1

解答解説のページへ

n を自然数とする。n 個のサイコロを同時に投げ，出た目の積を M とおく。

(1) M が 2 でも 3 でも割り切れない確率を求めよ。

(2) M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない確率を求めよ。

(3) M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標空間において，原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -1)$ と点 $\mathrm{B}(0,\ 5,\ 0)$ がある。実数 t を用いて $t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表される点全体を l とする。また，xy 平面上の $y=x^2$ を満たす点全体からなる曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2,\ 0)$ を固定する。l 上の点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が垂直であるようにとる。このとき，点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) 曲線 C 上の点 R と l 上の点 S のうち，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ を最小にする点 R と点 S の組み合わせをすべて求めよ。また，そのときの $\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

x, y についての方程式 $x^2-6xy+y^2=9$ ……$(*)$に関する次の問いに答えよ。

(1)　x, y がともに正の整数であるような$(*)$の解のうち, y が最小であるものを求めよ。

(2)　数列 a_1，a_2，a_3，…が漸化式

$$a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。このとき，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が$(*)$を満たすならば，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も$(*)$を満たすことを示せ。

(3)　$(*)$の整数解$(x,\ y)$は無数に存在することを示せ。

4

解答解説のページへ

正の整数 m, n に対して，$A(m,\ n)=(m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$ とおく。

(1)　$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ を証明せよ。

(2)　各 m に対して，$b_m = \lim_{n\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。

(3)　各 n に対して，$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

r を正の実数とし，関数 $f(x)=x+\dfrac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ を考える。

(1)　$r=1$ のとき，$f(x)$ はつねに増加することを示せ。

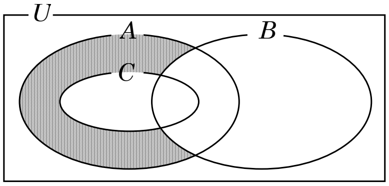
(2)　次の条件を満たす最大の正の実数 c を求めよ。
　条件：$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する。

1　　問題のページへ

(1)　n 個のサイコロを同時に投げたとき，出た目の積 M が，2 で割り切れる事象を A，3 で割り切れる事象を B とおく。

このとき，M が 2 でも 3 でも割り切れない事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ は，出た目が 1 または 5 の場合より，その確率は $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\dfrac{2}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ ……①となる。

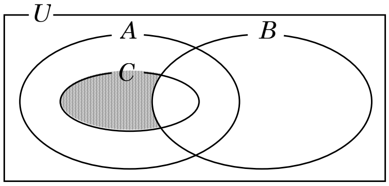
(2)　M が 4 で割り切れる事象を C とおくと，$C\subset A$ である。また，全事象を U とおく。



このとき，M が 2 で割り切れるが，3 でも 4 でも割り切れない事象 $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$ は，出た目の 1 個が 2 で，残り $n-1$ 個は 1 または 5 の場合より，その確率は，

$$P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})={}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　M が 4 では割り切れるが，3 では割り切れない事象 $\overline{B}\cap C$ について，



$$\begin{aligned}P(\overline{B}\cap C)&=P(A\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=\{P(A)-P(A\cap B)\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=\{1-P(\overline{A})\}-\{1-P(\overline{A\cap B})\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=-P(\overline{A})+P(\overline{A}\cup\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=-P(\overline{A})+\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\\&=P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})-P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\end{aligned}$$

ここで，$P(\overline{B})=\left(\dfrac{4}{6}\right)^n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ となり，①②を代入すると，

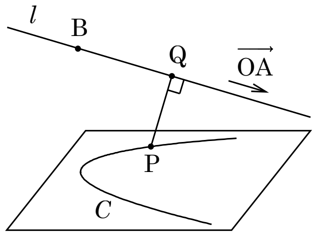
$$P(\overline{B}\cap C)=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

確率の頻出題です。図を用いて，考えを整理しています。なお，(3)は(1)と(2)の結果を利用する方法で記しています。

2

問題のページへ



(1)　曲線 C 上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ a^2,\ 0)$

直線 l 上の点 Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t(1,\ 0,\ -1)+(0,\ 5,\ 0)=(t,\ 5,\ -t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-a,\ 5-a^2,\ -t)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t-a)+t=0$$

これより $t=\dfrac{a}{2}$ となり，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$ である。

(2)　曲線 C 上の点 R と直線 l 上の点 S に対して，点 R を固定すると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ が最小になるのは，$\mathrm{RS}\perp l$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ の場合である。

すると，(1)の結果から，$\mathrm{R}(a,\ a^2,\ 0)$ とおくと $\mathrm{S}\left(\dfrac{a}{2},\ 5,\ -\dfrac{a}{2}\right)$ となり，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|^2=\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+(a^2-5)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^4-\frac{19}{2}a^2+25=\left(a^2-\frac{19}{4}\right)^2+\frac{39}{16}$$

