1　　解答解説のページへ

$a_1=3$，$a_2=2$ とし，$n \geqq 2$ のとき，$a_{n+1}={a_n}^2+a_n-1$ として数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$n \geqq 2$ のとき $a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{a_i}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ が成り立つような自然数 n を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC は $AB+AC=2BC$ を満たしている。また，角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，$AD=15$ である。さらに，三角形 ABC の内接円の半径は 4 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\theta=\angle BAD$ とするとき $\sin\theta$ の値を求めよ。また，$A=\angle BAC$ とするとき，$\sin A$ と $\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。

3　　解答解説のページへ

n を正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^n\theta\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^{n+2}\theta\, d\theta$ を n の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^7\theta\, d\theta$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

数直線上に動点 P があり，はじめに原点にあるとする。$k=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，k 回目にさいころを振ったとき，1, 2 の目が出たら P は正の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，3, 4 の目が出たら負の方向に $\dfrac{1}{2^k}$ だけ移動し，5, 6 の目が出たら移動しないとする。n 回さいころを振った後の点 P の座標を X_n とする。

(1)　$0 < X_n$ となる確率を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{2} < X_n$ となる確率を求めよ。

(3)　l は n 未満の正の整数とする。このとき，$\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率を求めよ。

5

解答解説のページへ

a は実数とする。座標平面上で連立不等式

$$y \geqq x^2,\ \ y \leqq (2a+3)x - a(a+3)$$

の表す領域を $D(a)$ とおく。いま, x 座標も y 座標も整数であるような点を格子点と呼ぶことにする。

(1)　n を整数とする。このとき $D(n)$ に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　任意の実数 a について，$D(a)$ に含まれる格子点と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しいことを示せ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$a_1=3$，$a_2=2$，$a_{n+1}=a_n{}^2+a_n-1\ (n\geqq 2)$ ……①で定められる$\{a_n\}$に対して，

$$a_{n+1}+1=a_n(a_n+1)\quad (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$n\geqq 2$ において，

$$a_{n+1}+1=(a_2+1)a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=3\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$$

よって，$a_{n+1}=a_1a_2\cdots a_n-1$ ……③が成り立つ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，①より，$a_n{}^2=a_{n+1}-a_n+1$ となり，③を利用すると，

$$\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1{}^2+\sum_{i=2}^{n}a_i{}^2=3^2+\sum_{i=2}^{n}(a_{i+1}-a_i+1)=9+a_{n+1}-a_2+(n-1)$$

$$=9+(a_1a_2\cdots a_n-1)-2+n-1=a_1a_2\cdots a_n+n+5$$

ここで，条件より，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i{}^2=a_1a_2\cdots a_n+100$ ……④なので，

$$a_1a_2\cdots a_n+n+5=a_1a_2\cdots a_n+100,\quad n+5=100$$

よって，$n=95$ となり，この値は$n\geqq 2$ を満たしている。

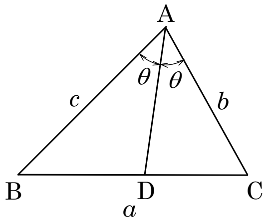
なお，$n=1$ のとき，条件④は$3^2=3+100$ となり，成立しない。

［解 説］

少しスパイスの効いた漸化式が対象です。(1)は数学的帰納法でも示せますが，結論をみて②という変形をしています。解法の詳細は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

2

問題のページへ



(1)　$\triangle$ABC に対して，AB$=c$，BC$=a$，CA$=b$ とおく。また，$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D として，

$$b+c=2a \cdots\cdots\cdots ①,\quad \mathrm{AD}=15 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$\triangle$ABC は内接円の半径が 4 より，その面積を S とおくと，①より，

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot 4=2\cdot 3a=6a \cdots\cdots\cdots ③$$

また，$\theta=\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}$ から，①②を用いて，

$$S=\frac{1}{2}b\cdot\mathrm{AD}\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot\mathrm{AD}\sin\theta=\frac{1}{2}(b+c)\cdot 15\sin\theta=15a\sin\theta \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$15a\sin\theta=6a$ となり，$\sin\theta=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

