1

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標平面において，点 A と点 B が$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$となるような実数$k$は存在しないことを示せ。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{HB}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

(3)　実数 t に対し，直線 OA 上の点 P を$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$となるようにとる。同様に直線 OB 上の点 Q を$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$となるようにとる。点 P を通り直線 OA と直交する直線をl_1とし，点 Q を通り直線 OB と直交する直線をl_2とする。l_1とl_2の交点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t$ を用いて表せ。

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

1 個のさいころを投げて出た目によって数直線上の点 P を動かすことを繰り返すゲームを考える。最初の P の位置を $a_0=0$ とし，さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n を次のルールで定める。

・$a_{n-1}=7$ のとき，$a_n=7$

・$a_{n-1}\neq 7$ のとき，n 回目に出た目 m に応じて

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}+m & (a_{n-1}+m=1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \text{のとき}) \\ 1 & (a_{n-1}+m=2,\ 12\ \text{のとき}) \\ 14-(a_{n-1}+m) & (a_{n-1}+m=8,\ 9,\ 10,\ 11\ \text{のとき}) \end{cases}$$

(1)　$a_2=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$n\geqq 1$ について，$a_n=7$ となる確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ について，$a_n=1$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\left|\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) $S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく。このとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a, b と虚数単位 i を用いて複素数 z が $z=a+bi$ の形で表されるとき，a を z の実部，b を z の虚部とよび，それぞれ $a=\mathrm{Re}(z)$，$b=\mathrm{Im}(z)$ と表す。

(1) $z^3=i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ。

(2) $z^{100}=i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z)\leqq\dfrac{1}{2}$ かつ $\mathrm{Im}(z)\geqq 0$ を満たすものの個数を求めよ。

(3) n を正の整数とする。$z^n=i$ を満たす複素数 z のうち，$\mathrm{Re}(z)\geqq\dfrac{1}{2}$ を満たすものの個数を N とする。$N>\dfrac{n}{3}$ となるための n に関する必要十分条件を求めよ。

5

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx-f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ とかく。

(1)　$f(x)=x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する。この $g(t)$ を求めよ。

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ をもち，次の 2 つの条件(i)，(ii)が成り立つものとする。

(i)　$f'(x)$ は増加関数，すなわち $a<b$ ならば $f'(a)<f'(b)$

(ii)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$

(2)　任意の実数 t に対して，x の関数 $tx-f(x)$ は最大値 $g(t)$ をもつことを示せ。

(3)　s を実数とする。t が実数全体を動くとき，t の関数 $st-g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ。

1

解答解説のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と仮定すると，

$$k^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2,\ k\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3$$

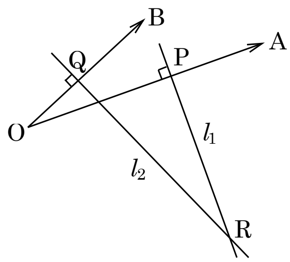
すると，$5k^2=2$ かつ $5k=3$ となり，両式を満たす実数 k は存在しない。

(2)　点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点 H に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}-s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\ 3-5s=0$$

すると，$s=\dfrac{3}{5}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{HB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，点 P を通り直線 OA と直交する直線を l_1，点 Q を通り直線 OB と直交する直線を l_2 とし，l_1 と l_2 の交点を R とする。



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(p-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QR}}&=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(q+t-1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から $5(p-t)+3q=0$ となり，$5p+3q=5t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から $3p+2(q+t-1)=0$ となり，$3p+2q=-2t+2$ ………②

①②より，$p=16t-6$，$q=-25t+10$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(16t-6)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(25t-10)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

(4)　3 点 O, A, B を通る円の中心 C は，線分 OA と線分 OB の垂直二等分線の交点なので，③に $t=\dfrac{1}{2}$ を代入すると $\mathrm{R}=\mathrm{C}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(16\cdot\frac{1}{2}-6\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\left(25\cdot\frac{1}{2}-10\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

