1

解答解説のページへ

袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

　袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1)　$n=2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ。

(2)　$n=4$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。

(3)　$n=10$ の場合，総得点が 8 点以上となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

座標平面上に曲線$C : y = \dfrac{1}{x}$および3点A$(-1,\ -1)$，B$(-1,\ 0)$，D$(1,\ 0)$がある。曲線 C 上の点P$\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$に対して，直線 AP と直線$y = -2$の交点を Q とする。ただし，P が A と等しいとき，直線 AP とは A における C の接線のこととする。また，直線BQに点Dから下ろした垂線と直線BQの交点をRとする。

(1)　点Pが曲線 C 上を動くとき，点Rの軌跡を求めよ。

(2)　直線PRが原点を通るような実数 t の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　$w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。z を 0 でない複素数とするとき，次の等式を証明せよ。

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^5-\frac{1}{z^5}$$

(2)　ある定数 C に対して，等式

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=C\sin 5\theta$$

がすべての実数 θ で成り立つことを示せ。また，C の値を求めよ。

(3)　$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

2 曲線$C_1 : y=e^{ax}$，$C_2 : y=a\log x+b$は，x 座標がt $(0<t<1)$の点で接していて，$a\neq 0$であるとする。ただし，2 曲線が点 P で接するとは，P を共有し，P における接線が一致することである。

(1)　aおよびbをtの式で表せ。

(2)　曲線C_1と x 軸，y 軸および直線$x=t$で囲まれた部分の面積を$S_1(t)$とする。極限値$\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_1(t)$を求めよ。

(3)　曲線C_2と x 軸および直線$x=t$で囲まれた部分の面積を$S_2(t)$とする。極限値$\displaystyle\lim_{t\to 1-0} S_2(t)$を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

多項式 $f_n(x)$，$g_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を条件 $f_1(x)=x$，$g_1(x)=1$，

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x),\quad g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x)$$

で定める。

(1)　正の整数 n に対して，等式

$$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x),\quad \{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)$$

が成り立つことを示し，多項式 $f_n(x)$ の次数を求めよ。

(2)　正の整数 n に対して，区間 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において等式

$$\sin n\theta=f_n(\tan\theta)\cos^n\theta,\quad \cos n\theta=g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

が成り立つことを示せ。

(3)　正の整数 n と実数 a に対して，方程式 $f_n(x)=ag_n(x)$ の異なる実数解の個数を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　題意のゲームを行ったとき，白球で 1 点獲得するのを「白 1」，黒球で 1 点獲得するのを「黒 1」，黒球で点を獲得しないのを「黒 0」と表す。

さて，2 回ゲームを行い，総得点が 2 点となる確率は，

(i)　白 1→白 1 のとき　$\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{2}{9}$

(ii)　白 1→黒 1 のとき　$\dfrac{5}{10}\times\left(\dfrac{5}{9}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{54}$

(iii) 黒 1→白 1 のとき　$\left(\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{54}$

(iv) 黒 1→黒 1 のとき　$\left(\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{81}$

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{54}\times2+\dfrac{2}{81}=\dfrac{35}{81}$ となる。

(2)　(i)　4 回ゲームを行い，総得点が 0 点となるとき

黒 0→黒 0→黒 0→黒 0 の場合より，その確率は，

$$\left(\frac{5}{10}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{7\times3^5}$$

(ii)　4 回ゲームを行い，総得点が 1 点となるとき

(ii-i)　白 1 が 1 回，黒 0 が 3 回のとき

白 1→黒 0→黒 0→黒 0，黒 0→白 1→黒 0→黒 0，黒 0→黒 0→白 1→黒 0，黒 0→黒 0→黒 0→白 1 の場合より，その確率は，

$$\frac{5}{10}\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}\right)\times4=\frac{40}{7\times3^4}$$

(ii-ii)　黒 1 が 1 回，黒 0 が 3 回のとき

黒 1→黒 0→黒 0→黒 0，黒 0→黒 1→黒 0→黒 0，黒 0→黒 0→黒 1→黒 0，黒 0→黒 0→黒 0→黒 1 の場合より，その確率は，

$$\left(\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{7}\times\frac{2}{3}\right)\times4=\frac{16}{7\times3^5}$$