すると，$A=2\theta$ から，$\cos A=\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\cdot\frac{4}{25}=\frac{17}{25}\cdots\cdots\cdots ⑤$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{17}{25}\right)^2}=\frac{\sqrt{(25+17)(25-17)}}{25}=\frac{4\sqrt{21}}{25}\cdots\cdots\cdots ⑥$$

(2)　⑥より，$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{2\sqrt{21}}{25}bc$ となり，③に代入すると，

$$\frac{2\sqrt{21}}{25}bc=6a,\quad bc=\frac{75}{\sqrt{21}}a=\frac{25\sqrt{21}}{7}a\cdots\cdots\cdots ⑦$$

また，$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，①⑤を利用すると，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{17}{25}=4a^2-\frac{84}{25}bc\cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦⑧より，$a^2=4a^2-\frac{84}{25}\cdot\frac{25\sqrt{21}}{7}a$ となり，$3a^2=12\sqrt{21}a$ から，

$$\mathrm{BC}=a=4\sqrt{21}$$

［解 説］

三角比の応用問題です。試行錯誤が少し必要ですが，(1)の結論と(2)のプロセスとの繋がりを見つけるのがポイントになっています。

3

問題のページへ

(1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta d\theta$ とおくと，$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^{n+2}\theta d\theta$ となり，

$$I_n+I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\tan^n\theta+\tan^{n+2}\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta(1+\tan^2\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^n\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\left[\frac{\tan^{n+1}\theta}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{(\sqrt{3})^{n+1}}{n+1}=\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$$

(2)　(1)より，$I_7=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^7\theta d\theta$ となり，$I_{n+2}=-I_n+\frac{3^{\frac{n+1}{2}}}{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

すると，$I_7=-I_5+\frac{3^3}{6}=-I_5+\frac{9}{2}$，$I_5=-I_3+\frac{3^2}{4}=-I_3+\frac{9}{4}$

$$I_3=-I_1+\frac{3^1}{2}=-I_1+\frac{3}{2}$$

ここで，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta d\theta$ の値を求めると，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta=-\Big[\log|\cos\theta|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\log\frac{1}{2}-\log 1=\log 2$$

すると，$I_3=-\log 2+\frac{3}{2}$，$I_5=\log 2-\frac{3}{2}+\frac{9}{4}=\log 2+\frac{3}{4}$ となり，

$$I_7=-\log 2-\frac{3}{4}+\frac{9}{2}=-\log 2+\frac{15}{4}$$

［解　説］

漸化式を立て，それをもとに定積分の値を求める頻出題です。ただ，本問は誘導つきですので，考え込むことはないでしょう。

4

問題のページへ

(1)　さいころを k 回目に振ったとき，数直線上の動点 P を正の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動する事象を A_k，負の方向に $\frac{1}{2^k}$ だけ移動する事象を B_k，移動しない事象を C_k とおく。このとき，これらの事象の確率は，それぞれ $\frac{1}{3}$ ずつである。

さて，さいころを k 回振った後の点 P の座標を X_k とする。そして，$k+1$ 回目から n 回目までの移動距離の総和を L_k とおくと，

$$L_k \leqq \frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{k+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^k}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\}$$
$$=\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^k}$$

これより，L_k は k 回目の移動距離の最大値 $\frac{1}{2^k}$ を超えないことになり，

$$X_k-\frac{1}{2^k}<X_n<X_k+\frac{1}{2^k}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$X_0=0$ のもとで，A_1，B_1，C_1 の場合をそれぞれ考えて，

(i)　A_1 の場合　$X_1=\frac{1}{2}$ となり，$(*)$より $0<X_n$ である。

(ii)　B_1 の場合　$X_1=-\frac{1}{2}$ となり，$(*)$より $X_n<0$ である。

(iii)　C_1 の場合　$X_1=0$ となり，$(*)$より $-\frac{1}{2}<X_n<\frac{1}{2}$ である。

(i)～(iii)より，$0<X_n$ となるのは，$(*)$から，以下の場合である。

A_1，C_1A_2，$C_1C_2A_3$，……，$C_1C_2\cdots C_{n-1}A_n$

このときの確率を $P(n)$ とおくと，

$$P(n)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

(2)　$X_0=0$ のもとで $\frac{1}{2}<X_n$ になるには，(1)より A_1 が必要であり，その確率は $\frac{1}{3}$ である。このとき，$X_1=\frac{1}{2}$ となり，このもとで $\frac{1}{2}<X_n$ となる確率は，(1)から $P(n-1)$ であるので，$\frac{1}{2}<X_n$ となる確率 Q_1 は，$n\geqq 2$ において，

$$Q_1=\frac{1}{3}P(n-1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$1 \leqq l < n$ として，$\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となるのは，A_1 または C_1 が必要である。