［解　説］

平面ベクトルの基本題です。(4)は(3)の結果がストレートに利用できます。なお, (3)は(2)の結果を利用してもよかったのですが……。

2

解答解説のページへ

(1)　さいころを n 回投げたあとの P の位置 a_n について，$n \geqq 1$ のとき，$1 \leqq a_n \leqq 7$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_0=0$ から，1 回目に出た目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 のとき，a_1 はそれぞれ 1, 1, 3, 4, 5, 6 となり，$1 \leqq a_1 \leqq 7$ である。

(ii)　$n=k$ のとき

$1 \leqq a_k \leqq 7$ と仮定すると，$k+1$ 回目に出た目が 1, 2, 3, 4, 5, 6 のとき，a_{k+1} は右表のようになる。

目＼a_k	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	4	5	6	7	7
2	3	4	5	6	7	6	7
3	4	5	6	7	6	5	7
4	5	6	7	6	5	4	7
5	6	7	6	5	4	3	7
6	7	6	5	4	3	1	7

これより，$1 \leqq a_{k+1} \leqq 7$ となる。

(i)(ii)より，$1 \leqq a_n \leqq 7$ である。

さて，$a_2=1$ となるのは，右表より，$a_1=1$ または $a_1=6$ である。

(a)　$a_0=0 \to a_1=1 \to a_2=1$ のとき

1 回目に出た目が 1 または 2 で，2 回目に出た目が 1 の場合より，その確率は，

$$\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$$

(b)　$a_0=0 \to a_1=6 \to a_2=1$ のとき

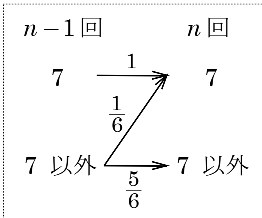
1 回目に出た目が 6 で，2 回目に出た目が 6 の場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

(a)(b)より，$a_2=1$ となる確率は，$\dfrac{2}{36}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{12}$ である。

(2)　$a_n=7$ $(n \geqq 1)$ となる確率を p_n とおくと，$p_1=0$ で，

$$p_n=p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{5}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}\quad(n \geqq 2)$$



これより，$p_n-1=\dfrac{5}{6}(p_{n-1}-1)$ となり，

$$p_n-1=(p_1-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ となり，この式は $n=1$ のときも満たしている。

(3)　$n \geqq 1$ のとき，$a_n=1$ となる確率を q_n とおくと，(1)から，$q_1=\dfrac{1}{3}$，$q_2=\dfrac{1}{12}$

また，$a_n=6$ となる確率を r_n とおく。すると，$2 \leqq a_n \leqq 5$ となる確率は，(2)から $1-p_n-q_n-r_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}-q_n-r_n$ となる。

ここで，(1)の表を参照すると，$n \geqq 2$ で，$q_n=\dfrac{1}{6}q_{n-1}+\dfrac{1}{6}r_{n-1}$ ………①

$$r_n=\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}+\frac{2}{6}(1-p_{n-1}-q_{n-1}-r_{n-1})$$
$$=\frac{1}{6}q_{n-1}+\frac{1}{6}r_{n-1}+\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}-q_{n-1}-r_{n-1}\right\}$$
$$=-\frac{1}{6}q_{n-1}-\frac{1}{6}r_{n-1}+\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\cdots\cdots\cdots②$$

すると，①＋②より $q_n+r_n=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ となり，①に代入すると，$n\geqq 3$ で，

$$q_n=\frac{1}{6}(q_{n-1}+r_{n-1})=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}=\frac{1}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}$$

［解 説］

確率と漸化式の難しめの問題です。問題文からイメージが湧かないので，最初に具体的に表を作ってみました。そして，その表を見ながら立式をしています。なお，表中の a_k が 2 の列は形式的に計算しただけなので，削除しても構いません。

3

解答解説のページへ

(1)　$f(x)=\left|\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|$ に対し，$g(x)=\cos x-\sqrt{5}\sin x-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ とすると，

$$g(x)=\sqrt{6}\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}-\sin x\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ とおくと，$g(x)=\sqrt{6}\cos(x+\alpha)-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

