1

解答解説のページへ

0 以上 9999 以下の整数を 4 桁で表示し，以下の操作を行うこととする。ただし，4 桁で表示するとは，整数が 100 以上 999 以下の場合は千の位の数字を 0，10 以上 99 以下の場合は千の位と百の位の数字を 0，1 以上 9 以下の場合は千の位と百の位と十の位の数字を 0，そして 0 はどの位の数字も 0 とすることである。

操作：千の位の数字と十の位の数字を入れ換える。さらに，百の位の数字と一の位の数字を入れ換える。

また，整数 L に対し，操作によって得られた整数を $\overline{L}$ と表す。

(1) M を 0 以上 9999 以下の整数とし，$M=100x+y$ のように整数 x，y $(0 \leqq x \leqq 99,\ 0 \leqq y \leqq 99)$ を用いて表す。操作によって得られた $\overline{M}$ が M の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 3 を足した数に等しいならば，$-197x+298y=9$ が成り立つことを証明せよ。

(2) N が 0 以上 9999 以下の整数ならば，操作によって得られた整数 $\overline{N}$ は N の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならないことを証明せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

n を自然数とする。n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく。

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。

(2) M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。

(3) M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標空間において，原点 O と点 A$(1,\ 0,\ -1)$ と点 B$(0,\ 5,\ 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を l とする。また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の点 P$(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する。l 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる。このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 曲線 C 上の点 R と l 上の点 S のうち，$|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの $|\overrightarrow{\mathrm{RS}}|$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

x, y についての方程式 $x^2 - 6xy + y^2 = 9$ ……(＊)に関する次の問いに答えよ。

(1)　x, y がともに正の整数であるような(＊)の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2)　数列 a_1, a_2, a_3, …が漸化式

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + a_n = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき, $(x,\ y) = (a_{n+1},\ a_n)$ が(＊)を満たすならば, $(x,\ y) = (a_{n+2},\ a_{n+1})$ も(＊)を満たすことを示せ。

(3)　(＊)の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在することを示せ。

5

解答解説のページへ

正の整数 $m,\ n$ に対して，$A(m,\ n)=(m+1)n^{m+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$ とおく。

(1)　$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ。

(2)　各 m に対して，$b_m=\displaystyle\lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。

(3)　各 n に対して，$c_n=\displaystyle\lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　0 以上 9 以下の整数 a, b, c, d に対して，$L=1000a+100b+10c+d$ とおくと，

$$\overline{L}=1000c+100d+10a+b=100(10c+d)+(10a+b)$$

これより，$M=100x+y\ (0\leqq x\leqq 99,\ 0\leqq y\leqq 99)$ のとき，

$$\overline{M}=100y+x$$

ここで，$\overline{M}=\dfrac{2}{3}M+3$ とすると，$100y+x=\dfrac{2}{3}(100x+y)+3$ となり，

$$300y+3x=200x+2y+9,\ -197x+298y=9$$

(2)　(1)と同様に，$N=100x+y$，$\overline{N}=100y+x$ とおき，$\overline{N}=\dfrac{2}{3}N+1$ とすると，

$$100y+x=\frac{2}{3}(100x+y)+1,\ -197x+298y=3 \cdots\cdots\cdots①$$

さて，①を満たす特殊解を求めるために，197 と 298 に互除法を適用すると，右のようになる。ここで，$p=197$，$q=298$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると，

$$\begin{array}{rrrrr} & 19 & 1 & 1 & 1 \\ 5 &)\,96 &)\,101 &)\,197 &)\,298 \\ & 95 & 96 & 101 & 197 \\ \hline & 1 & 5 & 96 & 101 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} & 19 & 1 & 1 & 1 \\ -3p+2q &)\,2p-q &)\,-p+q &)\,p &)\,q \\ & -57p+38q & 2p-q & -p+q & p \\ \hline & 59p-39q & -3p+2q & 2p-q & -p+q \end{array}$$

$$59p-39q=1$$

$$59\cdot 197-39\cdot 298=1$$

両辺を 3 倍して，

$$177\cdot 197-117\cdot 298=3,\ -197\cdot(-177)+298\cdot(-117)=3 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-197(x+177)+298(y+117)=0$ となり，

$$197(x+177)=298(y+117) \cdots\cdots\cdots③$$

197 と 298 は互いに素なので，整数 k を用いると，③から，

$$x+177=298k,\ y+117=197k$$

$0\leqq x\leqq 99$ から $177\leqq 298k\leqq 276$ となり，整数 k は存在しない。

すなわち，①を満たす整数 x, y は存在しないことから，$\overline{N}$ は N の $\dfrac{2}{3}$ 倍に 1 を足した数と等しくならない。

