$\boxed{1}$

解答解説のページへ

2 つの実数 $a,\ b$ は $0<b<a$ を満たすとする。関数 $f(x)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})$ の最大値を $M(a,\ b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す。ここで，e は自然対数の底である。

(1)　$X(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)$ を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}M(a,\ b)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるような実数 k は存在しないことを示せ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3)　実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となるようにとる。同様に直線 OB 上の点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる。点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1 とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とする。l_1 と l_2 の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ。

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点 P を動かすことを繰り返すゲームを考える。最初の P の位置を $a_0=0$ とし，さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n を次のルールで定める。

・$a_{n-1}=7$ のとき，$a_n=7$

・$a_{n-1}\neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}+m & (a_{n-1}+m=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\text{ のとき}) \\ 1 & (a_{n-1}+m=2,\ 12\text{ のとき}) \\ 14-(a_{n-1}+m) & (a_{n-1}+m=8,\ 9,\ 10,\ 11\text{ のとき}) \end{cases}$$

(1)　$a_2=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$n\geqq 1$ について，$a_n=7$ となる確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ について，$a_n=1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

関数 $f(x)=\left|\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3)　$S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく。このとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z=a+bi$ の形で表されるとき, a を z の実部, b を z の虚部とよび, それぞれ $a=\mathrm{Re}(z)$, $b=\mathrm{Im}(z)$ と表す。

(1) $z^3=i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2) $z^{100}=i$ を満たす複素数 z のうち, $\mathrm{Re}(z)\leqq\dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z)\geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ。

(3) n を正の整数とする。$z^n=i$ を満たす複素数 z のうち, $\mathrm{Re}(z)\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする。$N>\dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

1

解答解説のページへ

(1)　$0<b<a$ のとき，$f(x)=\dfrac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})=\dfrac{1}{b}e^{-ax}(e^{bx}-1)$ に対して，

$$f'(x)=-\frac{a}{b}e^{-ax}(e^{bx}-1)+\frac{1}{b}e^{-ax}\cdot be^{bx}=-\frac{1}{b}e^{-ax}\{(a-b)e^{bx}-a\}$$

$f'(x)=0$ の解は，$e^{bx}=\dfrac{a}{a-b}$ より $x=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$ であり，ここで $\alpha=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$ とおき，$f(x)$ の増減を調べると右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$f(x)$ は $x=\alpha$ のとき最大値をとるので，$X(a,\ b)=\alpha=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$

(2)　$\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=-\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a-b}{a}=-\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\Big(1-\frac{b}{a}\Big)$

ここで，$t=-\dfrac{b}{a}$ とおくと，$b\to+0$ のとき $t\to-0$ となり，

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=-\lim_{t\to-0}\frac{1}{-at}\log(1+t)=\frac{1}{a}\lim_{t\to-0}\frac{\log(1+t)}{t}$$

さて，$g(t)=\log(1+t)$ とすると，$g'(t)=\dfrac{1}{1+t}$ から $g'(0)=1$ となり，

$$\lim_{t\to0}\frac{g(t)-g(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$$

したがって，$\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\frac{1}{a}\cdot1=\frac{1}{a}$ である。

(3)　$M(a,\ b)=f(\alpha)=\dfrac{1}{b}e^{-a\alpha}(e^{b\alpha}-1)=\alpha e^{-a\alpha}\cdot\dfrac{e^{b\alpha}-1}{b\alpha}$ となり，(2)から，$b\to+0$ のとき $\alpha\to\dfrac{1}{a}$，$a\alpha\to1$，$b\alpha\to+0$ なので，

$$\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=\frac{1}{a}\cdot e^{-1}\cdot1=\frac{1}{ea}$$

［解 説］

関数の極限の問題です。(2)は，少し試行錯誤して，微分係数の定義式を利用するように変形をしました。(3)も同様です。

2

解答解説のページへ

(1)　$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=5$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ のとき，$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ と仮定すると，

$$k^2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=2,\ k\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=3$$

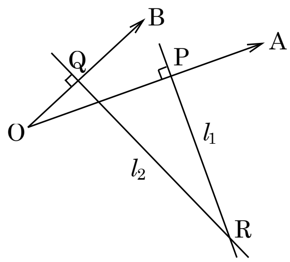
すると，$5k^2=2$ かつ $5k=3$ となり，両式を満たす実数 k は存在しない。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点 H に対して，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}$ とおくと $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-s\overrightarrow{OA}$ となり，$\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ から，

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}-s\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ 3-5s=0$$

