1

解答解説のページへ

A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚，2 が書かれたカードを 2 枚，4 が書かれたカードを 1 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚，3 が書かれたカードを 2 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

(1) X が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) $X < Y$ となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

k を定数とし，$f(x)=x^3-kx$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる。点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。さらに，C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。l_1 および l_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に 4 点 $P_0(2,\ 0)$，$P_1(0,\ 2)$，$Q_0(0,\ 0)$，$Q_1(-1,\ 1)$ がある。正の整数 n に対し，点 P_n，Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}，Q_{n+1} を以下の条件で定める。

　四角形 $P_nP_{n+1}Q_{n+1}Q_n$ と四角形 $P_{n-1}P_nQ_nQ_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 P_nQ_n のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　P_2，Q_2 の座標を求めよ。

(2)　P_4，P_8 の座標を求めよ。

(3)　正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ。

1

問題のページへ

(1) 同じ数字の書かれたカードも区別して，1，2_a，2_b，4 と書かれたカード 4 枚を横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。

このとき，X が 4 の倍数となるのは，下 2 桁が 4 の倍数である，すなわち下 2 桁が 12 または 24 の場合より，

(i) 下 2 桁が 12 のとき　この確率は，$\dfrac{1\times2\times2!}{4!}=\dfrac{1}{6}$ である。

(ii) 下 2 桁が 24 のとき　この確率は，$\dfrac{2\times1\times2!}{4!}=\dfrac{1}{6}$ である。

(i)(ii)より，X が 4 の倍数となる確率は，$\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2) (1)と同様に，同じ数字の書かれたカードも区別して，2_a，2_b，3_a，3_b と書かれたカード 4 枚を横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

このとき，$X<Y$ となるのは，$2233\leqq Y\leqq 3322$ に注意し，X の千の位の数で場合分けをすると，

(i) X の千の位の数が 1 $(X=1***)$ のとき

つねに $X<Y$ が成り立ち，この確率は，$\dfrac{1\times3!}{4!}\times1=\dfrac{1}{4}$ である。

(ii) X の千の位の数が 2 $(X=2***)$ のとき

(ii-i) X の百の位の数が 1 $(X=21**)$ のとき

つねに $X<Y$ が成り立ち，この確率は，$\dfrac{2\times1\times2!}{4!}\times1=\dfrac{1}{6}$ である。

(ii-ii) X の百の位の数が 2 $(X=22**)$ のとき

・$X=2214$ のとき　つねに $X<Y$ が成り立つ。

・$X=2241$ のとき　$Y\neq2233$ のとき $X<Y$ が成り立つ。

この確率は，$\dfrac{2\times1\times1}{4!}\times1+\dfrac{2\times1\times1}{4!}\times\dfrac{4!-2!\times2!}{4!}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{5}{72}=\dfrac{11}{72}$ である。

(ii-iii) X の百の位の数が 4 $(X=24**)$ のとき

$Y=3***$ で $X<Y$ が成り立ち，この確率は，$\dfrac{2\times1\times2!}{4!}\times\dfrac{2\times3!}{4!}=\dfrac{1}{12}$ である。

(iii) X の千の位の数が 4 $(X=4***)$ のとき

つねに $X>Y$ となり，この場合，$X<Y$ は成り立たない。

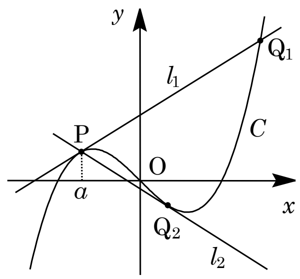
(i)～(iii)より，$X<Y$ となる確率は，$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{11}{72}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{47}{72}$ である。

［解　説］

丁寧な処理が必要な確率問題です。なお，解答例では，すべてのカードが異なるものとして数え上げました。

2

問題のページへ



(1) k を定数とする $f(x)=x^3-kx$ に対して，曲線 $C: y=f(x)$ とちょうど 2 点を共有する直線は，C の接線である。そこで，点 $(t,\ t^3-kt)$ における接線の方程式は，$f'(x)=3x^2-k$ から，

$$y-(t^3-kt)=(3t^2-k)(x-t)$$

$$y=(3t^2-k)x-2t^3\cdots\cdots\cdots(*)$$

$y=f(x)$ と$(*)$を連立すると．$x^3-kx=(3t^2-k)x-2t^3$ から，

$$x^3-3t^2x+2t^3=0\,,\ (x-t)^2(x+2t)=0$$

共有点の x 座標は $x=t,\ -2t$ となり，その 1 つが $\mathrm{P}(a,\ f(a))\ (a\neq 0)$ なので，

(i) $a=t\ (t=a)$ のとき

$(*)$から，接線の方程式は $y=(3a^2-k)x-2a^3$ となり，もう 1 つの共有点の x 座標 $x=-2t=-2a$ である。

(ii) $a=-2t\ \left(t=-\dfrac{a}{2}\right)$ のとき

$(*)$から，接線の方程式は $y=\left(\dfrac{3}{4}a^2-k\right)x+\dfrac{a^3}{4}$ となり，もう 1 つの共有点の x 座標 $x=t=-\dfrac{a}{2}$ である。

