

1

解答解説のページへ

初項が 1 で公差が 6 である等差数列 $1, 7, 13, \dots$ の第 n 項を a_n とし, また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 $3, 7, 11, \dots$ の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1 = 7$ であり, また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は $1, 3, 7, 11, 13$ となる。

(1) 数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{d_l\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{d_l\}$ の初項から第 l 項までの和 $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

正方形 ABCD の辺を除く内部に、 $PA \perp PB$ を満たす点 P がある。ベクトル \overrightarrow{PC} を $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$ と表すとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|}$ とするとき、 x, y を α を用いて表せ。
- (2) 点 P が題意の条件を満たしながら動くとき、(1) で求めた x, y の和 $x + y$ の最大値を求め、そのときの P がどのような点かを答えよ。

3

解答解説のページへ

(1) 次の定積分を求めよ。 $f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt$

(2) (1)で求めた x の関数 $f(x)$ に対し、極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 3 以上の自然数として、 n 枚のカード $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n$ がある。初めにこれらのカードを下から $C_n, C_{n-1}, \dots, C_2, C_1$ の順番に積み上げておく。いちばん上にあるカードが C_1 で、いちばん下が C_n である。積み上げられたカードに対して以下の試行を繰り返す。いちばん上にあるカードを取ってそれを残りのいずれかのカードの下に入れるか、またはいちばん上に戻す。どの位置におくかの確率はすべて等しいものとする。

$k=1, 2, \dots$ について、 k 回の試行の後にカード C_1 が上から数えて l 番目にある確率を $P(k, l)$ ($l=1, 2, \dots, n$) で表し、また k 回の試行の後にカード C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k, l)$ で表す。例えば $P(1, l)$ は l によらず $\frac{1}{n}$ に等しい。以下の

問いに答えよ。

- (1) $P(2, l)$ を求めよ。
- (2) $P(k, l)$ を求めよ。
- (3) $Q(k, l)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

複素数 $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ に対し, $\alpha = z + z^8$ とおく。 $f(x)$ は整数係数の 3 次多項式で, 3 次の係数が 1 であり, かつ $f(\alpha) = 0$ となるものとする。ただし, すべての係数が整数である多項式を, 整数係数の多項式という。

- (1) $f(x)$ を求めよ。ただし, $f(x)$ がただ 1 つに決まることは証明しなくてよい。
- (2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解を, α の 2 次以下の, 整数係数の多項式の形で表せ。

1

問題のページへ

- (1) 初項 1, 公差 6 である等差数列 $\{a_n\}$ について, $a_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$
 また, 初項 3, 公差 4 である等差数列 $\{b_m\}$ について, $b_m = 3 + 4(m-1) = 4m - 1$
 ここで, $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とすると, $a_n = b_m$ から,

$$6n - 5 = 4m - 1, \quad 3n - 2m = 2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ を満たす 1 つの解が } (n, m) = (2, 2) \text{ より, } 3 \times 2 - 2 \times 2 = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } 3(n-2) - 2(m-2) = 0, \quad 3(n-2) = 2(m-2)$$

ここで, 3 と 2 は互いに素なので, j を整数として, $n-2 = 2j$, $m-2 = 3j$ から,

$$n = 2j + 2, \quad m = 3j + 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで, $m \geq 1$, $n \geq 1$ より $j \geq 0$ となるので, $k = j + 1 \geq 1$ とおくと, $\textcircled{3}$ より,

$$n = 2(k-1) + 2 = 2k, \quad m = 3(k-1) + 2 = 3k - 1$$

よって, $\{c_k\}$ の一般項は, $c_k = a_{2k} = 12k - 5$ である。

- (2) まず, $\{a_n\}$, $\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。ここで, $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$ に注意して, $\{d_l\}$ の d_3 以降を項数 4 のグループに分け, $c_1 = 7$ から 4 項を第 1 群, $c_2 = 19$ から 4 項を第 2 群, $c_3 = 31$ から 4 項を第 3 群, … と呼ぶ。

$$1, 3 \mid \underbrace{7, 11, 13, 15}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{19, 23, 25, 27}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{31, 35, 37, 39}_{\text{第 3 群}} \mid \cdots$$