すると，$s=\dfrac{3}{5}$ から，$\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}$ である。

(3)　$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OB}$ のとき，点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とし，l_1 と l_2 の交点を R とする。



ここで，$\overrightarrow{OR}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$ とおくと，

$$\overrightarrow{PR}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-t\overrightarrow{OA}=(p-t)\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QR}&=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}-(1-t)\overrightarrow{OB}\\&=p\overrightarrow{OA}+(q+t-1)\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

すると，$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ から $5(p-t)+3q=0$ となり，$5p+3q=5t$ ………①

また，$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ から $3p+2(q+t-1)=0$ となり，$3p+2q=-2t+2$ ………②

①②より，$p=16t-6$，$q=-25t+10$ となり，

$$\overrightarrow{OR}=(16t-6)\overrightarrow{OA}-(25t-10)\overrightarrow{OB}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心 C は，線分 OA と線分 OB の垂直二等分線の交点なので，③に $t=\dfrac{1}{2}$ を代入すると $R=C$ となり，

$$\overrightarrow{OC}=\left(16\cdot\frac{1}{2}-6\right)\overrightarrow{OA}-\left(25\cdot\frac{1}{2}-10\right)\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OA}-\frac{5}{2}\overrightarrow{OB}$$

［解　説］

平面ベクトルの基本題です。(4)は(3)の結果がストレートに利用できます。なお，(3)は(2)の結果を利用してもよかったのですが……。

3

解答解説のページへ

(1)　さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n について，$n \geqq 1$ のとき，$1 \leqq a_n \leqq 7$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_0=0$ から, 1 回目に出た目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 のとき，a_1 はそれぞれ 1, 1, 3, 4, 5, 6 となり，$1 \leqq a_1 \leqq 7$ である。

(ii)　$n=k$ のとき

$1 \leqq a_k \leqq 7$ と仮定すると，$k+1$ 回目に出た目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 のとき，a_{k+1} は右表のようになる。

目 ＼ a_k	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	4	5	6	7	7
2	3	4	5	6	7	6	7
3	4	5	6	7	6	5	7
4	5	6	7	6	5	4	7
5	6	7	6	5	4	3	7
6	7	6	5	4	3	1	7

これより，$1 \leqq a_{k+1} \leqq 7$ となる。

(i)(ii)より，$1 \leqq a_n \leqq 7$ である。

さて，$a_2=1$ となるのは，右表より，$a_1=1$ または $a_1=6$ である。

(a)　$a_0=0 \to a_1=1 \to a_2=1$ のとき

1 回目に出た目が 1 または 2 で, 2 回目に出た目が 1 の場合より, その確率は,

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$$

(b)　$a_0=0 \to a_1=6 \to a_2=1$ のとき

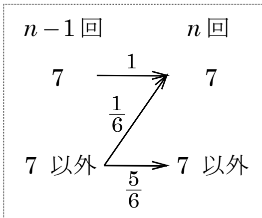
1 回目に出た目が 6 で, 2 回目に出た目が 6 の場合より, その確率は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

(a)(b)より，$a_2=1$ となる確率は，$\dfrac{2}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{12}$ である。

(2)　$a_n=7\ (n \geqq 1)$ となる確率を p_n とおくと，$p_1=0$ で,

$$p_n=p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{5}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}\quad(n \geqq 2)$$



これより，$p_n-1=\dfrac{5}{6}(p_{n-1}-1)$ となり,

$$p_n-1=(p_1-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ となり，この式は $n=1$ のときも満たしている。

(3)　$n \geqq 1$ のとき，$a_n=1$ となる確率を q_n とおくと，(1)から，$q_1=\dfrac{1}{3}$，$q_2=\dfrac{1}{12}$

また，$a_n=6$ となる確率を r_n とおく。すると，$2 \leqq a_n \leqq 5$ となる確率は，(2)から $1-p_n-q_n-r_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}-q_n-r_n$ となる。

ここで，(1)の表を参照すると，$n \geqq 2$ で，$q_n=\dfrac{1}{6}q_{n-1}+\dfrac{1}{6}r_{n-1}$ ………①

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{1}{6}r_{n-1} + \frac{2}{6}(1 - p_{n-1} - q_{n-1} - r_{n-1}) \\ &= \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{1}{6}r_{n-1} + \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} - q_{n-1} - r_{n-1}\right\} \\ &= -\frac{1}{6}q_{n-1} - \frac{1}{6}r_{n-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \cdots\cdots\cdots ② \end{aligned}$$