［解 説］

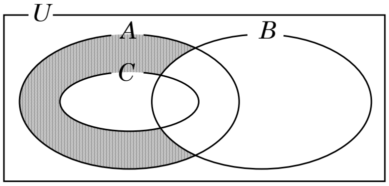
互除法の利用がポイントの不定方程式の標準的な問題です。

2　　問題のページへ

(1)　n 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の積 M が，2 で割り切れる事象を A，3 で割り切れる事象を B とおく。

このとき，M が 2 でも 3 でも割り切れない事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，出た目が 1 または 5 の場合より，その確率は $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ……①となる。

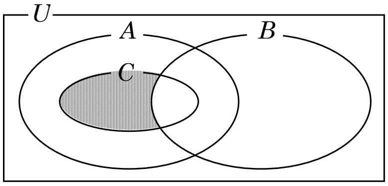
(2)　M が 4 で割り切れる事象を C とおくと，$C\subset A$ である。また，全事象を U とおく。



このとき，M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない事象 $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ は，出た目の 1 個が 2 で，残り $n-1$ 個は 1 または 5 の場合より，その確率は，

$$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})={}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない事象 $\overline{B}\cap C$ について，



$$\begin{aligned}P(\overline{B}\cap C)&=P(A\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=\{P(A)-P(A\cap B)\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=\{1-P(\overline{A})\}-\{1-P(\overline{A\cap B})\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=-P(\overline{A})+P(\overline{A}\cup\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=-P(\overline{A})+\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\end{aligned}$$

ここで，$P(\overline{B})=\left(\dfrac{4}{6}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となり，①②を代入すると，

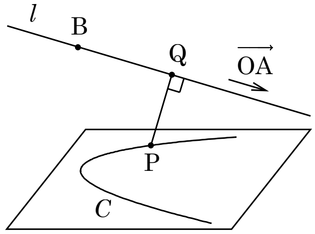
$$P(\overline{B}\cap C)=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

確率の頻出題です。図を用いて，考えを整理しています。なお，(3)は(1)と(2)の結果を利用する方法で記しています。

3

問題のページへ



(1)　曲線 C 上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ a^2,\ 0)$

直線 l 上の点 Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(1,\ 0,\ -1)+(0,\ 5,\ 0)=(t,\ 5,\ -t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-a,\ 5-a^2,\ -t)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-a)+t=0$$

これより $t=\dfrac{a}{2}$ となり，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$ である。

(2)　曲線 C 上の点 R と直線 l 上の点 S に対して，点 R を固定すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ が最小になるのは，$\mathrm{RS}\perp l$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ の場合である。

すると，(1)の結果から，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ 0)$ とおくと $\mathrm{S}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$ となり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2=\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-5)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^4-\frac{19}{2}a^2+25=\left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}$$

したがって，$a^2=\dfrac{19}{4}\left(a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right)$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{39}{16}}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$ をとり，

$$\mathrm{R}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0\right),\ \mathrm{S}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}\right)\ \text{（複号同順）}$$

［解　説］

空間図形について，誘導の詳しい基本的な問題です。(2)は(1)の結果を利用したため，計算が少し容易になりました。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1) 正の整数 x, y に対して，$x^2-6xy+y^2=9$ ………(＊)

(＊)から，$x^2+y^2=9+6xy$ となり，x^2+y^2 は 3 の倍数である。

以下，$\bmod 3$ で記すと，整数 k に対し，$k\equiv 0$ のとき $k^2\equiv 0$，$k\equiv \pm 1$ のとき $k^2\equiv 1$ となる。これより，$x^2+y^2\equiv 0$ のとき $x^2\equiv 0$ かつ $y^2\equiv 0$ であり，$x\equiv 0$ かつ $y\equiv 0$，すなわち x, y はともに 3 の倍数となる。