(i)(ii)より，総得点が 1 点以下の確率は，$\dfrac{8}{7\times3^5}+\dfrac{40}{7\times3^4}+\dfrac{16}{7\times3^5}=\dfrac{144}{7\times3^5}=\dfrac{16}{189}$

以上より，4 回ゲームを行い，総得点が 2 点以上となる確率は，

$$1-\frac{16}{189}=\frac{173}{189}$$

(3)　(i)　10 回ゲームを行い，総得点が 8 点となるとき

白 1 が 5 回，黒 1 が 3 回，黒 0 が 2 回より，その確率は，

$$\frac{5!}{{}_{10}\mathrm{P}_5}\cdot\frac{5!}{{}_5\mathrm{P}_5}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{10!}{5!3!2!}=\frac{40}{3^5}$$

(ii)　10 回ゲームを行い，総得点が 9 点となるとき

白 1 が 5 回，黒 1 が 4 回，黒 0 が 1 回より，その確率は，

$$\frac{5!}{{}_{10}\mathrm{P}_5}\cdot\frac{5!}{{}_{5}\mathrm{P}_5}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{10!}{5!4!1!}=\frac{10}{3^5}$$

(iii) 10 回ゲームを行い，総得点が 10 点となるとき

白 1 が 5 回，黒 1 が 5 回より，その確率は，

$$\frac{5!}{{}_{10}\mathrm{P}_5}\cdot\frac{5!}{{}_{5}\mathrm{P}_5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\times\frac{10!}{5!5!}=\frac{1}{3^5}$$

(i)～(iii)より, 10 回ゲームを行い，総得点が 8 点以上となる確率は,

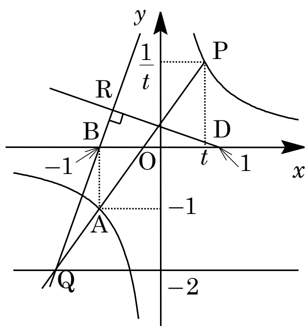
$$\frac{40}{3^5}+\frac{10}{3^5}+\frac{1}{3^5}=\frac{17}{81}$$

［解 説］

基本的な確率の問題で，最も要求されるのは注意力です。なお，(2)(3)の解答例については，場合分けをまとめて記しています。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　3 点 $A(-1,\ -1)$，$B(-1,\ 0)$，$D(1,\ 0)$，および曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ ……①上の点 $P\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ に対して，

$t\neq -1$ のとき，直線 AP は，傾きが $\dfrac{\frac{1}{t}+1}{t+1}=\dfrac{1}{t}$ より，

$$y+1=\frac{1}{t}(x+1)\text{………②}$$

また，$t=-1$ のとき，点 A における接線の傾きは，①より $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ なので $-\dfrac{1}{(-1)^2}=-1$ となる。これより，接線の方程式は，$y+1=-(x+1)$ となり，②に $t=-1$ をあてはめた式と一致する。

よって，直線 AP の方程式は t の値にかかわらず②で表せ，直線 $y=-2$ との交点 Q は，$-2+1=\dfrac{1}{t}(x+1)$ から $x=-t-1$ となり，$Q(-t-1,\ -2)$ である。

次に，直線 BQ の方程式は，$y=\dfrac{-2}{-t-1+1}(x+1)$ より，$y=\dfrac{2}{t}(x+1)$ ………③

点 D から直線 BQ に下ろした垂線の方程式は，$y=-\dfrac{t}{2}(x-1)$ ………④

直線③と④の交点 R の軌跡の方程式は，③④から t を消去すると，

$$y^2=-(x+1)(x-1)\text{，}\ x^2+y^2=1$$

なお，直線③は，点 B を通る直線のうち $x=-1$ と $y=0$ は表さない。直線④は，点 D を通る直線のうち $x=1$ と $t\neq 0$ から $y=0$ は表さない。これより，直線③と④の交点 R が点 $(-1,\ 0)$，$(1,\ 0)$ である $t\neq 0$ は存在しないことより，点 R の軌跡は，

$$\text{円}: x^2+y^2=1\ \ (2\text{ 点}(-1,\ 0),\ (1,\ 0)\text{ は除く})$$

(2)　③④を連立すると，$\dfrac{2}{t}(x+1)=-\dfrac{t}{2}(x-1)$ となり，$4(x+1)+t^2(x-1)=0$ から，

$$(t^2+4)x=t^2-4\text{，}\ x=\frac{t^2-4}{t^2+4}$$

④から，$y=-\dfrac{t}{2}\left(\dfrac{t^2-4}{t^2+4}-1\right)=-\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{-8}{t^2+4}=\dfrac{4t}{t^2+4}$