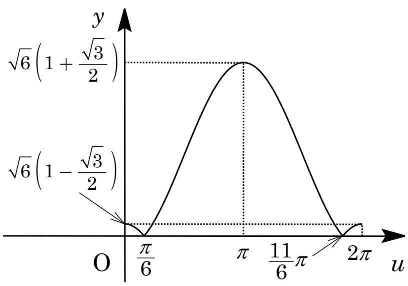
$-1\leqq\cos(x+\alpha)\leqq 1$ より，$f(x)=|g(x)|$ は $\cos(x+\alpha)=-1$ のとき最大となり，最大値は $\left|-\sqrt{6}-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right|=\sqrt{6}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ である。

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{6}\cos(x+\alpha)-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|dx$ に対し，$u=x+\alpha$ とおくと，

$$I=\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left|\sqrt{6}\cos u-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|du=\sqrt{6}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$$

ここで，$h(u)=\sqrt{6}\left|\cos u-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$ とおくと，$h(u+2\pi)=h(u)$ から，$h(u)$ は周期 2π の周期関数である。

さらに，$h(2\pi-u)=h(u)$ から，$y=h(u)$ のグラフは直線 $u=\dfrac{(2\pi-u)+u}{2}=\pi$ について対称になることより，



$$I=\sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du=2\sqrt{6}\int_0^{\pi}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$$

$$=2\sqrt{6}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du-2\sqrt{6}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du$$

$$=2\sqrt{6}\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]_0^{\frac{\pi}{6}}-2\sqrt{6}\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}$$

$$=2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{2}-3\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{6}-2\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\sqrt{2}\cdot\frac{5}{6}\pi=2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\pi$$

(3)　$S(t)=\displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\sqrt{6}\int_{t+\alpha}^{t+\alpha+\frac{\pi}{3}}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$

ここで，$h(u)$ が周期 2π の周期関数であることより，$0\leqq u<2\pi$ で考えると，

$S(t)$ が最大になるのは，$\dfrac{(t+\alpha)+\left(t+\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}=\pi$ のときである。

これより，$t+\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$ となるので，$S(t)$ の最大値 M は，

$$M=S\left(\frac{5}{6}\pi-\alpha\right)=\sqrt{6}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du=-\sqrt{6}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du$$

$y=h(u)$ のグラフは直線 $u=\pi$ について対称なので,

$$M=-2\sqrt{6}\int_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du=-2\sqrt{6}\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]_{\frac{5}{6}\pi}^{\pi}$$

$$=-2\sqrt{6}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

［解 説］

定積分の計算問題です。周期性や対称性に着目することがポイントです。(3)の解答例は, グラフの形状をもとにした直感的な記述になっています。t の値で場合分けをした方がよかったのでしょうが。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

(1)　$z^3=i$ を満たす複素数 z を，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

すると，$r^3=1$ から $r=1$ となり，$0\leqq3\theta<6\pi$ から $3\theta=\frac{\pi}{2},\ 2\pi+\frac{\pi}{2},\ 4\pi+\frac{\pi}{2}$ であるので，$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi$ となる。

よって，$z=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$，$z=\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi$，$z=\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi$ から，

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z=-i$$

(2)　(1)と同様に，$z^{100}=i$ を満たす複素数 z について，$r^{100}=1$ から $r=1$ となり，$0\leqq100\theta<200\pi$ から $100\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99)$ であるので，

$$100\theta=\frac{4k+1}{2}\pi,\ \theta=\frac{4k+1}{200}\pi\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 99)$$

すると，$z=\cos\frac{4k+1}{200}\pi+i\sin\frac{4k+1}{200}\pi$ となり，$\mathrm{Re}(z)\leqq\frac{1}{2}$，$\mathrm{Im}(z)\geqq0$ から，

$$\cos\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①,\ \sin\frac{4k+1}{200}\pi\geqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より $\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\frac{5}{3}\pi$，②より $0\leqq\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\pi$ なので，$\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4k+1}{200}\pi\leqq\pi$

これより，$\frac{200}{3}\leqq4k+1\leqq200$ となり，$\frac{197}{12}\leqq k\leqq\frac{199}{4}$ から $16.4<k<49.8$

