

1

解答解説のページへ

$a$  を正の数とし,  $t$  は  $0 \leq t < a$  を満たす数とする。点  $(t, (t-a)^2)$  における曲線  $y = (x-a)^2$  の接線と,  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれた領域を  $D(t)$  とする。

- (1) 領域  $D(t)$  の表す図形の面積を  $a$  および  $t$  を用いて表せ。
- (2) 領域  $D(t)$  の表す図形の面積の最大値, およびそのときの  $t$  の値を  $a$  を用いて表せ。
- (3)  $s$  は  $0 \leq s \leq t$  を満たす数とする。領域  $D(t)$  と領域  $D(s)$  を合わせてできる領域  $D(t) \cup D(s)$  の表す図形の面積の最大値, およびそのときの  $s$  と  $t$  の値を  $a$  を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

初項が 1 で公差が 6 である等差数列  $1, 7, 13, \dots$  の第  $n$  項を  $a_n$  とし、また初項が 3 で公差が 4 である等差数列  $3, 7, 11, \dots$  の第  $m$  項を  $b_m$  とする。2 つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_m\}$  に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{c_k\}$  とし、2 つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_m\}$  の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{d_l\}$  とする。したがって  $c_1 = 7$  であり、また数列  $\{d_l\}$  のはじめの 5 項は  $1, 3, 7, 11, 13$  となる。

- (1) 数列  $\{c_k\}$  の一般項を求めよ。
- (2) 数列  $\{d_l\}$  の一般項を求めよ。
- (3) 数列  $\{d_l\}$  の初項から第  $l$  項までの和  $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$  を求めよ。

3

解答解説のページへ

正方形 ABCD の辺を除く内部に、 $PA \perp PB$  を満たす点 P がある。ベクトル  $\overrightarrow{PC}$  を  $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$  と表すとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$  とするとき、 $x, y$  を  $\alpha$  を用いて表せ。
- (2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1) で求めた  $x, y$  の和  $x + y$  の最大値を求め、そのときの P がどのような点かを答えよ。

4

解答解説のページへ

箱の中に  $n$  枚のカードが入っている。ただし  $n \geq 3$  とする。そのうち 1 枚は金色, 1 枚は銀色, 残りの  $(n-2)$  枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し, その色が金なら 50 点, 銀なら 10 点, 白なら 0 点と記録し, カードを箱に戻す。この操作を繰り返し, 記録した点の合計が  $k$  回目にはじめてちょうど 100 点となる確率  $P(k)$  を求めよ。

5

[解答解説のページへ](#)

(1) 次の定積分を求めよ。  $f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt$

(2) (1)で求めた  $x$  の関数  $f(x)$  に対し、極限值  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 曲線  $y = (x-a)^2$  に対し  $y' = 2(x-a)$  となり,  $0 \leq t < a$  において, 点  $(t, (t-a)^2)$  における接線の方程式は,

$$y - (t-a)^2 = 2(t-a)(x-t)$$

$$y = 2(t-a)x - t^2 + a^2 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

すると, ①と  $y$  軸との交点は  $(0, -t^2 + a^2)$  となり, また  $x$  軸との交点は  $(\frac{t+a}{2}, 0)$  である。

そこで, 接線①と  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれた領域  $D(t)$  の面積を  $S(t)$  とおくと,

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{t+a}{2} (-t^2 + a^2) = \frac{1}{4} (-t^3 - at^2 + a^2t + a^3) \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

- (2) ②より,  $S'(t) = \frac{1}{4} (-3t^2 - 2at + a^2) = -\frac{1}{4} (3t-a)(t+a)$

すると,  $0 \leq t < a$  における  $S(t)$  の増減は右表のようになる。これより,  $S(t)$  は  $t = \frac{a}{3}$  のとき最大となり, 最大値は,

|         |   |     |               |     |     |
|---------|---|-----|---------------|-----|-----|
| $t$     | 0 | ... | $\frac{a}{3}$ | ... | $a$ |
| $S'(t)$ |   | +   | 0             | -   |     |
| $S(t)$  |   | ↗   |               | ↘   |     |

$$S\left(\frac{a}{3}\right) = \frac{1}{4} \left(-\frac{a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + \frac{a^3}{3} + a^3\right) = \frac{8}{27} a^3$$

- (3)  $0 \leq s \leq t < a$  のとき, 点  $(s, (s-a)^2)$  における接線の方程式は, ①より,

$$y = 2(s-a)x - s^2 + a^2 \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

さて, 2つの領域  $D(t)$  と  $D(s)$  を合わせてできる領域  $D(t) \cup D(s)$  の面積を  $T(t, s)$  とすると,