これより $R\left(\dfrac{t^2-4}{t^2+4},\ \dfrac{4t}{t^2+4}\right)$ となり，直線 PR が原点を通る条件は $\overrightarrow{OP}\parallel\overrightarrow{OR}$ から，

$$t\cdot\frac{4t}{t^2+4}-\frac{1}{t}\cdot\frac{t^2-4}{t^2+4}=0\text{，}\ 4t^3-t^2+4=0\text{ ………⑤}$$

ここで，$f(t)=4t^3-t^2+4$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-2t=2t(6t-1)$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，

$$f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{54}-\frac{1}{36}+4>0$$

t	…	0	…	$\frac{1}{6}$	…
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	4	↘		↗

よって，$f(t)=0$ すなわち⑤の $t\neq 0$ の実数解は 1 つとなり，直線 PR が原点を通るような実数 t の個数は 1 である。

［解 説］

軌跡に微分の応用を融合した問題です。(1)については，軌跡が線分 BD を直径とする円というのは，$\mathrm{BR}\perp\mathrm{DR}$ から明らかです。ただ，(2)の設問を考え合わせて，数式を用いた処理をしています。

3

問題のページへ

(1)　$w=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ に対して，$w^5=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ ……①となり，

$$w^5-1=0,\ (w-1)(w^4+w^3+w^2+w+1)=0$$

$w\neq 1$ から，$w^4+w^3+w^2+w+1=0$ ………②

さて，$P=\left(wz-\dfrac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\dfrac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\dfrac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\dfrac{1}{w^4z}\right)$ とおくと，①②から，

$$\begin{aligned}P&=\left(wz-\frac{w^4}{z}\right)\left(w^2z-\frac{w^3}{z}\right)\left(w^3z-\frac{w^2}{z}\right)\left(w^4z-\frac{w}{z}\right)\\&=\left(w^5z^2-w^2-w^8+\frac{w^5}{z^2}\right)\left(w^5z^2-w^4-w^6+\frac{w^5}{z^2}\right)\\&=\left(z^2+\frac{1}{z^2}-w^2-w^3\right)\left(z^2+\frac{1}{z^2}-w^4-w\right)\\&=\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2-(w^2+w^3+w^4+w)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(w^2+w^3)(w^4+w)\\&=z^4+2+\frac{1}{z^4}-(w+w^2+w^3+w^4)\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(w^6+w^3+w^7+w^4)\\&=z^4+2+\frac{1}{z^4}+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)+(w+w^3+w^2+w^4)=z^4+z^2+1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}\end{aligned}$$

すると，$\left(z-\dfrac{1}{z}\right)P=\left(z-\dfrac{1}{z}\right)\left(z^4+z^2+1+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^4}\right)=z^5-\dfrac{1}{z^5}$ となり，

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(wz-\frac{1}{wz}\right)\left(w^2z-\frac{1}{w^2z}\right)\left(w^3z-\frac{1}{w^3z}\right)\left(w^4z-\frac{1}{w^4z}\right)=z^5-\frac{1}{z^5}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$\dfrac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ から $z-\dfrac{1}{z}=2i\sin\theta$

$$z^5-\frac{1}{z^5}=\cos 5\theta+i\sin 5\theta-(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)=2i\sin 5\theta$$

同様に，$w^kz=\cos\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\theta+\dfrac{2k\pi}{5}\right)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ から，

$$w^kz-\frac{1}{w^kz}=2i\sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{5}\right)$$

これらの式を①に代入すると，

$$(2i)^5\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=2i\sin 5\theta$$

$$\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{2\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{4\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{6\pi}{5}\right)\sin\left(\theta+\frac{8\pi}{5}\right)=\frac{1}{16}\sin 5\theta\ \cdots\cdots②$$

よって，$C=\dfrac{1}{16}$ となる。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{10}$ とすると，$\theta+\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\pi}{2}$，$\theta+\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{9\pi}{10}$，$\theta+\dfrac{6\pi}{5}=\dfrac{13\pi}{10}$，$\theta+\dfrac{8\pi}{5}=\dfrac{17\pi}{10}$