さて, $c_k = a_{2k} = b_{3k-1}$ から, 数列 $\{d_l\}$ の第 k 群には c_k , a_{2k+1} , b_{3k} , b_{3k+1} の 4 項が含まれ, $a_{2k+1} = c_k + 6$, $b_{3k} = c_k + 4$, $b_{3k+1} = c_k + 8$ より,

$$c_k < b_{3k} < a_{2k+1} < b_{3k+1}$$

これより, $d_1 = 1$, $d_2 = 3$ で, $l \geq 3$ の d_l に対して, 第 k 群の 4 項は,

$$(d_{4k-1}, d_{4k}, d_{4k+1}, d_{4k+2}) = (c_k, b_{3k}, a_{2k+1}, b_{3k+1})$$

$$(i) \quad l = 4k - 1 \text{ のとき} \quad d_l = c_k = 12k - 5 = 12 \cdot \frac{l+1}{4} - 5 = 3l - 2$$

$$(ii) \quad l = 4k \text{ のとき} \quad d_l = c_k + 4 = 12k - 1 = 12 \cdot \frac{l}{4} - 1 = 3l - 1$$

$$(iii) \quad l = 4k + 1 \text{ のとき} \quad d_l = c_k + 6 = 12k + 1 = 12 \cdot \frac{l-1}{4} + 1 = 3l - 2$$

$$(iv) \quad l = 4k + 2 \text{ のとき} \quad d_l = c_k + 8 = 12k + 3 = 12 \cdot \frac{l-2}{4} + 3 = 3l - 3$$

ここで, (iii) に $l = 1$ をあてはめると $d_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, (iv) に $l = 2$ をあてはめると $d_2 = 3 \cdot 2 - 3 = 3$ となり, とともに成立している。よって, (i)~(iv) について, l を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると, d_l は,

$$d_l = 3l - 1 \quad (l \equiv 0), \quad d_l = 3l - 2 \quad (l \equiv 1, 3), \quad d_l = 3l - 3 \quad (l \equiv 2)$$

(3) i を自然数として, $s_i = d_{4i-3} + d_{4i-2} + d_{4i-1} + d_{4i}$ とおくと, (2) より,

$$s_i = \{12(i-1)+1\} + \{12(i-1)+3\} + (12i-5) + (12i-1) = 48i - 26$$

ここで, p を自然数として, $S_l = \sum_{i=1}^l d_i$ とすると,

(i) $l = 4p$ のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p} &= \sum_{i=1}^p s_i = \sum_{i=1}^p (48i - 26) = \frac{22 + (48p - 26)}{2} \cdot p = 2p(12p - 1) \\ &= 2 \cdot \frac{l}{4} \left(12 \cdot \frac{l}{4} - 1 \right) = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

(ii) $l = 4p - 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-1} &= S_{4p} - d_{4p} = 2p(12p - 1) - (12p - 1) = (2p - 1)(12p - 1) \\ &= \left(2 \cdot \frac{l+1}{4} - 1 \right) \left(12 \cdot \frac{l+1}{4} - 1 \right) = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \end{aligned}$$

(iii) $l = 4p - 2$ のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-2} &= S_{4p-1} - d_{4p-1} = (2p - 1)(12p - 1) - (12p - 5) \\ &= 2p(12p - 13) + 6 = 2 \cdot \frac{l+2}{4} \left(12 \cdot \frac{l+2}{4} - 13 \right) + 6 = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \end{aligned}$$

(iv) $l = 4p - 3$ のとき

$$\begin{aligned} S_l = S_{4p-3} &= S_{4p-2} - d_{4p-2} = 2p(12p - 13) + 6 - \{12(p-1) + 3\} \\ &= 2p(12p - 19) + 15 = 2 \cdot \frac{l+3}{4} \left(12 \cdot \frac{l+3}{4} - 19 \right) + 15 = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \end{aligned}$$

