**1**

解答解説のページへ

座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 1)$ をとる。線分 OA 上に点 O, 点 A と異なる点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ をとり，線分 BP 上の点 Q を，$\triangle$APQ と $\triangle$OBQ の面積が等しくなるようにとる。

(1) 直線 BP を表す方程式を求めよ。

(2) $\triangle$OBQ の面積を $p$ を用いて表せ。

(3) $p$ が $0 < p < 2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える。出た目が 1, 2 であれば得点は 2, 出た目が 3 であれば得点は 1, 出た目が 4, 5, 6 であれば得点は 0 とする。このゲームを $k$ 回繰り返すとき, 得点の合計を $S_k$ とする。

(1)　$S_2 = 3$ となる確率を求めよ。

(2)　$S_3$ が奇数となる確率を求めよ。

(3)　$S_4 \geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 $n$ を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

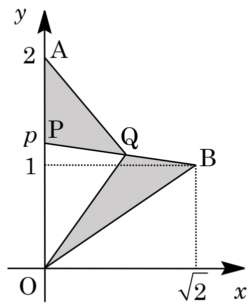
以下の問いに答えよ。

(1)　$p$ を実数とする。曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|$ と直線 $y=x+p$ の共有点の個数を求めよ。

(2)　等式 $f(x)=x^2+\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

**1**

問題のページへ




(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2},\ 1)$ に対し，線分 OA 上に点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ $(0<p<2)$ をとると，直線 BP の方程式は，

$$y=\frac{1-p}{\sqrt{2}}x+p$$

(2) 線分 BP 上に点 Q をとり，$\triangle\mathrm{APQ}=\triangle\mathrm{OBQ}$ から，

$$\triangle\mathrm{AOQ}=\triangle\mathrm{OBP}$$

ここで，点 Q の $x$ 座標を $x=t$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とおくと，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t=\frac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{2}\,,\ \ t=\frac{\sqrt{2}}{2}p$$

すると，$\triangle\mathrm{OBQ}=\dfrac{1}{2}\cdot p\cdot(\sqrt{2}-t)=\dfrac{1}{2}p\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}p\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}p(2-p)$ となる。

(3) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，(1)(2)より，$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}p$ ………①

$$y=\frac{1-p}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}p+p=\frac{1}{2}(p-p^2)+p=-\frac{1}{2}p^2+\frac{3}{2}p\ \cdots\cdots\cdots②$$

①から $p=\sqrt{2}x$ となり，②に代入すると $y=-x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}x$ となる。

なお，$0<p<2$ なので，①から $0<x<\sqrt{2}$ である。

したがって，点 Q の軌跡は，放物線 $y=-x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}x$ $(0<x<\sqrt{2})$ である。

［解　説］

軌跡についての基本的な問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　与えられたゲームにおいて，2 点，1 点，0 点が得られる確率は，それぞれ$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{1}{2}$である。そして，このゲームを$k$回繰り返すとき，得点の合計を$S_k$とする。

さて，$S_2=3$となるのは，2 点が 1 回，1 点が 1 回より，その確率は，

$${}_2\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$$

(2)　$S_3$が奇数となるのは，次の 2 つの場合があり，その確率は，

(i)　1 点が 1 回で 2 点または 0 点が 2 回のとき　${}_3\mathrm{C}_1\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{75}{216}$

(ii)　1 点が 3 回のとき　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{1}{216}$

(i)(ii)より，$S_3$が奇数となる確率は，$\dfrac{75}{216}+\dfrac{1}{216}=\dfrac{19}{54}$である。

(3)　$S_4\geqq n$となる確率を$P(S_4\geqq n)$と表すと，$n$が大きくなると$P(S_4\geqq n)$は単調に減少し，また$0\leqq S_4\leqq 8$から$P(S_4\geqq 9)=0$なので，以下，$n\leqq 8$で調べる。

(a)　$S_4=8$のとき　2 点が 4 回より，$P(S_4=8)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$

$$P(S_4\geqq 8)=P(S_4=8)=\frac{1}{81}<\frac{1}{9}$$

(b)　$S_4=7$のとき　2 点が 3 回で 1 点が 1 回より，$P(S_4=7)={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{81}$

$$P(S_4\geqq 7)=P(S_4\geqq 8)+P(S_4=7)=\frac{1}{81}+\frac{2}{81}=\frac{1}{27}<\frac{1}{9}$$

(c)　$S_4=6$のとき　2 点が 3 回で 0 点が 1 回　または　2 点が 2 回で 1 点が 2 回より，

$$P(S_4=6)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\frac{1}{2}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{2}{27}+\frac{1}{54}=\frac{5}{54}$$

$$P(S_4\geqq 6)=P(S_4\geqq 7)+P(S_4=6)=\frac{1}{27}+\frac{5}{54}=\frac{7}{54}>\frac{1}{9}$$

以上より，$P(S_4\geqq n)\leqq\dfrac{1}{9}$となる最小の整数$n$は$n=7$である。

［解　説］

標準的な確率の問題です。(3)は$\dfrac{1}{9}$がかなり小さい数でしたので……。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|$ ……①と直線 $y=x+p$ ……②を連立すると，

$$\left|x^2+x-2\right|=x+p,\ \left|x^2+x-2\right|-x=p$$

すると，曲線①と直線②の共有点の個数は，曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|-x$ ……③と直線 $y=p$ ……④の共有点の個数に一致する。

さて，③は，$y=\left|(x-1)(x+2)\right|-x$ となり，

・$x\leqq-2,\ 1\leqq x$ のとき　$y=(x^2+x-2)-x=x^2-2$

・$-2<x<1$ のとき　$y=-(x^2+x-2)-x=-x^2-2x+2=-(x+1)^2+3$

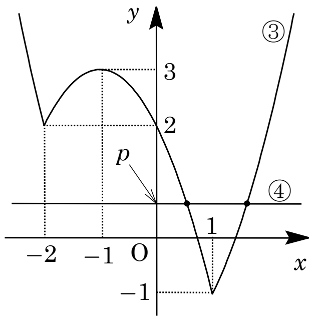
これより，曲線③と直線④を $xy$ 平面上に描くと，右図のようになる。したがって，③と④の共有点の個数，すなわち①と②の共有点の個数は，

$p>3$ のとき 2 個，$p=3$ のとき 3 個

$2<p<3$ のとき 4 個，$p=2$ のとき 3 個

$-1<p<2$ のとき 2 個，$p=-1$ のとき 1 個

$p<-1$ のとき 0 個




(2)　$f(x)=x^2+\displaystyle\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)\,dt=x^2+x\int_{-1}^{2}f(t)\,dt-\int_{-1}^{2}t\,dt$ に対して，

$C=\displaystyle\int_{-1}^{2}f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=x^2+Cx-\Big[\dfrac{t^2}{2}\Big]_{-1}^{2}=x^2+Cx-\dfrac{3}{2}$ となり，

$$C=\int_{-1}^{2}\Big(t^2+Ct-\frac{3}{2}\Big)dt=\Big[\frac{t^3}{3}+\frac{C}{2}t^2-\frac{3}{2}t\Big]_{-1}^{2}=3+\frac{3}{2}C-\frac{9}{2}$$

これより，$\dfrac{1}{2}C-\dfrac{3}{2}=0$ となり，$C=3$ から $f(x)=x^2+3x-\dfrac{3}{2}$ である。

## ［解　説］

独立した 2 問の構成で，内容は微分の応用と積分方程式についてです。どちらも基本的な内容ですが，ただ千葉大では珍しい形式です。