したがって，$a^2=\dfrac{19}{4}\left(a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{2}\right)$ のとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right|$ は最小値 $\sqrt{\dfrac{39}{16}}=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$ をとり，

$$\mathrm{R}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{19}{4},\ 0\right),\ \mathrm{S}\left(\pm\frac{\sqrt{19}}{4},\ 5,\ \mp\frac{\sqrt{19}}{4}\right)\ \text{（複号同順）}$$

［解　説］

空間図形について，誘導の詳しい基本的な問題です。(2)は(1)の結果を利用したため，計算が少し容易になりました。

3

問題のページへ

(1)　正の整数 x, y に対して，$x^2-6xy+y^2=9$ ………$(*)$

$(*)$から，$x^2+y^2=9+6xy$ となり，x^2+y^2 は 3 の倍数である。

以下，mod3 で記すと，整数 k に対し，$k\equiv 0$ のとき $k^2\equiv 0$，$k\equiv \pm 1$ のとき $k^2\equiv 1$ となる。これより，$x^2+y^2\equiv 0$ のとき $x^2\equiv 0$ かつ $y^2\equiv 0$ であり，$x\equiv 0$ かつ $y\equiv 0$，すなわち x, y はともに 3 の倍数となる。

さて，$(*)$を満たす正の整数 x, y で，y が最小であるのは，まず $y=3$ について調べると，$(*)$は $x^2-18x+9=9$ となり，$x(x-18)=0$ から $x=18$ である。

よって，求める解は，$(x,\ y)=(18,\ 3)$ である。

(2)　漸化式 $a_{n+2}-6a_{n+1}+a_n=0$ ……①に対して，$(x,\ y)=(a_{n+1},\ a_n)$ が$(*)$を満たすならば，${a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+{a_n}^2=9$ ……②が成り立つ。このとき，①から，

$$
{a_{n+2}}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+{a_{n+1}}^2=(6a_{n+1}-a_n)^2-6(6a_{n+1}-a_n)a_{n+1}+{a_{n+1}}^2
$$

$$
=36{a_{n+1}}^2-12a_{n+1}a_n+{a_n}^2-36{a_{n+1}}^2+6a_{n+1}a_n+{a_{n+1}}^2={a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+{a_n}^2
$$

すると，②から，${a_{n+2}}^2-6a_{n+2}a_{n+1}+{a_{n+1}}^2=9$ となり，$(x,\ y)=(a_{n+2},\ a_{n+1})$ も$(*)$を満たす。

(3)　$a_1=3$，$a_2=18$ とすると，(1)から $(x,\ y)=(a_2,\ a_1)$ は，$(*)$の解である。

そして，漸化式①によって a_n $(n\geqq 3)$ を定めると，(2)から $(x,\ y)=(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…は，$(*)$の解である。

さて，ここで，$a_1=3$，$a_2=18$ と漸化式①で定められた整数の数列 $\{a_n\}$ が，正の増加数列 $(0<a_n<a_{n+1})$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　整数 a_1，a_2 は $0<a_1<a_2$ を満たしている。

(ii)　$n=l$ のとき　整数 a_l，a_{l+1} が $0<a_l<a_{l+1}$ を満たしているとすると，①から，

$$
a_{l+2}-a_{l+1}=(6a_{l+1}-a_l)-a_{l+1}=5a_{l+1}-a_l>5a_l-a_l=4a_l>0
$$

これより，整数 a_{l+1}，a_{l+2} は $0<a_{l+1}<a_{l+2}$ を満たしている。

(i)(ii)より，$0<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$ である。

したがって，$(a_2,\ a_1)$，$(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…はすべて異なることより，$(*)$の整数解 $(x,\ y)$ は無数に存在する。

［解　説］

整数と漸化式の融合問題です。(3)は $(a_2,\ a_1)$，$(a_3,\ a_2)$，$(a_4,\ a_3)$，$(a_5,\ a_4)$，…に，同じ整数の組が現れないことを示す点が重要です。なお，(1)は $y=1$，$y=2$，$y=3$ と当てはめた方がよかったかもしれません。

4

問題のページへ

(1) 正の整数 $m,\ n$ に対して，$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき，$x^m e^{-\frac{1}{n}} \leqq x^m e^{-x} \leqq x^m e^0 = x^m$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-\frac{1}{n}}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^m\,dx = \left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1}$ から，

$$\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} e^{-\frac{1}{n}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1}$$

すると，$A(m,\ n) = (m+1)n^{m+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^m e^{-x}\,dx$ から，$e^{-\frac{1}{n}} \leqq A(m,\ n) \leqq 1$ である。