- (i)  $0 \leq s = t < a$  のとき

$$T(t, s) = S(t) \text{ より, (2) から最大値は } \frac{8}{27} a^3 \text{ である。}$$

- (ii)  $0 \leq s < t < a$  のとき

①③を連立すると,  $2(t-a)x - t^2 + a^2 = 2(s-a)x - s^2 + a^2$  から,

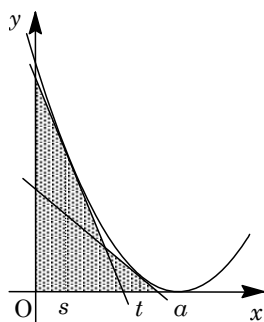
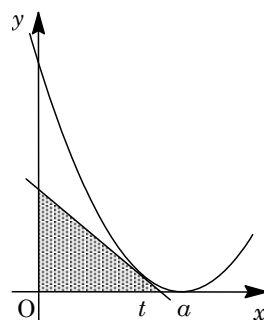
$$2(t-s)x = t^2 - s^2, \quad x = \frac{t+s}{2}$$

よって,  $T(t, s) = S(t) + \frac{1}{2} \{(-s^2 + a^2) - (-t^2 + a^2)\} \cdot \frac{t+s}{2}$  となり,

$$T(t, s) = \frac{1}{4} (-t^3 - at^2 + a^2t + a^3) + \frac{1}{4} (t^3 + st^2 - s^2t - s^3) \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

ここで,  $t$  を  $t = t_0$  ( $0 < t_0 < a$ ) で固定し,  $s$  を  $0 \leq s < t_0$  で動かすと考え,

$$T(t_0, s) = \frac{1}{4} (-t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3) + \frac{1}{4} (t_0^3 + t_0^2s - t_0s^2 - s^3)$$



$$\begin{aligned} T'(t_0, s) &= -\frac{1}{4}(3s^2 + 2t_0s - t_0^2) \\ &= -\frac{1}{4}(3s - t_0)(s + t_0) \end{aligned}$$

|              |   |     |                 |     |       |
|--------------|---|-----|-----------------|-----|-------|
| $s$          | 0 | ... | $\frac{t_0}{3}$ | ... | $t_0$ |
| $T'(t_0, s)$ |   | +   | 0               | -   |       |
| $T(t_0, s)$  |   | ↗   |                 | ↘   |       |

すると、 $0 \leq s < t_0$ における $T(t_0, s)$ の増減は右表のようになる。これより、 $T(t_0, s)$ は $s = \frac{t_0}{3}$ のとき最大となり、最大値は、

$$\begin{aligned} T\left(t_0, \frac{t_0}{3}\right) &= \frac{1}{4}(-t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3) + \frac{1}{4}\left(t_0^3 + \frac{t_0^3}{3} - \frac{t_0^3}{9} - \frac{t_0^3}{27}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t_0^3 - at_0^2 + a^2t_0 + a^3\right) \end{aligned}$$

さらに、この状態を保ったまま $t_0$ を $0 < t_0 < a$ で動かすと考え、変数を $t_0$ から $t$ に戻し $U(t) = T\left(t, \frac{t}{3}\right)$ とおき直すと、 $U(t) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27}t^3 - at^2 + a^2t + a^3\right)$ から、

$$\begin{aligned} U'(t) &= \frac{1}{4}\left(\frac{5}{9}t^2 - 2at + a^2\right) \\ &= \frac{1}{36}(5t - 3a)(t - 3a) \end{aligned}$$

|         |   |     |                |     |     |
|---------|---|-----|----------------|-----|-----|
| $t$     | 0 | ... | $\frac{3}{5}a$ | ... | $a$ |
| $U'(t)$ |   | +   | 0              | -   |     |
| $U(t)$  |   | ↗   |                | ↘   |     |

すると、 $0 < t < a$ における $U(t)$ の増減は右表のようになる。

これより、 $U(t)$ は $t = \frac{3}{5}a$ のとき最大となり、最大値は、

$$U\left(\frac{3}{5}a\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{5}{27} \cdot \frac{27}{125}a^3 - \frac{9}{25}a^3 + \frac{3}{5}a^3 + a^3\right) = \frac{8}{25}a^3$$

(i)(ii)より、 $T(t, s)$ は、 $t = \frac{3}{5}a$ 、 $s = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}a = \frac{a}{5}$ のとき、最大値 $\frac{8}{25}a^3$ をとる。

### [解説]

微分と最大・最小に関する問題です。(3)は2変数関数が対象の設定で、1文字を固定して処理しています。ただ、重複をいとわず丁寧に記述したところ、かなりの分量になってしまいました。

