1　　解答解説のページへ

t を実数とし，不等式

$$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2)\leqq 0\,,\ \ t\leqq x\leqq t+1$$

の表す xy 平面上の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。t が $1\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

四面体 ABCD において，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ が成り立っている。三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　$\angle\mathrm{BDC}$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3)　$n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

4

解答解説のページへ

a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

複素数平面上で複素数 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1, B_0, B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が表す複素数を z_n とする。

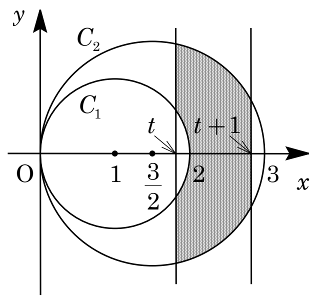
(1)　複素数 z_3 を求めよ。

(2)　複素数 z_6 を求めよ。

(3)　正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

1

問題のページへ



不等式$(x^2-2x+y^2)(x^2-3x+y^2)\leqq 0$に対して，

$$\{(x-1)^2+y^2-1\}\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2-\frac{9}{4}\right\}\leqq 0 \cdots\cdots ①$$

領域①に対して，その境界線を$C_1:(x-1)^2+y^2=1$，$C_2:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$とする。また，不等式$t\leqq x\leqq t+1$ $(1\leqq t\leqq 2)$ ……②に対して，①かつ②で表される領域を図示すると，右図の網点部になる。

さて，この網点部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を$V(t)$とすると，$C_1:y^2=1-(x-1)^2=-x^2+2x$，$C_2:y^2=\frac{9}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=-x^2+3x$ より，

$$\begin{aligned}V(t)&=\pi\int_t^{t+1}(-x^2+3x)\,dx-\pi\int_t^2(-x^2+2x)\,dx\\&=\pi\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_t^{t+1}-\pi\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_t^2\\&=\pi\left\{-\frac{1}{3}(3t^2+3t+1)+\frac{3}{2}(2t+1)+\frac{1}{3}(8-t^3)-(4-t^2)\right\}\\&=\pi\left(-\frac{t^3}{3}+2t-\frac{1}{6}\right)\end{aligned}$$

これより，$V'(t)=\pi(-t^2+2)$ となり，$1\leqq t\leqq 2$における$V(t)$の増減は右表のようになる。すると，$V(t)$の最大値は，

t	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$V'(t)$		+	0	−	
$V(t)$		↗		↘	

$$V(\sqrt{2})=\left(-\frac{2}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\frac{1}{6}\right)\pi=\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{6}\right)\pi$$

［解　説］

回転体の体積を題材とした微積分の総合問題です。計算は標準的なものです。

2

問題のページへ

(1)　四面体 ABCD において，$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

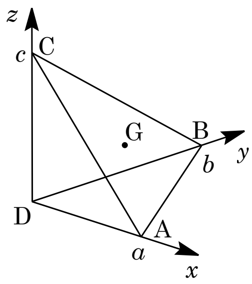
条件より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$ なので，$(*)$から，

$$\mathrm{AD}^2+\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{BD}^2$$

すると，$\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BC}^2$，$\mathrm{AD}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{AC}^2$ となり，

$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{ADC}=90^\circ$

(2)　$\mathrm{DA}=a$，$\mathrm{DB}=b$，$\mathrm{DC}=c$ とすると，(1)から，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 0)$ として，$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ とおくことができる。すると，△ABC の重心は $\mathrm{G}\left(\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$ となり，



$$\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}=\sqrt{(a^2+b^2)+c^2}$$

$$\mathrm{DG}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

よって，$\dfrac{\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{CD}^2}}{\mathrm{DG}}=3$ である。

［解　説］

図形の計量の問題です。ポイントは三平方の定理$(*)$だけで，これによって，座標系の設定という方針が，自然に湧き出てくると思われます。

3

問題のページへ

(1)　1 から 5 までカードが 1 枚ずつ入っている袋の中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返し，n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とする。

すると，以下，mod3 で記すと，$a_n\equiv 0$ となる確率は $\dfrac{1}{5}$，$a_n\equiv 1$ となる確率は $\dfrac{2}{5}$，$a_n\equiv 2$ となる確率は $\dfrac{2}{5}$ である。そして，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とするとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

まず，$S_2=a_1+a_2$ が初めて 3 の倍数になるのは，$a_1\equiv 1$ のときは $a_2\equiv 2$ のときだけ，$a_1\equiv 2$ のときは $a_2\equiv 1$ のときだけであるので，

$$p_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$$

次に，$S_3=a_1+a_2+a_3$ が初めて 3 の倍数になるのは，$a_1\equiv 1$ のときは，$(a_2\equiv 0$ かつ $a_3\equiv 2)$ または $(a_2\equiv 1$ かつ $a_3\equiv 1)$，$a_1\equiv 2$ のときは，$(a_2\equiv 0$ かつ $a_3\equiv 1)$ または $(a_2\equiv 2$ のときは $a_3\equiv 2)$ であるので，

$$p_3=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$$
$$=\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{24}{125}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，S_1，S_2，S_3，$\cdots$，S_{n-1} がいずれも 3 の倍数でない確率は，(1)と同様に考えると，$\left(\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\right)\times\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\right)^{n-2}=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-2}$ となる。

これより，S_n が初めて 3 の倍数になる確率 p_n は，

$$p_n=\frac{4}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$

(3)　$n\geqq 4$ とき，S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であるのは，$a_1\equiv 1$ のときは $a_2\equiv 1$ で $a_3=5$，$a_1\equiv 2$ のときは $a_2\equiv 0$ で $a_3=5$ の場合より，この確率 r_3 は，

$$r_3=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{125}$$

S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であり，S_n が初めて 3 の倍数になる確率は，

$$r_3\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{625}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}$$