②より，$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{9\pi}{10}\sin\dfrac{13\pi}{10}\sin\dfrac{17\pi}{10}=\dfrac{1}{16}\sin\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{9\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}\sin\frac{17\pi}{10}=\frac{1}{16}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\sin\dfrac{9\pi}{10}=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{10}\right)=\sin\dfrac{\pi}{10}$，$\sin\dfrac{13\pi}{10}=\sin\left(\pi+\dfrac{3\pi}{10}\right)=-\sin\dfrac{3\pi}{10}$，$\sin\dfrac{17\pi}{10}=\sin\left(2\pi-\dfrac{3\pi}{10}\right)=-\sin\dfrac{3\pi}{10}$なので，③から，

$$\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{16}$$

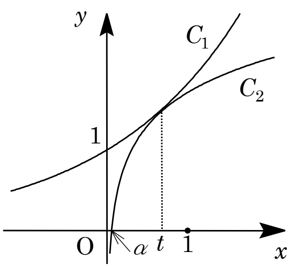
すると，$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}>0$なので，$\sin\dfrac{\pi}{10}\sin\dfrac{3\pi}{10}=\dfrac{1}{4}$となる。

［解 説］

極形式の複素数の計算と三角関数を融合した問題です。誘導が細かいので方針に迷いはないでしょうが，ただ記述量にはかなりのものです。

4

問題のページへ



(1)　2 曲線 $C_1 : y = e^{ax}$ ……①と $C_2 : y = a\log x + b$ ……②は，x 座標が $t\ (0 < t < 1)$ の点で接している。①から $y' = ae^{ax}$，②から $y' = \dfrac{a}{x}$ なので，

$$e^{at} = a\log t + b \cdots\cdots\cdots ③,\quad ae^{at} = \frac{a}{t} \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，$a \neq 0$ なので $e^{at} = \dfrac{1}{t}$ から，$a = -\dfrac{\log t}{t}$ ………⑤

③に代入すると，$\dfrac{1}{t} = -\dfrac{(\log t)^2}{t} + b$ となり，$b = \dfrac{(\log t)^2 + 1}{t}$ ………⑥

(2)　C_1 と x 軸，y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 $S_1(t)$ は，

$$S_1(t) = \int_0^t e^{ax}dx = \Big[\frac{1}{a}e^{ax}\Big]_0^t = \frac{1}{a}(e^{at} - 1) = -\frac{t}{\log t}\Big(\frac{1}{t} - 1\Big) = \frac{t-1}{\log t}$$

ここで，$f(t) = \log t$ とおくと，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\frac{\log t}{t-1} = \lim_{t\to 1-0}\frac{f(t) - f(1)}{t-1} = f'(1)$ から，

$$\lim_{t\to 1-0} S_1(t) = \frac{1}{f'(1)} = 1$$

(3)　まず，C_2 と x 軸が $x = \alpha$ で交わるとすると，$a\log\alpha + b = 0$ となり，⑤⑥から，

$$\log\alpha = -\frac{b}{a} = \frac{(\log t)^2 + 1}{\log t},\quad \alpha = e^{\frac{(\log t)^2+1}{\log t}}$$

すると，C_2 と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 $S_2(t)$ は，

$$\begin{aligned}
S_2(t) &= \int_\alpha^t (a\log x + b)\,dx = \Big[a(x\log x - x) + bx\Big]_\alpha^t \\
&= at\log t - a\alpha\log\alpha + (b-a)(t-\alpha) \\
&= -\frac{\log t}{t}\cdot t\log t + \frac{\log t}{t}\cdot\frac{(\log t)^2+1}{\log t}\alpha + \Big\{\frac{(\log t)^2+1}{t} + \frac{\log t}{t}\Big\}(t-\alpha) \\
&= -(\log t)^2 + \frac{(\log t)^2+1}{t}\alpha + (\log t)^2 + \log t + 1 - \frac{(\log t)^2 + \log t + 1}{t}\alpha \\
&= -\frac{\log t}{t}\alpha + \log t + 1
\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\frac{\log t}{t} = 0$，$\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\frac{(\log t)^2+1}{\log t} = -\infty$ より $\displaystyle\lim_{t\to 1-0}\alpha = 0$ となるので，

$$\lim_{t\to 1-0} S_2(t) = 0 + 0 + 1 = 1$$

［解　説］

面積計算と極限の融合問題です。(3)では，計算力が問われています。

5

問題のページへ

(1)　多項式 $f_n(x)$，$g_n(x)$ に対して，$f_1(x)=x$，$g_1(x)=1$

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+xg_n(x)\cdots\cdots①,\ g_{n+1}(x)=g_n(x)-xf_n(x)\cdots\cdots②$$