よって，$k=17,\ 18,\ \cdots,\ 49$ から，z の個数は $49-17+1=33$ である。

(3)　$z^n=i$ を満たす複素数 z を，$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(r>0,\ -\pi\leqq\varphi<\pi)$ とおくと，$r^n=1$ から $r=1$ となり，$n\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(-n\pi\leqq n\varphi<n\pi)$ であるので，

$$n\varphi=\frac{4k+1}{2}\pi,\ \varphi=\frac{4k+1}{2n}\pi\quad\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\leqq k<\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

すると，$z=\cos\frac{4k+1}{2n}\pi+i\sin\frac{4k+1}{2n}\pi$ となり，$\mathrm{Re}(z)\geqq\frac{1}{2}$ から $\cos\frac{4k+1}{2n}\pi\geqq\frac{1}{2}$

$$-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{4k+1}{2n}\pi\leqq\frac{\pi}{3},\ -\frac{2}{3}n\leqq4k+1\leqq\frac{2}{3}n$$

これより $-\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{n}{6}-\frac{1}{4}\cdots\cdots$③となり，$n$ を 6 で割った余りで場合分けを行い，③を満たす整数 k の個数 N を求める。そこで，l を 0 以上の整数として，

(i)　$n=6l+1$ のとき

③より $-\frac{6l+1}{6}-\frac{1}{4}\leqq k\leqq\frac{6l+1}{6}-\frac{1}{4}$ となり，$-l-\frac{5}{12}\leqq k\leqq l-\frac{1}{12}$ から，

$$-l\leqq k\leqq l-1,\ N=(l-1)-(-l)+1=2l$$

すると，$3N-n=3\cdot2l-(6l+1)=-1<0$ となり，$N<\frac{n}{3}$ である。

(ii)　$n=6l+2$ のとき

　③より $-\dfrac{6l+2}{6}-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{6l+2}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{7}{12} \leqq k \leqq l+\dfrac{1}{12}$ から，

$$-l \leqq k \leqq l,\ N=l-(-l)+1=2l+1$$

　すると，$3N-n=3(2l+1)-(6l+2)=1>0$ となり，$N>\dfrac{n}{3}$ である。

(iii)　$n=6l+3$ のとき

　③より $-\dfrac{6l+3}{6}-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{6l+3}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{3}{4} \leqq k \leqq l+\dfrac{1}{4}$ から，

$$-l \leqq k \leqq l,\ N=l-(-l)+1=2l+1$$

　すると，$3N-n=3(2l+1)-(6l+3)=0$ となり，$N=\dfrac{n}{3}$ である。

(iv)　$n=6l+4$ のとき

　③より $-\dfrac{6l+4}{6}-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{6l+4}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{11}{12} \leqq k \leqq l+\dfrac{5}{12}$ から，

$$-l \leqq k \leqq l,\ N=l-(-l)+1=2l+1$$

　すると，$3N-n=3(2l+1)-(6l+4)=-1<0$ となり，$N<\dfrac{n}{3}$ である。

(v)　$n=6l+5$ のとき

　③より $-\dfrac{6l+5}{6}-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{6l+5}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{13}{12} \leqq k \leqq l+\dfrac{7}{12}$ から，

$$-l-1 \leqq k \leqq l,\ N=l-(-l-1)+1=2l+2$$

　すると，$3N-n=3(2l+2)-(6l+5)=1>0$ となり，$N>\dfrac{n}{3}$ である。

(vi)　$n=6l+6$ のとき

　③より $-\dfrac{6l+6}{6}-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{6l+6}{6}-\dfrac{1}{4}$ となり，$-l-\dfrac{5}{4} \leqq k \leqq l+\dfrac{3}{4}$ から，

