1

解答解説のページへ

袋の中に 1 から 5 までの整数が書かれたカードが 1 枚ずつ入っている。その中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返す。n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とし，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n を求めよ。

(3)　$n \geqq 4$ とする。S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3 = 5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

a は 0 でない定数とする。2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ の両方に接する直線がちょうど 3 本となるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数平面上で複素数 0, $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+i$ を表す点をそれぞれ A_1, B_0, B_1 とする。正の整数 n に対して，点 A_{n+1} は線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の中点とし，点 B_{n+1} は直線 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ に関して点 B_{n-1} の反対側にあり，三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$ が三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1$ と相似になるものとする。点 A_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が表す複素数を z_n とする。

(1)　複素数 z_3 を求めよ。

(2)　複素数 z_6 を求めよ。

(3)　正の整数 m に対して，複素数 z_{6m} の実部と虚部をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

有理数 $a,\ b$ に対して，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数ならば $a,\ b$ は整数であることを証明せよ。ただし，i は虚数単位である。

5

解答解説のページへ

定義域を$0 \leqq x \leqq 1$とする関数$f_n(x)$と$f(x)$を以下で定める。

$$f_1(x)=0,\ f_{n+1}(x)=\int_0^x \left(f_n(t)-1\right)^2 dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots),\ f(x)=\frac{x}{x+1}$$

(1)　正の整数nに対して，不等式$0 \leqq f_n(x) \leqq 1 \ \ (0 \leqq x \leqq 1)$が成り立つことを証明せよ。

(2)　正の整数nに対して，不等式$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \ \ (0 \leqq x \leqq 1)$が成り立つことを証明せよ。

(3)　実数a $(0 \leqq a \leqq 1)$に対して，極限$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(a)$を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　1 から 5 までカードが 1 枚ずつ入っている袋の中から 1 枚取り出して戻すという試行を繰り返し，n 回目に取り出したカードに書かれた整数を a_n とする。

すると，以下，mod3 で記すと，$a_n\equiv 0$ となる確率は $\dfrac{1}{5}$，$a_n\equiv 1$ となる確率は $\dfrac{2}{5}$，$a_n\equiv 2$ となる確率は $\dfrac{2}{5}$ である。そして，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ とするとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる確率を p_n とする。

まず，$S_2=a_1+a_2$ が初めて 3 の倍数になるのは，$a_1\equiv 1$ のときは $a_2\equiv 2$ のときだけ，$a_1\equiv 2$ のときは $a_2\equiv 1$ のときだけであるので，

$$p_2=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\Big(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\Big)\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}$$

次に，$S_3=a_1+a_2+a_3$ が初めて 3 の倍数になるのは，$a_1\equiv 1$ のときは，$(a_2\equiv 0$ かつ $a_3\equiv 2)$ または $(a_2\equiv 1$ かつ $a_3\equiv 1)$，$a_1\equiv 2$ のときは，$(a_2\equiv 0$ かつ $a_3\equiv 1)$ または $(a_2\equiv 2$ のときは $a_3\equiv 2)$ であるので，

$$p_3=\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$$
$$=\Big(\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\Big)\times\Big(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\Big)\times\frac{2}{5}=\frac{24}{125}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，S_1，S_2，S_3，…，S_{n-1} がいずれも 3 の倍数でない確率は，(1)と同様に考えると，$\Big(\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\Big)\times\Big(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\Big)^{n-2}=\dfrac{4}{5}\Big(\dfrac{3}{5}\Big)^{n-2}$ となる。

これより，S_n が初めて 3 の倍数になる確率 p_n は，

$$p_n=\frac{4}{5}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n-2}\times\frac{2}{5}=\frac{8}{25}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n-2}$$

(3)　$n\geqq 4$ とき，S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であるのは，$a_1\equiv 1$ のときは $a_2\equiv 1$ で $a_3=5$，$a_1\equiv 2$ のときは $a_2\equiv 0$ で $a_3=5$ の場合より，この確率 r_3 は，

$$r_3=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{6}{125}$$

S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であり，S_n が初めて 3 の倍数になる確率は，

$$r_3\times\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n-4}\times\frac{2}{5}=\frac{12}{625}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n-4}$$

