$=\frac{3}{4}p^4-p+\frac{9}{16}=\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-1\Big)\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{9}{16}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{9}{16}=-\frac{\sqrt[3]{9}}{4}+\frac{9}{16}$$

［解　説］

標準的な内容の微積分の総合問題です。計算も難というほどではありません。