①より，$f_2(x)=f_1(x)+xg_1(x)=x+x\cdot 1=2x$

②より，$g_2(x)=g_1(x)-xf_1(x)=1-x\cdot x=1-x^2$

このとき，等式 $\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x)$，$\{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$\{f_2(x)\}'=2=(1+1)g_1(x)$，$\{g_2(x)\}'=-2x=-(1+1)f_1(x)$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$\{f_{k+1}(x)\}'=(k+1)g_k(x)$，$\{g_{k+1}(x)\}'=-(k+1)f_k(x)$ の成立を仮定する。

①から，$f_{k+2}(x)=f_{k+1}(x)+xg_{k+1}(x)$ となり，

$$\begin{aligned}\{f_{k+2}(x)\}'&=\{f_{k+1}(x)\}'+g_{k+1}(x)+x\{g_{k+1}(x)\}'\\&=(k+1)g_k(x)+g_{k+1}(x)-(k+1)xf_k(x)\\&=(k+1)g_{k+1}(x)+g_{k+1}(x)=(k+2)g_{k+1}(x)\end{aligned}$$

②から，$g_{k+2}(x)=g_{k+1}(x)-xf_{k+1}(x)$ となり，

$$\begin{aligned}\{g_{k+2}(x)\}'&=\{g_{k+1}(x)\}'-f_{k+1}(x)-x\{f_{k+1}(x)\}'\\&=-(k+1)f_k(x)-f_{k+1}(x)-(k+1)xg_k(x)\\&=-(k+1)f_{k+1}(x)-f_{k+1}(x)=-(k+2)f_{k+1}(x)\end{aligned}$$

これより，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$\{f_{n+1}(x)\}'=(n+1)g_n(x)\cdots\cdots③$，$\{g_{n+1}(x)\}'=-(n+1)f_n(x)\cdots\cdots④$

次に，$f_n(x)$，$g_n(x)$ の次数をそれぞれ p_n，q_n とおくと，③④より，

$$p_{n+1}-1=q_n\cdots\cdots\cdots⑤,\ q_{n+1}-1=p_n\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤＋⑥より，$p_{n+1}+q_{n+1}=p_n+q_n+2$ となり，

$$p_n+q_n=(p_1+q_1)+2(n-1)=(1+0)+2n-2=2n-1\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤－⑥より，$p_{n+1}-q_{n+1}=-(p_n-q_n)$ となり，

$$p_n-q_n=(p_1-q_1)(-1)^{n-1}=(1-0)(-1)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より，$2p_n=2n-1+(-1)^{n-1}$ となり，$p_n=\dfrac{2n-1+(-1)^{n-1}}{2}$

よって，n が奇数のとき $p_n=n$，n が偶数のとき $p_n=n-1$ である。

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin n\theta=f_n(\tan\theta)\cos^n\theta$，$\cos n\theta=g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$f_1(\tan\theta)\cos\theta=\tan\theta\cos\theta=\sin\theta$，$g_1(\tan\theta)\cos\theta=1\cdot\cos\theta=\cos\theta$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき

$\sin k\theta = f_k(\tan\theta)\cos^k\theta$，$\cos k\theta = g_k(\tan\theta)\cos^k\theta$ の成立を仮定すると，

$$\begin{aligned} f_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta &= \{f_k(\tan\theta)+\tan\theta\cdot g_k(\tan\theta)\}\cos^k\theta\cos\theta \\ &= \sin k\theta\cos\theta+\tan\theta\cos k\theta\cos\theta \\ &= \sin k\theta\cos\theta+\cos k\theta\sin\theta=\sin(k+1)\theta \\ g_{k+1}(\tan\theta)\cos^{k+1}\theta &= \{g_k(\tan\theta)-\tan\theta\cdot f_k(\tan\theta)\}\cos^k\theta\cos\theta \\ &= \cos k\theta\cos\theta-\tan\theta\sin k\theta\cos\theta \\ &= \cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta=\cos(k+1)\theta \end{aligned}$$