これより，S_1，S_2，S_3 が 3 の倍数でなく $a_3=5$ であったとき，n 回目に初めて S_n が 3 の倍数になる条件付き確率 q_n は，

$$q_n=\frac{12}{625}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n-4}\div\frac{6}{125}=\frac{2}{5}\Big(\frac{3}{5}\Big)^{n-4}$$

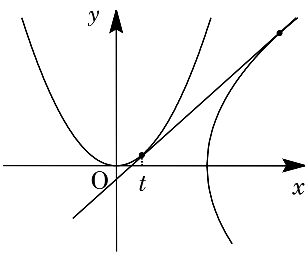
［解　説］

記述しにくいタイプの確率問題です。なお，(3)では r_3 の値は不要でした。

© 電送数学舎 2020

2

問題のページへ



放物線 $y=x^2$ ……①，$x=\dfrac{1}{2a}y^2+\dfrac{3a}{4}$ ……②に対して，

①上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y'=2x$ から，

$$y-t^2=2t(x-t),\quad y=2tx-t^2 \text{ ………③}$$

ここで，$t=0$ のときは③は $y=0$ となり，放物線②に接しないので，$t\neq 0$ のもとで，②③を連立して，

$$\frac{1}{2a}y^2+\frac{3a}{4}=\frac{y}{2t}+\frac{t}{2},\quad 2ty^2-2ay-2at^2+3a^2t=0 \text{ ………④}$$

④が重解をもつことより，$D/4=a^2-2t(-2at^2+3a^2t)=0$ となり，$a\neq 0$ から，

$$a-2t(-2t^2+3at)=0,\quad 4t^3-6at^2+a=0 \text{ ………⑤}$$

すると，①②にともに接する接線が 3 本存在する条件は，⑤が $t\neq 0$ の異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので，$f(t)=4t^3-6at^2+a$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-12at=12t(t-a)$$

すると，$f(0)=a\neq 0$ より，求める条件は，$f(0)f(a)<0$ であり，

$$a(4a^3-6a^3+a)<0,\quad a^2(2a^2-1)>0$$

よって，求める条件は，$a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a$ である。

［解　説］

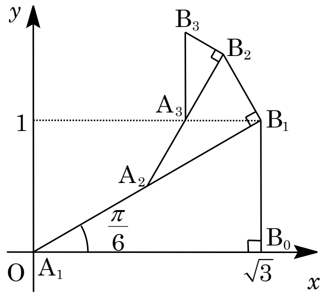
共通接線についての頻出題です。計算は穏やかです。

© 電送数学舎 2020

3

問題のページへ

(1) 複素数平面上で $A_1(0)$，$B_0(\sqrt{3})$，$B_1(\sqrt{3}+i)$ とし，点 A_2 は線分 A_1B_1 の中点，点 B_2 は直線 A_1B_1 に関して点 B_0 の反対側で，$\triangle A_2B_1B_2$ が $\triangle A_1B_0B_1$ と相似になる。



$\angle B_2A_2B_1 = \dfrac{\pi}{6}$ で，$A_1A_2 : A_2A_3 = 1 : \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2} = 1 : \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から，$\overrightarrow{A_2A_3}$ は $\overrightarrow{A_1A_2}$ を $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転し，大きさを $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 倍したものになる。

ここで，$\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigl(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\Bigr) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigl(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\Bigr) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ とおくと，

$$z_3 - z_2 = \alpha(z_2 - z_1),\quad z_3 = z_2 + \alpha(z_2 - z_1)$$

さらに，$z_1 = 0$，$z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2} = \sqrt{3}\alpha$ であることに注意すると，

$$z_3 = \sqrt{3}\alpha + \sqrt{3}\alpha^2 = \sqrt{3}\alpha(1+\alpha) = \sqrt{3}\Bigl(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\Bigr)\Bigl(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\Bigr)$$

$$= \sqrt{3}\Bigl(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\Bigr) = \frac{2}{3}\sqrt{3} + i$$

(2) (1)と同様に考えると，一般的に，$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n)$ となり，

$$z_{n+1} - z_n = (z_2 - z_1)\alpha^{n-1} = (\sqrt{3}\alpha - 0)\alpha^{n-1} = \sqrt{3}\alpha^n$$