2

問題のページへ

- (1) 初項 1, 公差 6 である等差数列  $\{a_n\}$  について,  $a_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$   
 また, 初項 3, 公差 4 である等差数列  $\{b_m\}$  について,  $b_m = 3 + 4(m-1) = 4m - 1$   
 ここで,  $\{a_n\}$ ,  $\{b_m\}$  に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{c_k\}$  とすると,  $a_n = b_m$  から,

$$6n - 5 = 4m - 1, \quad 3n - 2m = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{を満たす 1 つの解が } (n, m) = (2, 2) \text{ より, } 3 \times 2 - 2 \times 2 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } 3(n-2) - 2(m-2) = 0, \quad 3(n-2) = 2(m-2)$$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので,  $j$  を整数として,  $n-2 = 2j$ ,  $m-2 = 3j$  から,

$$n = 2j + 2, \quad m = 3j + 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで,  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$  より  $j \geq 0$  となるので,  $k = j + 1 \geq 1$  とおくと,  $\textcircled{3}$  より,

$$n = 2(k-1) + 2 = 2k, \quad m = 3(k-1) + 2 = 3k - 1$$

よって,  $\{c_k\}$  の一般項は,  $c_k = a_{2k} = 12k - 5$  である。

- (2) まず,  $\{a_n\}$ ,  $\{b_m\}$  の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を  $\{d_l\}$  とする。ここで,  $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$  に注意して,  $\{d_l\}$  の  $d_3$  以降を項数 4 のグループに分け,  $c_1 = 7$  から 4 項を第 1 群,  $c_2 = 19$  から 4 項を第 2 群,  $c_3 = 31$  から 4 項を第 3 群,  $\cdots$  と呼ぶ。

$$1, 3 \mid \underbrace{7, 11, 13, 15}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{19, 23, 25, 27}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{31, 35, 37, 39}_{\text{第 3 群}} \mid \cdots$$

さて,  $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$  から, 数列  $\{d_l\}$  の第  $k$  群には  $c_k$ ,  $a_{2k+1}$ ,  $b_{3k}$ ,  $b_{3k+1}$  の 4 項が含まれ,  $a_{2k+1} = c_k + 6$ ,  $b_{3k} = c_k + 4$ ,  $b_{3k+1} = c_k + 8$  より,

$$c_k < b_{3k} < a_{2k+1} < b_{3k+1}$$

これより,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 3$  で,  $l \geq 3$  の  $d_l$  に対して, 第  $k$  群の 4 項は,

$$(d_{4k-1}, d_{4k}, d_{4k+1}, d_{4k+2}) = (c_k, b_{3k}, a_{2k+1}, b_{3k+1})$$

$$(i) \quad l = 4k - 1 \text{ のとき} \quad d_l = c_k = 12k - 5 = 12 \cdot \frac{l+1}{4} - 5 = 3l - 2$$

$$(ii) \quad l = 4k \text{ のとき} \quad d_l = c_k + 4 = 12k - 1 = 12 \cdot \frac{l}{4} - 1 = 3l - 1$$

$$(iii) \quad l = 4k + 1 \text{ のとき} \quad d_l = c_k + 6 = 12k + 1 = 12 \cdot \frac{l-1}{4} + 1 = 3l - 2$$

$$(iv) \quad l = 4k + 2 \text{ のとき} \quad d_l = c_k + 8 = 12k + 3 = 12 \cdot \frac{l-2}{4} + 3 = 3l - 3$$

ここで, (iii) に  $l = 1$  をあてはめると  $d_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$ , (iv) に  $l = 2$  をあてはめると  $d_2 = 3 \cdot 2 - 3 = 3$  となり, とともに成立している。よって, (i)~(iv) について,  $l$  を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると,  $d_l$  は,

$$d_l = 3l - 1 \quad (l \equiv 0), \quad d_l = 3l - 2 \quad (l \equiv 1, 3), \quad d_l = 3l - 3 \quad (l \equiv 2)$$



(3)  $i$  を自然数として,  $s_i = d_{4i-3} + d_{4i-2} + d_{4i-1} + d_{4i}$  とおくと, (2) より,

$$s_i = \{12(i-1)+1\} + \{12(i-1)+3\} + (12i-5) + (12i-1) = 48i-26$$

ここで,  $p$  を自然数として,  $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$  とすると,

(i)  $l = 4p$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p} &= \sum_{i=1}^p s_i = \sum_{i=1}^p (48i-26) = \frac{22+(48p-26)}{2} \cdot p = 2p(12p-1) \\ &= 2 \cdot \frac{l}{4} \left( 12 \cdot \frac{l}{4} - 1 \right) = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