$$-l-1 \leqq k \leqq l,\ N=l-(-l-1)+1=2l+2$$

　すると，$3N-n=3(2l+2)-(6l+6)=0$ となり，$N=\dfrac{n}{3}$ である。

(i)〜(vi)より，$N>\dfrac{n}{3}$ となるのは，$n=6l+2$ または $n=6l+5$ のときである。

　したがって，求める n の条件は，n を 3 で割ったときの余りが 2 である。

［解　説］

　複素数平面と n 乗根についての問題です。(1)と(2)は基本的ですが，(3)は同様な内容であるものの，場合分けが必要なため，かなり時間を費やします。

5　　解答解説のページへ

(1)　実数 t に対し，$h(x)=tx-f(x)$ とおく。ここで，$f(x)=x^4$ のとき，

$$h(x)=tx-x^4,\ h'(x)=t-4x^3=-4\left(x^3-\frac{t}{4}\right)$$

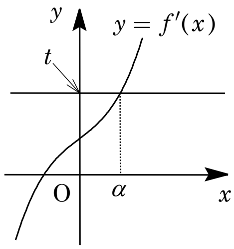
これより，$h(x)$ の増減は右表のようになり，$h(x)$ は $x=\sqrt[3]{\dfrac{t}{4}}$ において最大となり，最大値 $g(t)$ は，

x	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{t}{4}}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$$g(t)=h\left(\sqrt[3]{\frac{t}{4}}\right)=t\sqrt[3]{\frac{t}{4}}-\frac{t}{4}\sqrt[3]{\frac{t}{4}}=\frac{3t}{4}\sqrt[3]{\frac{t}{4}}$$

(2)　$h(x)=tx-f(x)$ に対して，$h'(x)=t-f'(x)$

ここで，$f'(x)$ は増加関数であり，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\infty$ のとき，任意の実数 t に対し，$h'(x)=0$ すなわち $f'(x)=t$ となる x がただ 1 つ存在する。



これを $x=\alpha$ とおくと，$h(x)$ の増減は右下表のようになる。

すると，$h(x)$ は $x=\alpha$ において最大となり，最大値 $g(t)=h(\alpha)$ をもつ。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

(3)　(2)より，$f'(\alpha)=t$ ……①であり，

$$g(t)=h(\alpha)=\alpha t-f(\alpha)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，実数 s に対し，$p(t)=st-g(t)$ とおくと，①②から，

$$p(t)=st-\alpha t+f(\alpha)=(s-\alpha)f'(\alpha)+f(\alpha)$$

ここで，$q(\alpha)=(s-\alpha)f'(\alpha)+f(\alpha)$ とおくと，$p(t)=q(\alpha)$ であり，t が実数全体を動くとき，(2)から α も実数全体を動き，

$$p(t)-f(s)=q(\alpha)-f(s)=(s-\alpha)f'(\alpha)+f(\alpha)-f(s)\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$\alpha<s$ のとき

$f(\alpha)-f(s)=f'(\beta)(\alpha-s)$ となる β が $\alpha<\beta<s$ に存在し，③から，

$$p(t)-f(s)=(s-\alpha)f'(\alpha)+f'(\beta)(\alpha-s)=(\alpha-s)\{f'(\beta)-f'(\alpha)\}$$

$f'(\alpha)<f'(\beta)$ から $p(t)-f(s)<0$ となり，$p(t)<f(s)$

(ii)　$\alpha=s$ のとき

③から $p(t)-f(s)=0$ となり，$p(t)=f(s)$

(iii)　$s<\alpha$ のとき

$f(\alpha)-f(s)=f'(\gamma)(\alpha-s)$ となる γ が $s<\gamma<\alpha$ に存在し，③から，

$$p(t)-f(s)=(s-\alpha)f'(\alpha)+f'(\gamma)(\alpha-s)=(\alpha-s)\{f'(\gamma)-f'(\alpha)\}$$

$f'(\gamma)<f'(\alpha)$ から $p(t)-f(s)<0$ となり，$p(t)<f(s)$

(i)～(iii)より，$p(t)\leqq f(s)$ であるので，$p(t)$ の最大値は $f(s)$ となる。

［解 説］

微分と増減の問題です。(1)と(2)は基本的ですが，同様な方法で(3)も処理しようとすると，第 2 次導関数が絡んできます。問題文の表現から，これは避けるべきだと感じられますので，平均値の定理の登場となったわけです。