これより，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$\sin n\theta = f_n(\tan\theta)\cos^n\theta$，$\cos n\theta = g_n(\tan\theta)\cos^n\theta$

(3)　方程式 $f_n(x)=ag_n(x)$ ……⑨に対して，$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$f_n(\tan\theta)=ag_n(\tan\theta)，\ f_n(\tan\theta)\cos^n\theta=ag_n(\tan\theta)\cos^n\theta$$

(2)の結論から，$\sin n\theta=a\cos n\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

すると，$\sin n\theta-a\cos n\theta=0$ より，$\sqrt{1+a^2}\sin(n\theta+\alpha)=0$ となり，

$$\sin(n\theta+\alpha)=0\left(\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}，\ \sin\alpha=-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right)\cdots\cdots⑩$$

ここで，⑨を満たす x と⑩を満たす θ は 1 対 1 の対応をするので，⑨の異なる実数解の個数は⑩の異なる実数解の個数に一致する。

さて，⑩の解は $n\theta+\alpha=k\pi$ (k は整数)と表され，$-\frac{n\pi}{2}+\alpha<n\theta+\alpha<\frac{n\pi}{2}+\alpha$ に注意すると，$-\frac{n\pi}{2}+\alpha<k\pi<\frac{n\pi}{2}+\alpha$ から $-\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{\pi}<k<\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{\pi}$ となり，

$$m<k<M\left(m=-\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{\pi}，\ M=\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{\pi}\right)\cdots\cdots⑪$$

(i)　$a>0$ のとき　⑩から $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ なので，$-\frac{1}{2}<\frac{\alpha}{\pi}<0$ となり，

$$-\frac{n+1}{2}<m<-\frac{n}{2}，\ \frac{n-1}{2}<M<\frac{n}{2}$$

(a)　n が奇数のとき　⑪を満たす k は $-\frac{n-1}{2}\leqq k\leqq\frac{n-1}{2}$ となり，その個数は，

$$\frac{n-1}{2}-\left(-\frac{n-1}{2}\right)+1=n$$

(b)　n が偶数のとき　⑪を満たす k は $-\frac{n}{2}\leqq k\leqq\frac{n}{2}-1$ となり，その個数は，

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)-\left(-\frac{n}{2}\right)+1=n$$

(ii)　$a<0$ のとき　⑩から $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ なので，$0<\frac{\alpha}{\pi}<\frac{1}{2}$ となり，

$$-\frac{n}{2}<m<-\frac{n-1}{2}，\ \frac{n}{2}<M<\frac{n+1}{2}$$

(a)　n が奇数のとき　⑪を満たす k は $-\dfrac{n-1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{n-1}{2}$ となり，その個数は，

$\dfrac{n-1}{2}-\left(-\dfrac{n-1}{2}\right)+1=n$

(b)　n が偶数のとき　⑪を満たす k は $-\dfrac{n}{2}+1 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2}$ となり，その個数は，

$\dfrac{n}{2}-\left(-\dfrac{n}{2}+1\right)+1=n$

(iii)　$a=0$ のとき　⑩から $\alpha=0$ となり，⑪から $-\dfrac{n}{2}<k<\dfrac{n}{2}$

(a)　n が奇数のとき　⑪を満たす k は $-\dfrac{n-1}{2} \leqq k \leqq \dfrac{n-1}{2}$ となり，その個数は，

$\dfrac{n-1}{2}-\left(-\dfrac{n-1}{2}\right)+1=n$

(b)　n が偶数のとき　⑪を満たす k は $-\dfrac{n}{2}+1 \leqq k \leqq \dfrac{n}{2}-1$ となり，その個数は，

$\left(\dfrac{n}{2}-1\right)-\left(-\dfrac{n}{2}+1\right)+1=n-1$

(i)～(iii)より，方程式⑨の異なる実数解の個数は，

$a=0$ かつ n が偶数のときは $n-1$ 個，このとき以外は n 個

［解　説］

関数列についての論証に，その結論を利用した方程式の問題を加えたものです。そのため，実質 2 題分のボリュームがあります。