(i)~(iv)より, l を 4 で割った余りで場合分けをし mod 4 で記述すると, S_l は,

$$S_l = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l \quad (l \equiv 0, 1), \quad S_l = \frac{3}{2} l^2 - \frac{1}{2} l - 1 \quad (l \equiv 2, 3)$$

[解説]

2 つの等差数列の共通数列が題材です。記述量はかなりのものです。なお, (2)では(1)の数列 $\{c_k\}$ に注目し, d_1 と d_2 は特別に扱い, d_3 以降を群数列の考え方で処理しています。ただ, この扱いは, 結果的には不要だったのですが。

2

問題のページへ

- (1) 正方形 ABCD の内部の点 P は、
- $PA \perp PB$
- を満たすので、

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また、} \alpha = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{PA}|} \text{ より、} |\overrightarrow{PB}| = \alpha |\overrightarrow{PA}| \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、 $\overrightarrow{PC} = x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB}$ から、

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB} = x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}$$

まず、 $|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}|$ より $|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}| = |x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}|$ となり、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から、

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + \alpha^2 |\overrightarrow{PA}|^2 = x^2 |\overrightarrow{PA}|^2 + \alpha^2 (y-1)^2 |\overrightarrow{PA}|^2$$

$$1 + \alpha^2 = x^2 + \alpha^2 (y-1)^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

また、 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ から $(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) \cdot \{x\overrightarrow{PA} + (y-1)\overrightarrow{PB}\} = 0$ となり、 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ から、

$$x |\overrightarrow{PA}|^2 - \alpha^2 (y-1) |\overrightarrow{PA}|^2 = 0, \quad x - \alpha^2 (y-1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さらに、直線 PB に関して、点 A と点 C は反対側にあるので、 $x < 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$ $\textcircled{3}\textcircled{4}$ より、 $1 + \alpha^2 = \alpha^4 (y-1)^2 + \alpha^2 (y-1)^2$ となり、 $\alpha^2 (y-1)^2 = 1$

$$y-1 = \pm \frac{1}{\alpha}, \quad x = \pm \alpha \quad (\text{複号同順})$$

すると、 $\textcircled{5}$ より、 $x = -\alpha, \quad y = 1 - \frac{1}{\alpha}$

- (2) (1) より、
- $x + y = -\alpha + 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$
- となる。

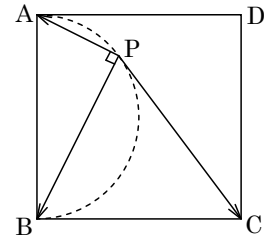
ここで、 $\alpha > 0$ から、相加平均と相乗平均の関係を用いると、 $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$ となり、

$$x + y \leq 1 - 2 = -1$$

等号成立は、 $\alpha = \frac{1}{\alpha}$ すなわち $\alpha = 1$ のときである。以上より、 $x + y$ の最大値は -1 であり、このとき、 $\textcircled{2}$ から $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{PA}|$ となり、点 P は正方形 ABCD の対角線の交点に位置する。

【解説】

平面ベクトルの図形への応用問題です。対象が正方形なので、座標の設定という方法も考えられますが、ここでは $\textcircled{1}\textcircled{2}$ を利用して x, y の連立方程式を立てるという方針で記しました。



3

問題のページへ

$$(1) \quad f(x) = \int_0^x e^{t-x} \sin(t+x) dt = e^{-x} \int_0^x e^t \sin(t+x) dt$$

$$\text{ここで, } (e^t \sin(t+x))' = e^t \sin(t+x) + e^t \cos(t+x) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(e^t \cos(t+x))' = e^t \cos(t+x) - e^t \sin(t+x) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } (e^t \sin(t+x) - e^t \cos(t+x))' = 2e^t \sin(t+x) \text{となり,}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{-x}}{2} [e^t \sin(t+x) - e^t \cos(t+x)]_0^x \\ &= \frac{e^{-x}}{2} (e^x \sin 2x - e^x \cos 2x - \sin x + \cos x) \\ &= \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) - \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

$$(2) \quad f(0) = 0 \text{なので, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \text{となり, (1)から,}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos 2x + \sin 2x + \frac{e^{-x}}{2} (\sin x - \cos x) - \frac{e^{-x}}{2} (\cos x + \sin x) \\ &= \cos 2x + \sin 2x - e^{-x} \cos x \end{aligned}$$

$$\text{これより, } f'(0) = 1 + 0 - 1 \cdot 1 = 0 \text{となるので, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{である。}$$