まず，A_1 の場合，$X_l = \dfrac{1}{2^l}$ のときと $\dfrac{1}{2^{l-1}} \leqq X_l$ のときに場合分けをする。

(a)　$X_l = \dfrac{1}{2^l}$ のとき　$A_1B_2B_3\cdots B_l$ の場合で，(1)から $\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}P(n-l) = \left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)$$

(b)　$\dfrac{1}{2^{l-1}} \leqq X_l$ のとき　(a)以外の場合なので，(＊)から $\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}\right\} = \frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^l$$

次に，C_1A_2 の場合，$X_l = \dfrac{1}{2^l}$ のときと $\dfrac{1}{2^{l-1}} \leqq X_l$ のときに場合分けをする。

(a)　$X_l = \dfrac{1}{2^l}$ のとき　$C_1A_2B_3\cdots B_l$ の場合で，(1)から $\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{l-2}P(n-l) = \left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)$$

(b)　$\dfrac{1}{2^{l-1}} \leqq X_l$ のとき　(a)以外の場合なので，(＊)から $\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{l-2}\right\} = \left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^l$$

同様に続けていき，$C_1C_2\cdots C_{l-2}A_{l-1}$ の場合も，$X_l = \dfrac{1}{2^l}$ のときと $\dfrac{1}{2^{l-1}} \leqq X_l$ のときに場合分けをする。

(a)　$X_l = \dfrac{1}{2^l}$ のとき　$C_1C_2\cdots C_{l-2}A_{l-1}B_l$ の場合で，(1)から $\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{l-2}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}P(n-l) = \left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)$$

(b)　$\dfrac{1}{2^{l-1}} \leqq X_l$ のとき　(a)以外の場合なので，(＊)から $\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{l-2}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^l$$

さらに，$C_1C_2\cdots C_{l-2}C_{l-1}A_l$ の場合は $X_l = \dfrac{1}{2^l}$ となり，$\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}\frac{1}{3}P(n-l) = \left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)$$

以上まとめると，$\dfrac{1}{2^l} < X_n$ となる確率 Q_l は，上記の確率の和となるので，

$$\begin{aligned}Q_l &= \left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)+\left\{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^l\right\}+\left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)+\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^l\right\}+\cdots \\ &\quad +\left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)+\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}-\left(\frac{1}{3}\right)^l\right\}+\left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l) \\ &= l\left(\frac{1}{3}\right)^l P(n-l)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}-(l-1)\left(\frac{1}{3}\right)^l\end{aligned}$$

すると，$P(n-l)=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-l}\right\}$より，

$$\begin{aligned}Q_l&=l\left(\frac{1}{3}\right)^l\cdot\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-l}\right\}+\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{l-1}\right\}-(l-1)\left(\frac{1}{3}\right)^l\\&=\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{3}\right)^l-\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^l-(l-1)\left(\frac{1}{3}\right)^l\\&=\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}l+\frac{3}{2}+l-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^l-\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(l+1)\left(\frac{1}{3}\right)^l-\frac{1}{2}l\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

［解　説］

数直線上のランダムウォークを題材とした，かなり難度の高い確率問題です。さらに，記述方法に苦労するタイプです。ポイントは，冒頭に示したように「L_k は k 回目の移動距離の最大値 $\dfrac{1}{2^k}$ を超えないこと」です。ただ，(2)では $X_1=\dfrac{1}{2}$ となるのが 1 つのケースしかないのですが，(3)では $X_l=\dfrac{1}{2^l}$ となるケースが複数存在し，その点が状況をさらに複雑にし，記述がかなり大雑把になってしまいました。