すると，①＋②より $q_n + r_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ となり，①に代入すると，$n \geqq 3$ で，

$$q_n = \frac{1}{6}(q_{n-1} + r_{n-1}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} = \frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

［解　説］

確率と漸化式の難しめの問題です。問題文からイメージが湧かないので，最初に具体的に表を作ってみました。そして，その表を見ながら立式をしています。なお，表中の a_k が 2 の列は形式的に計算しただけなので，削除しても構いません。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

(1)　$f(x)=\left|\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|$に対し，$g(x)=\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$とすると，

$$g(x)=\sqrt{6}\Big(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\Big)-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

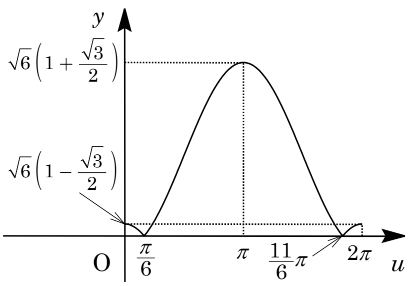
ここで，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$とおくと，$g(x)=\sqrt{6}\cos(x+\alpha)-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$-1\leqq\cos(x+\alpha)\leqq 1$より，$f(x)=\left|g(x)\right|$は$\cos(x+\alpha)=-1$のとき最大となり，最大値は$\left|-\sqrt{6}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{6}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$である。

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{6}\cos(x+\alpha)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|dx$に対し，$u=x+\alpha$とおくと，

$$I=\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\left|\sqrt{6}\cos u-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|du=\sqrt{6}\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$$

ここで，$h(u)=\sqrt{6}\left|\cos u-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$とおくと，$h(u+2\pi)=h(u)$から，$h(u)$は周期$2\pi$の周期関数である。



さらに，$h(2\pi-u)=h(u)$から，$y=h(u)$のグラフは直線$u=\dfrac{(2\pi-u)+u}{2}=\pi$について対称になることより，

$$I=\sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du=2\sqrt{6}\int_0^{\pi}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$$

$$=2\sqrt{6}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\Big(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)du-2\sqrt{6}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\Big(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)du$$

$$=2\sqrt{6}\Big[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}-2\sqrt{6}\Big[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}$$

$$=2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}-3\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{6}-2\sqrt{6}\cdot\Big(-\frac{1}{2}\Big)+3\sqrt{2}\cdot\frac{5}{6}\pi=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\pi$$

(3)　$S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx=\sqrt{6}\int_{t+\alpha}^{t+\alpha+\frac{\pi}{3}}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$

ここで，$h(u)$が周期2πの周期関数であることより，$0\leqq u<2\pi$で考えると，

$S(t)$が最大になるのは，$\dfrac{(t+\alpha)+\left(t+\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}{2}=\pi$のときである。

これより，$t+\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$となるので，$S(t)$の最大値Mは，

$$M=S\Big(\frac{5}{6}\pi-\alpha\Big)=\sqrt{6}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du=-\sqrt{6}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\Big(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)du$$

$y=h(u)$ のグラフは直線 $u=\pi$ について対称なので，

$$M=-2\sqrt{6}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du=-2\sqrt{6}\Big[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\Big]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$

$$=-2\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

［解 説］

定積分の計算問題です。周期性や対称性に着目することがポイントです。(3)の解答例は，グラフの形状をもとにした直感的な記述になっています。t の値で場合分けをした方がよかったのでしょうが。

5

解答解説のページへ

(1)　$z^3=i$ を満たす複素数 z を，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

すると，$r^3=1$ から $r=1$ となり，$0\leqq3\theta<6\pi$ から $3\theta=\frac{\pi}{2},\ 2\pi+\frac{\pi}{2},\ 4\pi+\frac{\pi}{2}$ であるので，$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ となる。

よって，$z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，$z=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi$，$z=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$ から，

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z=-i$$

(2)　(1)と同様に，$z^{100}=i$ を満たす複素数 z について，$r^{100}=1$ から $r=1$ となり，$0\leqq100\theta<200\pi$ から $100\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99)$ であるので，

$$100\theta=\frac{4k+1}{2}\pi,\ \theta=\frac{4k+1}{200}\pi\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99)$$

すると，$z=\cos\frac{4k+1}{200}\pi+i\sin\frac{4k+1}{200}\pi$ となり，$\mathrm{Re}(z)\leqq\frac{1}{2}$，$\mathrm{Im}(z)\geqq0$ から，

$$\cos\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①,\ \sin\frac{4k+1}{200}\pi\geqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より $\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\frac{5}{3}\pi$，②より $0\leqq\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\pi$ なので，$\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\pi$