すると，$n \geqq 2$ において，$\alpha \neq 1$ から，

$$z_n = z_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{3}\alpha^k = 0 + \frac{\sqrt{3}\alpha(\alpha^{n-1}-1)}{\alpha - 1} = \sqrt{3}\cdot\frac{\alpha^n - \alpha}{\alpha - 1} \cdots\cdots\cdots (*)$$

$(*)$から，$z_6 = \sqrt{3}\cdot\dfrac{\alpha^6 - \alpha}{\alpha - 1}$ となり，$\alpha^6 = \Bigl(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Bigr)^6(\cos\pi + i\sin\pi) = -\dfrac{1}{27}$ なので，

$$\alpha^6 - \alpha = -\frac{1}{27} - \Bigl(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\Bigr) = -\frac{29}{54} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

また，$\alpha - 1 = \Bigl(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}i\Bigr) - 1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}i$ から，

$$z_6 = \sqrt{3}\cdot\frac{-\dfrac{29}{9} - \sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{12}\Bigl(-\frac{29}{9} - \sqrt{3}i\Bigr)(-3 - \sqrt{3}i)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}\Bigl(\frac{29}{3} + \frac{29}{9}\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i - 3\Bigr) = \frac{5}{9}\sqrt{3} + \frac{14}{9}i$$

(3) 正の整数 m に対して，$(*)$から $z_{6m} = \sqrt{3}\cdot\dfrac{\alpha^{6m} - \alpha}{\alpha - 1}$ となり，$\alpha^{6m} = \Bigl(-\dfrac{1}{27}\Bigr)^m$ より，

$$\alpha^{6m} - \alpha = \Bigl(-\frac{1}{27}\Bigr)^m - \Bigl(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\Bigr) = \Bigl(-\frac{1}{27}\Bigr)^m - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

$$z_{6m} = \sqrt{3}\cdot\frac{6\Bigl(-\dfrac{1}{27}\Bigr)^m - 3 - \sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}}{12}\Bigl\{6\Bigl(-\frac{1}{27}\Bigr)^m - 3 - \sqrt{3}i\Bigr\}(-3 - \sqrt{3}i)$$

© 電送数学舎 2020

そこで，z_{6m} の実部を $\mathrm{Re}(z^{6m})$，虚部を $\mathrm{Im}(z^{6m})$ とおくと，

$$\mathrm{Re}(z^{6m})=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{-18\left(-\frac{1}{27}\right)^m+9-3\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

$$\mathrm{Im}(z^{6m})=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{-6\sqrt{3}\left(-\frac{1}{27}\right)^m+3\sqrt{3}+3\sqrt{3}\right\}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

［解　説］

図形絡みの複素数と数列の融合問題で，頻出タイプのものです。とりたてて工夫もせずに数値計算をしましたが，かなり難儀しました。なお，(2)では(3)の設問をみて，まず一般的に解く方法を採っています。

© 電送数学舎 2020

$\boxed{4}$

問題のページへ

$a,\ b$ を有理数として，複素数$(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$ に対し，その実部a^2-b^2，虚部$2ab$が整数である。

ここで, a, b の少なくとも一方が整数でないと仮定する。

(i)　a が整数でなく，b が整数のとき

b^2 と a^2-b^2 が整数から a^2 は整数となる。ここで，a は整数でない有理数なので，$a=\dfrac{q}{p}$ （p と q は互いに素，$p\geqq 2$）とおき，k を整数とすると，

$$a^2=\frac{q^2}{p^2}=k,\ q^2=kp^2$$

すると，q^2 は p^2 の倍数となるが, p と q は互いに素より成立しない。

(ii)　a が整数で, b が整数でないとき

a^2 と a^2-b^2 が整数から b^2 は整数となるが, (i)と同様にすると成立しない。

(iii) a, b がともに整数でないとき

$a=\dfrac{q}{p}$，$b=\dfrac{s}{r}$ （p と q は互いに素，r と s は互いに素，$p\geqq 2$，$r\geqq 2$）とおき，k と l を整数とすると，

$$a^2-b^2=\frac{q^2}{p^2}-\frac{s^2}{r^2}=k\cdots\cdots\cdots①,\ 2ab=\frac{2qs}{pr}=l\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{q^2r^2-p^2s^2}{p^2r^2}=k$ となり，$q^2r^2-p^2s^2=kp^2r^2\cdots\cdots\cdots③$

