1

解答解説のページへ

円周を 12 等分するように点 A_1，A_2，A_3，…，A_{12} が時計回りに並んでいる。また, 白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を, 次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに, 黒球ならば反時計回りに, サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い, P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い, P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い, P が R から移動した点を S とおく。

(1)　$R = A_1$ となる確率を求めよ。

(2)　3 点 Q, R, S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面において，原点 O と点 $A(1,\ 0)$ と点 $B(0,\ 1)$ がある。$0<t<1$ に対し，線分 BO, OA, AB のそれぞれを $t:(1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする。

(1)　$\triangle$PQR の面積を t の式で表せ。

(2)　$\triangle$PQR が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。

(3)　$\theta=\angle$RPQ とする。(2)のそれぞれの場合に $\cos\theta$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

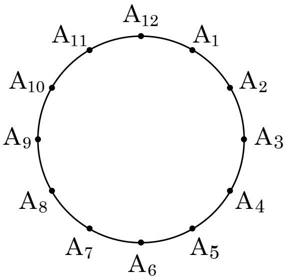
(1) a を実数とする。$y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq a \leqq 2$ とする。$S(a)$ を $y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　まず，点 P を A_1 に置き，与えられた操作を行い，P→Q，Q→R と移動して，R が A_1 に一致するのは，

(i)　P→Q と Q→R が同じ向きのとき

白 6・白 6 または黒 6・黒 6 の場合より，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{2}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{12}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{14}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

(ii)　P→Q と Q→R が逆向きのとき

整数 $k\,(1\leqq k\leqq 6)$ に対し，白 k・黒 k または黒 k・白 k の場合より，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\times 6+\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{6}\right)\times 6=\frac{48}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^2+\frac{48}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{96}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

(i)(ii)より，$R=A_1$ となる確率は，$\dfrac{14}{30}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{96}{30}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{110}{30}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{11}{108}$

(2)　$P=A_1$→Q，Q→R，R→S と移動するとき，△QRS が正三角形となる確率は，整数 $k\,(1\leqq k\leqq 6)$ に対して，

(i)　白 k・黒 4・黒 4 の場合　$\left(\dfrac{2}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times 6=\dfrac{24}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

(ii)　黒 k・白 4・白 4 の場合　$\left(\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times 6=\dfrac{8}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

(iii)　黒 k・黒 4・黒 4 の場合　$\left(\dfrac{4}{6}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times\left(\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{6}\right)\times 6=\dfrac{24}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

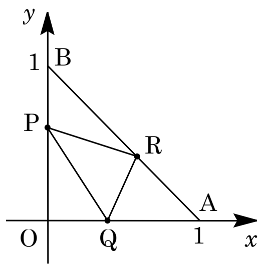
(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{24}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{8}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2+\dfrac{24}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{56}{120}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{7}{540}$

［解　説］

丁寧に数えるタイプの確率問題です。(2)では，白球が 2 個より，白 k・白 4・白 4 という場合のないことに要注意です。

2

問題のページへ



(1)　原点 O，A(1, 0)，点 B(0, 1) に対し，線分 BO, OA, AB のそれぞれを $t:(1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする。

すると，$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{AQR}=\triangle\mathrm{BPR}=t(1-t)\triangle\mathrm{OAB}$ より，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\{1-3t(1-t)\}\triangle\mathrm{OAB}=(1-3t+3t^2)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2$$

$$=\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$$

(2)　三平方の定理と余弦定理より，$\mathrm{PQ}^2=t^2+(1-t)^2=2t^2-2t+1$

$$\mathrm{QR}^2=(1-t)^2+(\sqrt{2}t)^2-2(1-t)\cdot\sqrt{2}t\cos 45^\circ=5t^2-4t+1$$

$$\mathrm{PR}^2=t^2+\{\sqrt{2}(1-t)\}^2-2t\cdot\sqrt{2}(1-t)\cos 45^\circ=5t^2-6t+2$$

(i)　$\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}$ のとき　$2t^2-2t+1=5t^2-4t+1$ より，$3t^2-2t=0$