[解説]

定積分の計算と極限の融合問題です。(2)は微分係数の定義式に着目する点がポイントです。式変形だけでも極限は求まりますが、この場合も同様に定義式が絡みます。

4

問題のページへ

- (1) まず、 C_1 がいちばん上にあるとき、1回の試行の後に C_1 が l 番目になる確率は、どんな l に対しても $\frac{1}{n}$ である。

また、 C_1 がいちばん上にない、すなわち C_1 が l 番目($l \geq 2$)にあるとき、1回の試行の後に C_1 は l 番目または $l-1$ 番目になる。

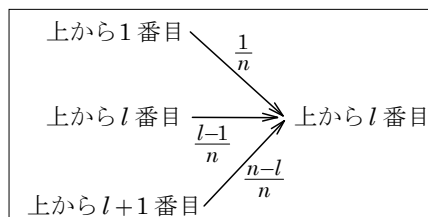
C_1 が l 番目になる場合は、いちばん上にあるカードを C_1 より上に入れたときで、そのときの確率は $\frac{l-1}{n}$ 、 C_1 が $l-1$ 番目になる場合は、いちばん上にあるカードを C_1 より下に入れたときで、そのときの確率は $\frac{n-l+1}{n}$ である。

さて、どんな l に対しても1回の試行の後に l 番目にある確率 $P(1, l) = \frac{1}{n}$ をもとに、 $P(2, l)$ を求めると、

- (a) $2 \leq l \leq n-1$ のとき

1回の試行の後と2回の試行の後の状態の推移、およびその確率は右図のようになり、

$$\begin{aligned} P(2, l) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{l-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-l}{n} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$



(b) $l=1$ のとき $P(2, 1) = \frac{1}{n}P(1, 1) + \frac{n-1}{n}P(1, 2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

(c) $l=n$ のとき $P(2, n) = \frac{1}{n}P(1, 1) + \frac{n-1}{n}P(1, n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

(a)~(c)より、どんな l に対しても $P(2, l) = \frac{1}{n}$ である。

- (2) $P(k, l) = \frac{1}{n}$ であることを、 k についての数学的帰納法により示す。

(i) $k=1$ のとき どんな l に対しても、 $P(1, l) = \frac{1}{n}$ より成立している。

(ii) $k=j$ のとき どんな l に対しても、 $P(j, l) = \frac{1}{n}$ と仮定すると、(1)と同様に、

$2 \leq l \leq n-1$ のときは、

$$\begin{aligned} P(j+1, l) &= \frac{1}{n}P(j, 1) + \frac{l-1}{n}P(j, l) + \frac{n-l}{n}P(j, l+1) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{l-1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-l}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

また、 $P(j+1, 1) = \frac{1}{n}P(j, 1) + \frac{n-1}{n}P(j, 2) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

$$P(j+1, n) = \frac{1}{n}P(j, 1) + \frac{n-1}{n}P(j, n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

(i)(ii)より、どんな l に対しても $P(k, l) = \frac{1}{n}$ ……①である。

(3) k 回の試行の後に、 C_2 が上から数えて l 番目にある確率を $Q(k, l)$ とする。

(a) 1 回の試行の後、 C_1 がいちばん上にあるとき

1 回目の試行で C_1 をいちばん上に戻すときで、このときの確率は $\frac{1}{n}$ である。そして、初めと積み上げの順番は変わらず、 C_2 は上から 2 番目である。

(b) 1 回の試行の後、 C_1 がいちばん上にないとき

1 回目の試行で C_1 を C_2 より下に入れるときで、このときの確率は $\frac{n-1}{n}$ である。そして、いちばん上は C_2 になっている。