すると，③を $q^2r^2=p^2(s^2+kr^2)$ と変形し，p^2 と q^2 は互いに素ということを考え合わせると，r^2 は p^2 の倍数である。

また，③を $p^2s^2=r^2(q^2-kp^2)$ と変形し，r^2 と s^2 は互いに素ということを考え合わせると，p^2 は r^2 の倍数である。

これより，$p^2=r^2$ となるので，$p\geqq 2$，$r\geqq 2$ から $p=r$ である。

この式を②に代入すると $\dfrac{2qs}{p^2}=l$ となり，$2qs=lp^2\cdots\cdots\cdots④$

ここで, p と q は互いに素, p と s は互いに素なので, ④から 2 が p^2 の倍数となるが, $p^2\geqq 4$ より成立しない。

(i)～(iii)より，$(a+bi)^2$ の実部と虚部が整数であるとき a, b はともに整数である。

［解 説］

証明の書き方にはいろいろな方法が考えられますが，この解答例では背理法のスタイルで記述しています。

© 電送数学舎 2020

5

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f_1(x)=0$，$f_{n+1}(x)=\displaystyle\int_0^x \left(f_n(t)-1\right)^2 dt$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

のとき，$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=0$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$0 \leqq f_k(x) \leqq 1$ と仮定する。

このとき，$0 \leqq \left(f_k(x)-1\right)^2 \leqq 1$ から，$0 \leqq \displaystyle\int_0^x \left(f_n(t)-1\right)^2 dt \leqq \int_0^x dt = x \leqq 1$

よって，$0 \leqq f_{k+1}(x) \leqq 1$ となり，$n=k+1$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ である。

(2)　$f(x)=\dfrac{x}{x+1}$，また $f_1(x)=0$ から $f_2(x)=\displaystyle\int_0^x \left(f_1(t)-1\right)^2 dt = \int_0^x dt = x$ である。

ここで，l を正の整数として，$f_{2l-1}(x) \leqq f(x) \leqq f_{2l}(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$l=1$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f_1(x)-f(x)=-\dfrac{x}{x+1} \leqq 0$

$$f_2(x)-f(x)=x-\frac{x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1} \geqq 0$$

これより，$f_1(x) \leqq f(x) \leqq f_2(x)$ が成り立つ。

(ii)　$l=k$ のとき　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$f_{2k-1}(x) \leqq f(x) \leqq f_{2k}(x)$ と仮定する。

すると，(1)から，$0 \leqq f_{2k-1}(x) \leqq f(x) \leqq f_{2k}(x) \leqq 1$ なので，

$$\left(f_{2k-1}(x)-1\right)^2 \geqq \left(f(x)-1\right)^2 \geqq \left(f_{2k}(x)-1\right)^2$$

$0 \leqq t \leqq x$ で積分すると，

$$\int_0^x \left(f_{2k-1}(t)-1\right)^2 dt \geqq \int_0^x \left(f(t)-1\right)^2 dt \geqq \int_0^x \left(f_{2k}(t)-1\right)^2 dt$$

$$f_{2k}(x) \geqq \int_0^x \left(f(t)-1\right)^2 dt \geqq f_{2k+1}(x) \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\displaystyle\int_0^x \left(f(t)-1\right)^2 dt = \int_0^x \left(\frac{t}{t+1}-1\right)^2 dt = \int_0^x \frac{1}{(t+1)^2} dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^x$ から，

$$\int_0^x \left(f(t)-1\right)^2 dt = -\frac{1}{x+1}+1=\frac{x}{x+1}=f(x) \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$f_{2k}(x) \geqq f(x) \geqq f_{2k+1}(x) \cdots\cdots\cdots$ ③