これより，$\frac{200}{3}\leqq4k+1\leqq200$ となり，$\frac{197}{12}\leqq k\leqq\frac{199}{4}$ から $16.4<k<49.8$

よって，$k=17,\ 18,\ \cdots,\ 49$ から，z の個数は $49-17+1=33$ である。

(3)　$z^n=i$ を満たす複素数 z を，$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(r>0,\ -\pi\leqq\varphi<\pi)$ とおくと，$r^n=1$ から $r=1$ となり，$n\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(-n\pi\leqq n\varphi<n\pi)$ であるので，

$$n\varphi=\frac{4k+1}{2}\pi,\ \varphi=\frac{4k+1}{2n}\pi\quad\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\leqq k<\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

すると，$z=\cos\frac{4k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{4k+1}{2n}\pi$ となり，$\mathrm{Re}(z)\geqq\frac{1}{2}$ から $\cos\frac{4k+1}{2n}\pi\geqq\frac{1}{2}$

$$-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4k+1}{2n}\pi\leqq\frac{\pi}{3},\ -\frac{2}{3}n\leqq4k+1\leqq\frac{2}{3}n$$

これより $-\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\cdots\cdots③$ となり，n を 6 で割った余りで場合分けを行い，③を満たす整数 k の個数 N を求める。そこで，l を 0 以上の整数として，

(i)　$n=6l+1$ のとき

③より $-\frac{6l+1}{6}-\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{6l+1}{6}-\frac{1}{4}$ となり，$-l-\frac{5}{12}\leqq k\leqq l-\frac{1}{12}$ から，

$$-l\leqq k\leqq l-1,\ N=(l-1)-(-l)+1=2l$$

すると，$3N-n=3\cdot2l-(6l+1)=-1<0$ となり，$N<\frac{n}{3}$ である。

(ii)　$n=6l+2$ のとき

③より $-\dfrac{6l+2}{6}-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{6l+2}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{7}{12}\leqq k\leqq l+\dfrac{1}{12}$ から，

$-l\leqq k\leqq l$，$N=l-(-l)+1=2l+1$

すると，$3N-n=3(2l+1)-(6l+2)=1>0$ となり，$N>\dfrac{n}{3}$ である。

(iii)　$n=6l+3$ のとき

③より $-\dfrac{6l+3}{6}-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{6l+3}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{3}{4}\leqq k\leqq l+\dfrac{1}{4}$ から，

$-l\leqq k\leqq l$，$N=l-(-l)+1=2l+1$

すると，$3N-n=3(2l+1)-(6l+3)=0$ となり，$N=\dfrac{n}{3}$ である。

(iv)　$n=6l+4$ のとき

③より $-\dfrac{6l+4}{6}-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{6l+4}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{11}{12}\leqq k\leqq l+\dfrac{5}{12}$ から，

$-l\leqq k\leqq l$，$N=l-(-l)+1=2l+1$

すると，$3N-n=3(2l+1)-(6l+4)=-1<0$ となり，$N<\dfrac{n}{3}$ である。

(v)　$n=6l+5$ のとき

③より $-\dfrac{6l+5}{6}-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{6l+5}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{13}{12}\leqq k\leqq l+\dfrac{7}{12}$ から，

$-l-1\leqq k\leqq l$，$N=l-(-l-1)+1=2l+2$

すると，$3N-n=3(2l+2)-(6l+5)=1>0$ となり，$N>\dfrac{n}{3}$ である。

(vi)　$n=6l+6$ のとき

③より $-\dfrac{6l+6}{6}-\dfrac{1}{4}\leqq k\leqq\dfrac{6l+6}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{5}{4}\leqq k\leqq l+\dfrac{3}{4}$ から，

$-l-1\leqq k\leqq l$，$N=l-(-l-1)+1=2l+2$

すると，$3N-n=3(2l+2)-(6l+6)=0$ となり，$N=\dfrac{n}{3}$ である。

(i)〜(vi)より，$N>\dfrac{n}{3}$ となるのは，$n=6l+2$ または $n=6l+5$ のときである。

したがって，求める n の条件は，n を 3 で割ったときの余りが 2 である。

［解　説］

複素数平面と n 乗根についての問題です。(1)と(2)は基本的ですが，(3)は同様な内容であるものの，場合分けが必要なため，かなり時間を費やします。