(2) $n \to \infty$ のとき $e^{-\frac{1}{n}} \to e^0 = 1$ であるので，(1)から，$b_m = \displaystyle\lim_{n\to\infty} A(m,\ n) = 1$

(3) 部分積分を行うと，

$$\begin{aligned}A(m,\ n) &= (m+1)n^{m+1}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{n}} + (m+1)n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{x^{m+1}}{m+1}e^{-x}\,dx \\ &= n^{m+1}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+1} e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \\ &= e^{-\frac{1}{n}} + n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx\end{aligned}$$

(1)と同様にすると，$\displaystyle\frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+2} e^{-\frac{1}{n}} \leqq \int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{m+2}\left(\frac{1}{n}\right)^{m+2}$

$$\frac{1}{m+2}\cdot\frac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}} \leqq n^{m+1}\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \leqq \frac{1}{m+2}\cdot\frac{1}{n} \cdots\cdots\cdots(*)$$

$m \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{m+2} \to 0$ であるので，$(*)$より，$n^{m+1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} x^{m+1}e^{-x}\,dx \to 0$ となり，

$$c_n = \lim_{m\to\infty} A(m,\ n) = e^{-\frac{1}{n}}$$

［解 説］

定積分と極限の融合問題です。なお，(3)は，与えられた $A(m,\ n)$ の形から部分積分を実行しています。

5

問題のページへ

(1) 関数 $f(x)=x+\dfrac{r}{\sqrt{1+\sin^2 x}}=x+r(1+\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$ において，$r=1$ のとき，

$$f'(x)=1-\frac{1}{2}(1+\sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\sin x\cos x=1-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$$

$$=\frac{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}-\sin x\cos x}{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$$

ここで，$g(x)=\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}-\sin x\cos x$ とおくと，$1+\sin^2 x\geqq 1$ から，

$$g(x)\geqq(1+\sin^2 x)-\sin x\cos x=\left(\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)^2+1-\frac{1}{4}\cos^2 x>0$$

これより，$f'(x)>0$ となり，$f(x)$ はつねに増加する。

(2) $r>0$ において，$f'(x)=\dfrac{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}-r\sin x\cos x}{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$

(i) $\sin x\cos x\leqq 0$ のとき

任意の $r>0$ において $f'(x)>0$ となり，$f(x)$ はつねに増加する。

(ii) $\sin x\cos x>0$ のとき

$f(x)$ がつねに増加する条件は $f'(x)\geqq 0$ より，$\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}-r\sin x\cos x\geqq 0$

$$r\leqq\frac{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}{\sin x\cos x}=\sqrt{\frac{(1+\sin^2 x)^3}{\sin^2 x\cos^2 x}}=\sqrt{\frac{(1+\sin^2 x)^3}{\sin^2 x(1-\sin^2 x)}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$0<t<1$ として $h(t)=\dfrac{(1+t)^3}{t(1-t)}$ とおくと，$(*)$ は $r\leqq\sqrt{h(t)}$ となり，

$$h'(t)=\frac{3(1+t)^2 t(1-t)-(1+t)^3(1-2t)}{t^2(1-t)^2}$$

$$=\frac{(1+t)^2\{3t(1-t)-(1+t)(1-2t)\}}{t^2(1-t)^2}=-\frac{(1+t)^2(t^2-4t+1)}{t^2(1-t)^2}$$

$0<t<1$ において，$h'(t)=0$ の解は $t=2-\sqrt{3}$ となり，$h(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$\alpha=2-\sqrt{3}$ とおくと，

$$h(\alpha)=\frac{(1+\alpha)^3}{\alpha-\alpha^2}=\frac{3(1+\alpha)^2}{1-2\alpha}=\frac{3(3-\sqrt{3})^2}{-3+2\sqrt{3}}=\frac{9(4-2\sqrt{3})}{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}=\frac{18}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3}$$

すると，$h(t)\geqq 6\sqrt{3}$ となり，$r\leqq\sqrt{h(t)}$ を満たす r は $0<r\leqq\sqrt{6\sqrt{3}}$ である。

(i)(ii)より，$0<r\leqq\sqrt{6\sqrt{3}}$ のとき $f(x)$ はつねに増加する。

以上より，「$0<r<c$ のときは $f(x)$ がつねに増加する」最大の正の実数 c は $c=\sqrt{6\sqrt{3}}$ である。

［解 説］

微分と増減の問題です。導関数を計算するとややこしい式が出るタイプで，(1)では押さえ込むような処理をし，(2)では r の分離を考えて場合分けをしています。なお，計算が面倒な分数関数 $h(t)$ の極小値は，分母と分子の導関数に値を代入するという技巧的な方法を利用して求めています。