$t(3t-2)=0$ で $0<t<1$ から，$t=\frac{2}{3}$

(ii)　$\mathrm{QR}=\mathrm{PR}$ のとき　$5t^2-4t+1=5t^2-6t+2$ より，$2t-1=0$

$0<t<1$ から，$t=\frac{1}{2}$

(iii)　$\mathrm{PR}=\mathrm{PQ}$ のとき　$5t^2-6t+2=2t^2-2t+1$ より，$3t^2-4t+1=0$

$(3t-1)(t-1)=0$ で $0<t<1$ から，$t=\frac{1}{3}$

(i)〜(iii)より，△PQR が二等辺三角形になるのは，$t=\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ のときである。

(3)　$\theta=\angle\mathrm{RPQ}$ とすると，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2-\mathrm{QR}^2}{2\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}}=\frac{(2t^2-2t+1)+(5t^2-6t+2)-(5t^2-4t+1)}{2\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}$$

$$=\frac{2t^2-4t+2}{2\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}=\frac{(1-t)^2}{\sqrt{2t^2-2t+1}\sqrt{5t^2-6t+2}}$$

(i)　$t=\frac{2}{3}$ のとき　$\cos\theta=\frac{1}{9}\div\left(\sqrt{\frac{5}{9}}\cdot\sqrt{\frac{2}{9}}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

(ii)　$t=\frac{1}{2}$ のとき　$\cos\theta=\frac{1}{4}\div\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii)　$t=\frac{1}{3}$ のとき　$\cos\theta=\frac{4}{9}\div\left(\sqrt{\frac{5}{9}}\cdot\sqrt{\frac{5}{9}}\right)=\frac{4}{5}$

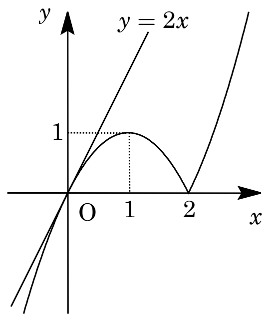
［解　説］

三角比の応用問題です。基本的な内容ですが，計算量は多めです。

3　　問題のページへ

(1)　$y=ax$ ……①，$y=x|x-2|$ ……②に対し，②から，

$$y=-x(x-2)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1\quad(x<2)\ \cdots\cdots ③$$
$$y=x(x-2)=x^2-2x=(x-1)^2-1\quad(x\geqq 2)\ \cdots\cdots ④$$



③より，$y'=-2x+2$ なので，$x=0$ における微分係数は $y'=2$，すなわち原点における接線の傾きは 2 となる。

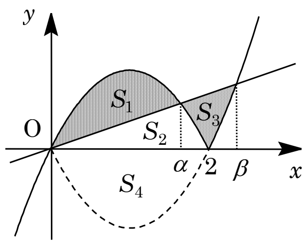
すると，右図から，①と②の共有点の個数は，$a<0$ のとき 1 個，$a=0$ のとき 2 個，$0<a<2$ のとき 3 個，$a=2$ のとき 2 個，$a>2$ のとき 3 個となる。

よって，共有点の個数が最大なのは 3 個で，このとき，

$$0<a<2,\ a>2$$

(2)　$0\leqq a\leqq 2$ のとき，①と③の $x\neq 0$ の交点は，

$$-x^2+2x=ax\ ,\ x=2-a$$



また，①と④の $x\neq 0$ の交点は，

$$x^2-2x=ax\ ,\ x=2+a$$

ここで，$\alpha=2-a$，$\beta=2+a$ とおき，右図の各領域の面積を S_1，S_2，S_3，S_4 とすると，①と②で囲まれる図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=S_1+S_3=S_1+\{(S_1+S_2+S_3+S_4)-2S_4\}$$
$$=2S_1+(S_2+S_3+S_4)-2S_4$$
$$=2\int_0^{\alpha}-x(x-\alpha)dx+\int_0^{\beta}-x(x-\beta)dx-2\int_0^{2}-x(x-2)dx$$
$$=2\cdot\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{6}\beta^3-2\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{1}{3}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\frac{4}{3}$$

(3)　$S'(a)=-\dfrac{1}{2}a^2+6a-2=-\dfrac{1}{2}(a^2-12a+4)$

すると，$S'(a)=0$ の解が $a=6\pm 4\sqrt{2}$ より，$0\leqq a\leqq 2$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

したがって，$a=6-4\sqrt{2}$ のとき $S(a)$ は最小値をとる。

［解　説］

定積分と面積についての超頻出問題です。(2)の積分は普通に計算してもよいのですが，解答例では公式処理をしました。パズルのようですが。