これより，S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n は，

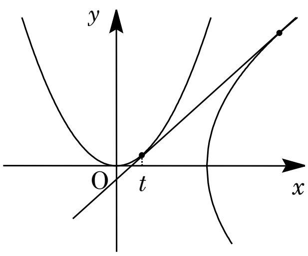
$$q_n=\frac{12}{625}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}\div\frac{6}{125}=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-4}$$

［解　説］

記述しにくいタイプの確率問題です。なお，(3)では r_3 の値は不要でした。

4

問題のページへ



放物線 $y=x^2$ ……①，$x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ ……②に対して，①上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ から，

$$y-t^2=2t(x-t),\ \ y=2tx-t^2\ \cdots\cdots③$$

ここで，$t=0$ のときは③は $y=0$ となり，放物線②に接しないので，$t\neq 0$ のもとで，②③を連立して，

$$\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}=\frac{y}{2t}+\frac{t}{2},\ \ 2ty^2-2ay-2at^2+3a^2t=0\ \cdots\cdots④$$

④が重解をもつことより，$D/4=a^2-2t(-2at^2+3a^2t)=0$ となり，$a\neq 0$ から，

$$a-2t(-2t^2+3at)=0,\ \ 4t^3-6at^2+a=0\ \cdots\cdots⑤$$

すると，①②にともに接する接線が 3 本存在する条件は，⑤が $t\neq 0$ の異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので，$f(t)=4t^3-6at^2+a$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-12at=12t(t-a)$$

すると，$f(0)=a\neq 0$ より，求める条件は，$f(0)f(a)<0$ であり，

$$a(4a^3-6a^3+a)<0,\ \ a^2(2a^3-1)>0$$

よって，求める条件は，$a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a$ である。

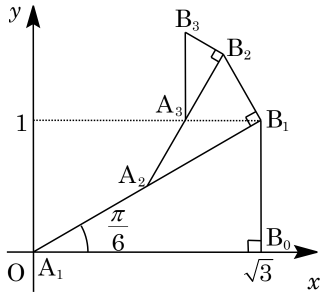
［解　説］

共通接線についての頻出題です。計算は穏やかです。

5

問題のページへ

(1) 複素数平面上で $A_1(0)$，$B_0(\sqrt{3})$，$B_1(\sqrt{3}+i)$ とし，点 A_2 は線分 A_1B_1 の中点，点 B_2 は直線 A_1B_1 に関して点 B_0 の反対側で，$\triangle A_2B_1B_2$ が $\triangle A_1B_0B_1$ と相似になる。



$\angle B_2A_2B_1=\dfrac{\pi}{6}$ で，$A_1A_2:A_2A_3=1:\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}=1:\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から，$\overrightarrow{A_2A_3}$ は $\overrightarrow{A_1A_2}$ を $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転し，大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものになる。

ここで，$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ とおくと，

$$z_3-z_2=\alpha(z_2-z_1),\quad z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)$$

さらに，$z_1=0$，$z_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}=\sqrt{3}\alpha$ であることに注意すると，

$$z_3=\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\alpha^2=\sqrt{3}\alpha(1+\alpha)=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}+i$$

(2) (1)と同様に考えると，一般的に，$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)$ となり，

$$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=(\sqrt{3}\alpha-0)\alpha^{n-1}=\sqrt{3}\alpha^n$$

すると，$n\geqq 2$ において，$\alpha\neq 1$ から，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{3}\alpha^k=0+\frac{\sqrt{3}\alpha(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha-1}=\sqrt{3}\cdot\frac{\alpha^n-\alpha}{\alpha-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$z_6=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\alpha^6-\alpha}{\alpha-1}$ となり，$\alpha^6=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^6(\cos\pi+i\sin\pi)=-\dfrac{1}{27}$ なので，

$$\alpha^6-\alpha=-\frac{1}{27}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=-\frac{29}{54}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

また，$\alpha-1=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i\right)-1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ から，

$$z_6=\sqrt{3}\cdot\frac{-\frac{29}{9}-\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(-\frac{29}{9}-\sqrt{3}i\right)(-3-\sqrt{3}i)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{29}{3}+\frac{29}{9}\sqrt{3}i+3\sqrt{3}i-3\right)=\frac{5}{9}\sqrt{3}+\frac{14}{9}i$$

(3) 正の整数 m に対して，$(*)$から $z_{6m}=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\alpha^{6m}-\alpha}{\alpha-1}$ となり，$\alpha^{6m}=\left(-\dfrac{1}{27}\right)^m$ より，

$$\alpha^{6m}-\alpha=\left(-\frac{1}{27}\right)^m-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)=\left(-\frac{1}{27}\right)^m-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$z_{6m}=\sqrt{3}\cdot\frac{6\left(-\frac{1}{27}\right)^m-3-\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{6\left(-\frac{1}{27}\right)^m-3-\sqrt{3}i\right\}(-3-\sqrt{3}i)$$

そこで，z_{6m} の実部を $\mathrm{Re}(z^{6m})$，虚部を $\mathrm{Im}(z^{6m})$ とおくと，

$$\mathrm{Re}(z^{6m})=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{-18\left(-\frac{1}{27}\right)^m+9-3\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

$$\mathrm{Im}(z^{6m})=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{-6\sqrt{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^m+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right\}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

［解　説］

図形絡みの複素数と数列の融合問題で，頻出タイプのものです。とりたてて工夫もせずに数値計算をしましたが，かなり難儀しました。なお，(2)では(3)の設問をみて，まず一般的に解く方法を採っています。