さらに，③と(1)から，$1 \geqq f_{2k}(x) \geqq f(x) \geqq f_{2k+1}(x) \geqq 0$ となり，

$$\left(f_{2k}(x)-1\right)^2 \leqq \left(f(x)-1\right)^2 \leqq \left(f_{2k+1}(x)-1\right)^2$$

$$\int_0^x \left(f_{2k}(t)-1\right)^2 dt \leqq \int_0^x \left(f(t)-1\right)^2 dt \leqq \int_0^x \left(f_{2k+1}(t)-1\right)^2 dt$$

すると，$f_{2k+1}(x) \leqq f(x) \leqq f_{2k+2}(x)$ となり，$l=k+1$ のとき成り立つ。

© 電送数学舎 2020

(i)(ii)より，$f_{2l-1}(x) \leqq f(x) \leqq f_{2l}(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ である。

さて，$g_n(x) = (-1)^n f_n(x) - (-1)^n f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと，

(a)　$n = 2l-1$ のとき

$$g_{2l-1}(x) = (-1)^{2l-1} f_{2l-1}(x) - (-1)^{2l-1} f(x) = -f_{2l-1}(x) + f(x) \geqq 0$$

(b)　$n = 2l$ のとき

$$g_{2l}(x) = (-1)^{2l} f_{2l}(x) - (-1)^{2l} f(x) = f_{2l}(x) - f(x) \geqq 0$$

(a)(b)より，n の偶奇にかかわらず，$g_n(x) \geqq 0$ となり，

$$(-1)^n f_n(x) \geqq (-1)^n f(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$\left| f_2(x) - f(x) \right| = \left| x - \dfrac{x}{x+1} \right| = \dfrac{x^2}{x+1} \leqq x^2 = \dfrac{2}{2}x^2$

また，$f_3(x) = \displaystyle\int_0^x \left(f_2(t) - 1 \right)^2 dt = \int_0^x (t-1)^2 dt = \frac{x^3}{3} - x^2 + x$ より，

$$\left| f_3(x) - f(x) \right| = \left| \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{x}{x+1} \right| = \frac{(2-x)x^3}{3(x+1)} \leqq \frac{2}{3}x^3$$

これより，$n \geqq 2$ において，$\left| f_n(x) - f(x) \right| \leqq \dfrac{2}{n}x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ が成立すると予測できる。以下，この予測の正しいことを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 2$ のとき　$\left| f_2(x) - f(x) \right| \leqq \dfrac{2}{2}x^2$ より成立している。

(ii)　$n = k$ のとき　$\left| f_k(x) - f(x) \right| \leqq \dfrac{2}{k}x^k$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と仮定すると，②から，

$$\begin{aligned}
\left| f_{k+1}(x) - f(x) \right| &= \left| \int_0^x \left(f_k(t) - 1 \right)^2 dt - \int_0^x \left(f(t) - 1 \right)^2 dt \right| \\
&= \left| \int_0^x \left(f_k(t) - f(t) \right)\left(f_k(t) + f(t) - 2 \right) dt \right| \\
&\leqq \int_0^x \left| f_k(t) - f(t) \right| \left| f_k(t) + f(t) - 2 \right| dt \\
&\leqq 2\int_0^x \left| f_k(t) - f(t) \right| dt \leqq 2\int_0^x \frac{2}{k}t^k\, dt = \frac{4}{k}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x \\
&= \frac{2}{k} \cdot \frac{2}{k+1}x^{k+1} \leqq \frac{2}{k+1}x^{k+1}
\end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のとき成立する。

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ において，$\left| f_n(x) - f(x) \right| \leqq \dfrac{2}{n}x^n$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ となる。

すると，a $(0 \leqq a \leqq 1)$ に対して，$\left| f_n(a) - f(a) \right| \leqq \dfrac{2}{n}a^n$ $(n \geqq 2)$ である。

ここで，$n \to \infty$ のとき $\dfrac{2}{n}a^n \to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left| f_n(a) - f(a) \right| = 0$ より，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a) = \frac{a}{a+1}$$

© 電送数学舎 2020

［解 説］

難度の非常に高い関数列の極限についての問題です。(2)では，証明を始める前に，結論を同値変形しています。(3)は②式がポイントですが，プロセスをアバウトに記述しても時間内には無理でしょう。

© 電送数学舎 2020