さて，(＊)を満たす正の整数 x, y で，y が最小であるのは，まず $y=3$ について調べると，(＊)は $x^2-18x+9=9$ となり，$x(x-18)=0$ から $x=18$ である。

よって，求める解は，$(x,\ y)=(18,\ 3)$ である。

(2) 漸化式 $a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0$ ……①に対して，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が(＊)を満たすならば，${a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+{a_n}^2=9$ ……②が成り立つ。このとき，①から，

$${a_{n+2}}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+{a_{n+1}}^2=(6a_{n+1}-a_n)^2-6(6a_{n+1}-a_n)a_{n+1}+{a_{n+1}}^2$$
$$=36{a_{n+1}}^2-12a_{n+1}a_n+{a_n}^2-36{a_{n+1}}^2+6a_{n+1}a_n+{a_{n+1}}^2={a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+{a_n}^2$$

すると，②から，${a_{n+2}}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+{a_{n+1}}^2=9$ となり，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も(＊)を満たす。

(3) $a_1=3$，$a_2=18$ とすると，(1)から $(x,\ y)=(a_2,\ a_1)$ は，(＊)の解である。

そして，漸化式①によって a_n $(n\geqq 3)$ を定めると，(2)から $(x,\ y)=(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…は，(＊)の解である。

さて，ここで，$a_1=3$，$a_2=18$ と漸化式①で定められた整数の数列 $\{a_n\}$ が，正の増加数列 $(0<a_n<a_{n+1})$ であることを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$ のとき　整数 a_1，a_2 は $0<a_1<a_2$ を満たしている。

(ii) $n=l$ のとき　整数 a_l，a_{l+1} が $0<a_l<a_{l+1}$ を満たしているとすると，①から，

$$a_{l+2}-a_{l+1}=(6a_{l+1}-a_l)-a_{l+1}=5a_{l+1}-a_l>5a_l-a_l=4a_l>0$$

これより，整数 a_{l+1}，a_{l+2} は $0<a_{l+1}<a_{l+2}$ を満たしている。

(i)(ii)より，$0<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ である。

したがって，$(a_2,\ a_1)$，$(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…はすべて異なることより，(＊)の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在する。

［解 説］

整数と漸化式の融合問題です。(3)は $(a_2,\ a_1)$，$(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…に，同じ整数の組が現れないことを示す点が重要です。なお，(1)は $y=1$，$y=2$，$y=3$ と当てはめた方がよかったかもしれません。

5

問題のページへ

(1) 正の整数 m, n に対して，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき，$x^m e^{-\frac{1}{n}} \leqq x^m e^{-x} \leqq x^m e^0 = x^m$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-\frac{1}{n}}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ から，

$$\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} e^{-\frac{1}{n}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

すると，$A(m,\ n) = (m+1)n^{m+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$ から，$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ である。

(2) $n \to \infty$ のとき $e^{-\frac{1}{n}} \to e^0 = 1$ であるので，(1)から，$b_m = \displaystyle\lim_{n\to\infty} A(m,\ n) = 1$

(3) 部分積分を行うと，

$$A(m,\ n) = (m+1)n^{m+1}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{n}} + (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^{m+1}}{m+1}e^{-x}\,dx$$

$$= n^{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx$$

$$= e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx$$

(1)と同様にすると，$\displaystyle\frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+2} e^{-\frac{1}{n}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+2}$

$$\frac{1}{m+2}\cdot\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}} \leqq n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{m+2}\cdot\frac{1}{n} \cdots\cdots\cdots(*)$$

$m \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{m+2} \to 0$ であるので，$(*)$より，$n^{m+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \to 0$ となり，

$$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n) = e^{-\frac{1}{n}}$$

［解　説］

定積分と極限の融合問題です。なお，(3)は，与えられた $A(m,\ n)$ の形から部分積分を実行しています。