(ii)  $l = 4p-1$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-1} &= S_{4p} - d_{4p} = 2p(12p-1) - (12p-1) = (2p-1)(12p-1) \\ &= \left( 2 \cdot \frac{l+1}{4} - 1 \right) \left( 12 \cdot \frac{l+1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \end{aligned}$$

(iii)  $l = 4p-2$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-2} &= S_{4p-1} - d_{4p-1} = (2p-1)(12p-1) - (12p-5) \\ &= 2p(12p-13) + 6 = 2 \cdot \frac{l+2}{4} \left( 12 \cdot \frac{l+2}{4} - 13 \right) + 6 = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \end{aligned}$$

(iv)  $l = 4p-3$  のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-3} &= S_{4p-2} - d_{4p-2} = 2p(12p-13) + 6 - \{12(p-1)+3\} \\ &= 2p(12p-19) + 15 = 2 \cdot \frac{l+3}{4} \left( 12 \cdot \frac{l+3}{4} - 19 \right) + 15 = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

(i)~(iv)より,  $l$  を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると,  $S_l$  は,

$$S_l = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \quad (l \equiv 0, 1), \quad S_l = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \quad (l \equiv 2, 3)$$

### [解説]

2 つの等差数列の共通数列が題材です。記述量はかなりのものです。なお, (2) では (1) の数列  $\{c_k\}$  に注目し,  $d_1$  と  $d_2$  は特別に扱い,  $d_3$  以降を群数列の考え方で処理しています。ただ, この扱いは, 結果的には不要だったのですが。

3

問題のページへ

- (1) 正方形 ABCD の内部の点 P は、
- $PA \perp PB$
- を満たすので、

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また、} \alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|} \text{ より、} |\overrightarrow{PB}| = \alpha |\overrightarrow{PA}| \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$  から、

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}$$

まず、 $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$  より  $|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}| = |x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}|$  となり、①②から、

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + \alpha^2 |\overrightarrow{PA}|^2 = x^2 |\overrightarrow{PA}|^2 + \alpha^2 (y-1)^2 |\overrightarrow{PA}|^2$$

$$1 + \alpha^2 = x^2 + \alpha^2 (y-1)^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  から  $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \cdot \{x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}\} = 0$  となり、①②から、

$$x |\overrightarrow{PA}|^2 - \alpha^2 (y-1) |\overrightarrow{PA}|^2 = 0, \quad x - \alpha^2 (y-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さらに、直線 PB に関して、点 A と点 C は反対側にあるので、 $x < 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$ ③④より、 $1 + \alpha^2 = \alpha^4 (y-1)^2 + \alpha^2 (y-1)^2$  となり、 $\alpha^2 (y-1)^2 = 1$ 

$$y-1 = \pm \frac{1}{\alpha}, \quad x = \pm \alpha \quad (\text{複号同順})$$

すると、⑤より、 $x = -\alpha, \quad y = 1 - \frac{1}{\alpha}$ 

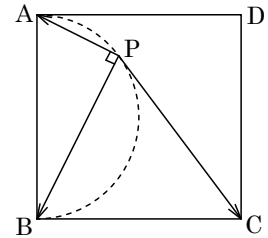
- (2) (1)より、
- $x + y = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$
- となる。

ここで、 $\alpha > 0$  から、相加平均と相乗平均の関係を用いると、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$  となり、

$$x + y \leq 1 - 2 = -1$$

等号成立は、 $\alpha = \frac{1}{\alpha}$  すなわち  $\alpha = 1$  のときである。

以上より、 $x + y$  の最大値は  $-1$  であり、このとき、②から  $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA}|$  となり、点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。



### 【解説】

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので、座標の設定という方法も考えられますが、ここでは①②を利用して  $x, y$  の連立方程式を立てるという方針で記しました。

4

問題のページへ

もとに戻しながら箱からカードを 1 枚ずつ取り出したとき、金、銀、白である確率は、それぞれ  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{n-2}{n}$  である。そして、金なら 50 点、銀なら 10 点、白なら 0 点と記録し、その合計点を考える。

さて、 $k$  回目に合計点がはじめて 100 点となるのは、次の(a), (b)の場合がある。

(a)  $k-1$ 回目までの合計点が 50 点で、 $k$ 回目に金という場合

(a-i)  $1 \leq k-1 \leq 4$  ( $2 \leq k \leq 5$ ) のとき

$k-1$ 回目までは、金が 1 回、白が  $k-2$ 回となり、その確率は、

$${}_{k-1}C_1 \frac{1}{n} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-2} \times \frac{1}{n} = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$$