ここで，$a\neq 0$ なので，$3a^2-k>\dfrac{3}{4}a^2-k$ となり，

$$l_1: y=(3a^2-k)x-2a^3\,,\ l_2: y=\left(\frac{3}{4}a^2-k\right)x+\frac{a^3}{4}$$

また，Q_1 については $x=-2a$，$y=-8a^3+2ka$ から $\mathrm{Q}_1(-2a,\ -8a^3+2ka)$ となり，Q_2 については $x=-\dfrac{a}{2}$，$y=-\dfrac{a^3}{8}+\dfrac{ka}{2}$ から $\mathrm{Q}_2\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^3}{8}+\dfrac{ka}{2}\right)$ である。

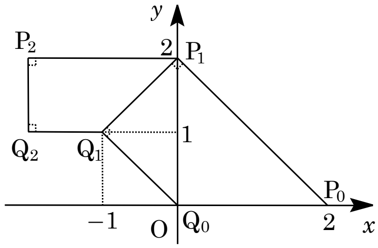
［解　説］

3 次曲線の接線についての頻出題です。恒等式で処理する方法もありますが。なお，上の参考図は，$k>0$，$a<0$ の場合を記しています。

3

問題のページへ

(1)　4 点 $\mathrm{P}_0(2,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 2)$，$\mathrm{Q}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(-1,\ 1)$ に対して，四角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_1$ は四角形 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_0$ と相似であり，かつ辺 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ のみを共有している。



ここで，$\angle\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\angle\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=45°$ であり，

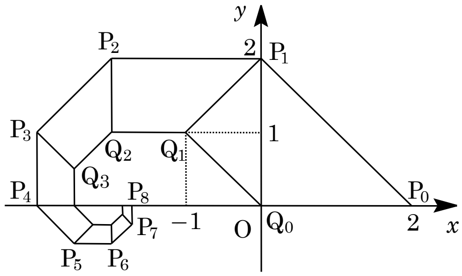
$\angle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=\angle\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1=135°$

また，$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\sqrt{2}$，$\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0=2$ から，その相似比は $\sqrt{2}:2=1:\sqrt{2}$ であり，

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}=2,\ \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=1$$

したがって，$\mathrm{P}_2(-2,\ 2)$，$\mathrm{Q}_2(-2,\ 1)$ となる。

(2)　(1)と同様に，相似な四角形を描いていくと，右図のようになり，



$$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2=\sqrt{2}$$

$$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=1$$

すると，P_4 の x 座標は $-2-\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-3$，$y$ 座標は $2-\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}-1=0$ となり，$\mathrm{P}_4(-3,\ 0)$ である。

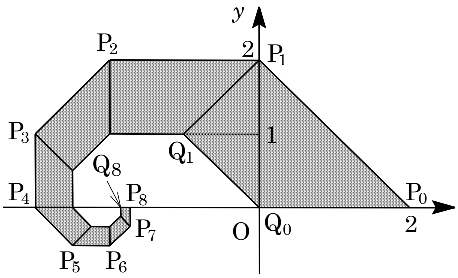
さらに，$\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6=\dfrac{1}{2}$，$\mathrm{P}_6\mathrm{P}_7=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$\mathrm{P}_7\mathrm{P}_8=\dfrac{1}{4}$ なので，$\mathrm{P}_8(x,\ y)$ は，

$$x=-3+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-3+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$$

$$y=0-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0$$

これより，$\mathrm{P}_8\left(-\dfrac{7}{4},\ 0\right)$ となる。

(3)　右図の網点部で示した $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$ からの 8 つの台形の集まりを F_0，同様に $\mathrm{P}_8\mathrm{Q}_8$ からの 8 つの台形の集まりを F_1，$\mathrm{P}_{16}\mathrm{Q}_{16}$ からの 8 つの台形の集まりを F_2 として描いていくと，F_0，F_1，F_2，…はすべて相似で，その相似比の値は，それぞれ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^8=\dfrac{1}{16}$ である。



さて，P_{8m} $(m\geqq 0)$ は x 軸上にあり，その x 座標を x_m とおくと，(2)から，

$$x_0=2,\ x_1=-\frac{7}{4},\ x_{m+2}-x_{m+1}=\frac{1}{16}(x_{m+1}-x_m)$$

すると，$x_{m+1}-x_m=(x_1-x_0)\left(\dfrac{1}{16}\right)^m=-\dfrac{15}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^m$ となり，$m\geqq 1$ で，

$$x_m=x_0-\frac{15}{4}\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{16}\right)^k=2-\frac{15}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{16}\right)^m}{1-\frac{1}{16}}=2-4\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^m\right\}$$

$$=4\left(\frac{1}{16}\right)^m-2$$

また，P_{8m} の y 座標は 0 なので，$\mathrm{P}_{8m}\left(4\left(\dfrac{1}{16}\right)^m-2,\ 0\right)$ である。

［解 説］

数列の図形への応用問題です。理系なら複素数平面を設定して，少し前なら行列を利用して明快に記述できる典型題ですが，どちらも採用できないので，説明の方法に戸惑いを感じます。