5

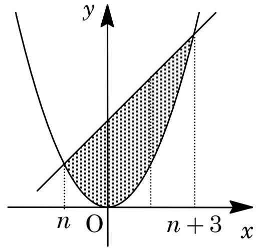
問題のページへ

(1) 連立不等式 $y \geqq x^2$ ……①，$y \leqq (2a+3)x-a(a+3)$ ……②で表される領域 $D(a)$ の境界線の交点は,

$$x^2=(2a+3)x-a(a+3),\ x^2-(2a+3)x+a(a+3)=0$$

すると，$(x-a)(x-a-3)=0$ から，$x=a,\ a+3$ となる。

ここで, n を整数として，$a=n$ のとき領域 $D(n)$ に属する格子点は，まず直線 $x=n,\ n+3$ 上で 1 個ずつである。



次に，直線 $x=n+1$ 上では，2 つの境界線との交点がともに格子点となるので，その個数は,

$$(2n+3)(n+1)-n(n+3)-(n+1)^2+1$$
$$=-(n+1-n)(n+1-n-3)+1=2+1=3$$

また，直線 $x=n+2$ 上でも同様で，格子点の個数は,

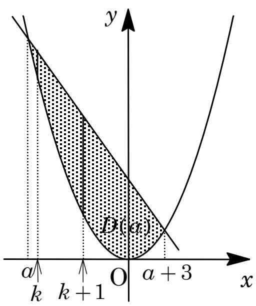
$$(2n+3)(n+2)-n(n+3)-(n+2)^2+1$$
$$=-(n+2-n)(n+2-n-3)+1=2+1=3$$

よって，$D(n)$ に含まれる格子点の個数は，$1+1+3+3=8$ である。

(2) まず, a が整数のとき，(1)から $D(a)=D(a+1)=8$ である。

ここで，a が整数でない実数のとき，①と②の境界線の交点は $x=a,\ a+3$ となるので，k を整数として,

$$a<k<a+1<k+1<a+2<k+2<a+3$$



そこで，$L_a(x)$ を次式のように定めると,

$$L_a(x)=(2a+3)x-a(a+3)-x^2$$
$$=-(x-a)(x-a-3)$$

すると，$x=k,\ k+1,\ k+2$ と①の境界線の交点は，いずれも格子点となり，$L_a(k)=-(k-a)(k-a-3)$

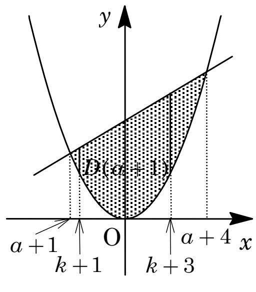
$$L_a(k+1)=-(k-a+1)(k-a-2),\ L_a(k+2)=-(k-a+2)(k-a-1)$$

次に，②において，a を $a+1$ に変え，$y \leqq \{2(a+1)+3\}x-(a+1)(a+1+3)$

$$y \leqq (2a+5)x-(a+1)(a+4) \text{………③}$$

このとき，①と③の境界線の交点は $x=a+1,\ a+4$ となるので，k を整数として,

$$a+1<k+1<a+2<k+2<a+3<k+3<a+4$$



同様に，$L_{a+1}(x)$ を次式のように定めると,

$$L_{a+1}(x)=(2a+5)x-(a+1)(a+4)-x^2$$
$$=-(x-a-1)(x-a-4)$$

すると，$x=k+1,\ k+2,\ k+3$ と①の境界線の交点は，いずれも格子点となり,

$$L_{a+1}(k+1) = -(k+1-a-1)(k+1-a-4) = -(k-a)(k-a-3)$$
$$L_{a+1}(k+2) = -(k+2-a-1)(k+2-a-4) = -(k-a+1)(k-a-2)$$
$$L_{a+1}(k+3) = -(k+3-a-1)(k+3-a-4) = -(k-a+2)(k-a-1)$$

これより，$D(a)$ と $D(a+1)$ に含まれる線分の長さについて，

$$L_a(k) = L_{a+1}(k+1)\,,\ L_a(k+1) = L_{a+1}(k+2)\,,\ L_a(k+2) = L_{a+1}(k+3)$$

よって，$D(a)$ に含まれる格子点と $D(a+1)$ に含まれる格子点の個数は等しい。

［解 説］

格子点の個数についての問題です。(1)で $x = n+1$ や $x = n+2$ 上の格子点を数えるのに，因数分解をした形式の方が数えやすく，この点が(2)の誘導になっていました。もっとも，これ以外は，ほとんど工夫をしていませんが。