(a-ii)  $k-1 \geq 5$  ( $k \geq 6$ ) のとき

$k-1$ 回目までは、金が 1 回、白が  $k-2$ 回、または銀が 5 回、白が  $k-6$ 回となり、その確率は、

$$\begin{aligned} & {}_{k-1}C_1 \frac{1}{n} \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-2} \times \frac{1}{n} + {}_{k-1}C_5 \left( \frac{1}{n} \right)^5 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_5 (n-2)^{k-6}}{n^k} \end{aligned}$$

(b)  $k-1$ 回目までの合計点が 90 点で、 $k$ 回目に銀という場合

(b-i)  $5 \leq k-1 \leq 8$  ( $6 \leq k \leq 9$ ) のとき

$k-1$ 回目までは、金が 1 回、銀が 4 回、白が  $k-6$ 回となり、その確率は、

$${}_{k-1}C_1 {}_{k-2}C_4 \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^4 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \times \frac{1}{n} = \frac{{}_{k-2}C_4 (k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

(b-ii)  $k-1 \geq 9$  ( $k \geq 10$ ) のとき

$k-1$ 回目までは、金が 1 回、銀が 4 回、白が  $k-6$ 回、または銀が 9 回、白が  $k-10$ 回となり、その確率は、

$$\begin{aligned} & {}_{k-1}C_1 {}_{k-2}C_4 \frac{1}{n} \left( \frac{1}{n} \right)^4 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-6} \times \frac{1}{n} + {}_{k-1}C_9 \left( \frac{1}{n} \right)^9 \left( \frac{n-2}{n} \right)^{k-10} \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{{}_{k-2}C_4 (k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_9 (n-2)^{k-10}}{n^k} \end{aligned}$$

(a)(b)より、 $k$ 回目に合計点がはじめて 100 点となる確率  $P(k)$  は、

(i)  $k=1$  のとき  $P(k)=0$

(ii)  $2 \leq k \leq 5$  のとき (a-i)より、 $P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k}$

(iii)  $6 \leq k \leq 9$  のとき (a-ii)および(b-i)より、

$$P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_5 (n-2)^{k-6}}{n^k} + \frac{{}_{k-2}C_4 (k-1)(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

ここで,  ${}_{k-2}C_4(k-1) = \frac{(k-1)!}{4!(k-6)!} = 5 \cdot \frac{(k-1)!}{5!(k-6)!} = 5 {}_{k-1}C_5$  となるので,

$$P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2} + (1+5) {}_{k-1}C_5(n-2)^{k-6}}{n^k}$$

$$= \frac{(n-2)^{k-6}}{n^k} \{ (k-1)(n-2)^4 + 6 {}_{k-1}C_5 \}$$

(iv)  $k \geq 10$  のとき (a-ii) および (b-ii) より,

$$P(k) = \frac{(k-1)(n-2)^{k-2}}{n^k} + \frac{(1+5) {}_{k-1}C_5(n-2)^{k-6}}{n^k} + \frac{{}_{k-1}C_9(n-2)^{k-10}}{n^k}$$

$$= \frac{(n-2)^{k-10}}{n^k} \{ (k-1)(n-2)^8 + 6 {}_{k-1}C_5(n-2)^4 + {}_{k-1}C_9 \}$$

### [解説]

丁寧に場合分けをするタイプの確率の問題です。「はじめて」という条件が与えられているので, その 1 回手前の状態に着目しています。ただ, 記述量はかなりのもので, 忍耐力の勝負になります。

5

問題のページへ

$$(1) \quad f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt = e^{-x} \int_0^x e^t \sin(t+x) dt$$

$$\text{ここで, } (e^t \sin(t+x))' = e^t \sin(t+x) + e^t \cos(t+x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(e^t \cos(t+x))' = e^t \cos(t+x) - e^t \sin(t+x) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } (e^t \sin(t+x) - e^t \cos(t+x))' = 2e^t \sin(t+x) \text{となり,}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-x}}{2} \left[ e^t \sin(t+x) - e^t \cos(t+x) \right]_0^x \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^x \sin 2x - e^x \cos 2x - \sin x + \cos x) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) - \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(0) = 0 \text{なので, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{となり, (1)から,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos 2x + \sin 2x + \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) \\ &= \cos 2x + \sin 2x - e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

$$\text{これより, } f'(0) = 1 + 0 - 1 \cdot 1 = 0 \text{となるので, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{である。}$$

### [解説]

定積分の計算と極限の融合問題です。(2)は微分係数の定義式に着目する点がポイントです。式変形だけでも極限は求まりますが、この場合も同様に定義式が絡みます。