(a)(b)より、 $k+1$ 回の試行の後に C_2 が l 番目にある確率 $Q(k+1, l)$ は、①から、

$$Q(k+1, l) = \frac{1}{n}Q(k, l) + \frac{n-1}{n}P(k, l) = \frac{1}{n}Q(k, l) + \frac{n-1}{n^2} \dots\dots\dots ②$$

②を、 $Q(k+1, l) - \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \left\{ Q(k, l) - \frac{1}{n} \right\}$ と変形すると、

$$Q(k, l) - \frac{1}{n} = \left\{ Q(1, l) - \frac{1}{n} \right\} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} \dots\dots\dots ③$$

(i) $l=1$ のとき (b)より $Q(1, 1) = \frac{n-1}{n}$ となるので、③から、

$$Q(k, 1) = \frac{1}{n} + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{1}{n} + (n-2) \left(\frac{1}{n} \right)^k$$

(ii) $l=2$ のとき (a)より $Q(1, 2) = \frac{1}{n}$ となるので、③から、

$$Q(k, 2) = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{1}{n}$$

(iii) $l \geq 3$ のとき $Q(1, l) = 0$ となるので、③から、

$$Q(k, l) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \right)^{k-1} = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} \right)^k$$

[解説]

確率と漸化式の問題ですが、かなり難しめの内容です。まず、題意を把握するために具体的に考え、予測をつけたうえで計算に取りかかりました。なお、(3)は初めの操作で場合分けをして漸化式を立式しています。

5

問題のページへ

(1) $z = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$ のとき, $z^9 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$ となり,

$$z^8 = \frac{1}{z} = \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right) = \cos \frac{2\pi}{9} - i \sin \frac{2\pi}{9}$$

すると, $\alpha = z + z^8 = 2\cos \frac{2\pi}{9}$ となり, $\cos \frac{2\pi}{9} = \frac{\alpha}{2}$ ……①

ここで, 3倍角の公式より, $\cos \frac{2\pi}{3} = 4\cos^3 \frac{2\pi}{9} - 3\cos \frac{2\pi}{9}$ となるので, ①より,

$$-\frac{1}{2} = 4 \cdot \frac{\alpha^3}{8} - 3 \cdot \frac{\alpha}{2}, \quad -1 = \alpha^3 - 3\alpha, \quad \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \dots\dots\dots②$$

②より, α は $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解なので, $f(x) = x^3 - 3x + 1$ となる。

(2) $f(x)$ を $x - \alpha$ で割ると, ②から, $f(x) = (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 3)$

すると, $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解は,

$$x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 3)}}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{12 - 3\alpha^2}}{2} \dots\dots\dots③$$

ここで, ①から, $12 - 3\alpha^2 = 12 - 3 \cdot 4\cos^2 \frac{2\pi}{9} = 12\sin^2 \frac{2\pi}{9}$ となるので, ③より,

$$\begin{aligned} x &= -\cos \frac{2\pi}{9} \pm \sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{9} = 2\left(-\frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{9} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{2\pi}{9}\right) \\ &= 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9} \pm \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{9}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} \mp \frac{2\pi}{9}\right) \end{aligned}$$

よって, $x = 2\cos \frac{4\pi}{9}$ または $x = 2\cos \frac{8\pi}{9}$ となり, ①②より,

$$2\cos \frac{4\pi}{9} = 2\left(2\cos^2 \frac{2\pi}{9} - 1\right) = 4 \cdot \frac{\alpha^2}{4} - 2 = \alpha^2 - 2$$

$$\begin{aligned} 2\cos \frac{8\pi}{9} &= 2\left(2\cos^2 \frac{4\pi}{9} - 1\right) = (\alpha^2 - 2)^2 - 2 = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 \\ &= \alpha(3\alpha - 1) - 4\alpha^2 + 2 = -\alpha^2 - \alpha + 2 \end{aligned}$$

以上より, $f(x) = 0$ の α 以外の 2 つの解は, $\alpha^2 - 2$, $-\alpha^2 - \alpha + 2$ である。

[解説]

複素数の極形式についての問題です。3倍角の公式がポイントになりますが, 問題文にその利用が暗示されています。また, 解と係数の関係を併用すると, 解答例が少し簡略になります。