1　解答解説のページへ

袋の中に, 赤玉が 3 個, 白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し, 色を確認してから, 再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに, 赤玉を A 回（ただし $0\leqq A\leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2)　N が 10 の倍数, すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$, $p(10n,\ 1)$, $\cdots$, $p(10n,\ 10n)$ のうち, 一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i)　0 以上の整数 a, 自然数 b に対して, $\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii)　0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して, $\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}\leqq 1$ を示す。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 Q(1, 2) がある。点 P_1 の座標を (3, 0) とし，x 軸上の点 P_2，P_3，…を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q，T_n，P_{n+1} は同一直線上にある。$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 点 T_1 の座標を求めよ。

(2) 点 P_2 の座標を求めよ。

(3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。

(4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

$n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式 $I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3) 次の式 $\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x < 2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x \geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x \geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　袋から玉を無作為に 1 つ取り出したとき，赤玉である確率は$\dfrac{3}{10}$，白玉である確率は$\dfrac{7}{10}$である。この試行をN回繰り返したときに，赤玉をA回取り出す確率は,

$$p(N,\ A)={}_N\mathrm{C}_A\left(\frac{3}{10}\right)^A\left(\frac{7}{10}\right)^{N-A}=\frac{N!}{A!(N-A)!}\cdot\frac{3^A\cdot 7^{N-A}}{10^N}$$

(2)　(i)　0 以上の整数a, 自然数bに対して,

(a)　$a<b$のとき　$\dfrac{b!}{a!}=(a+1)(a+2)\cdots(b-1)b<b^{b-a}$

(b)　$a=b$のとき　$\dfrac{b!}{a!}=1=b^{b-a}$

(c)　$a>b$のとき　$\dfrac{b!}{a!}=\dfrac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(a-1)a}<\dfrac{1}{b^{a-b}}=b^{b-a}$

(a)～(c)より，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}\cdots\cdots\cdots(*)$

(ii)　$0\leqq m\leqq 10n$のとき，(1)から，$p(10n,\ m)=\dfrac{(10n)!}{m!(10n-m)!}\cdot\dfrac{3^m\cdot 7^{10n-m}}{10^{10n}}$

$$p(10n,\ 3n)=\frac{(10n)!}{(3n)!(7n)!}\cdot\frac{3^{3n}\cdot 7^{7n}}{10^{10n}}$$

すると，(∗)を利用して,

$$\begin{aligned}\frac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}&=\frac{(3n)!(7n)!}{m!(10n-m)!}\cdot\frac{3^m\cdot 7^{10n-m}}{3^{3n}\cdot 7^{7n}}\\&\leqq(3n)^{3n-m}\cdot(7n)^{7n-10n+m}\cdot 3^{m-3n}\cdot 7^{10n-m-7n}\\&=3^{3n-m}\cdot n^{3n-m}\cdot 7^{-3n+m}\cdot n^{-3n+m}\cdot 3^{m-3n}\cdot 7^{3n-m}=1\end{aligned}$$

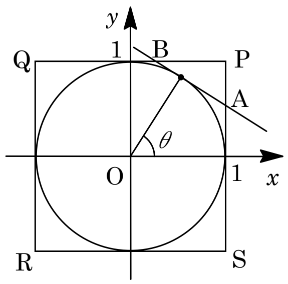
これより，$p(10n,\ 3n)\geqq p(10n,\ m)$となり，$p(10n,\ 3n)$が最大である。

［解　説］

反復試行の確率の最大値を題材とした問題です。(2)の(i)の誘導に従えば，方針に迷いは生じません。

$\boxed{2}$

問題のページへ



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は,

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線$x=1$と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて,

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から,

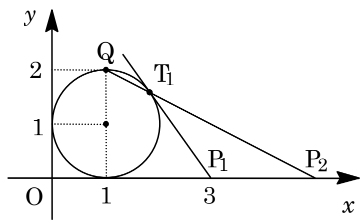
$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，Sが最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときである。

［解 説］

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

$\boxed{3}$ 問題のページへ



(1)　円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上の点 $\mathrm{T}_1(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は,

$$(x_1-1)(x-1)+(y_1-1)(y-1)=1$$

点 $\mathrm{P}_1(3,\ 0)$ を通ることより,

$$2(x_1-1)-(y_1-1)=1,\quad y_1=2x_1-2\ \cdots\cdots①$$

$(x_1-1)^2+(y_1-1)^2=1$ と連立すると, $(x_1-1)^2+(2x_1-3)^2=1$ から,

$$5{x_1}^2-14x_1+9=0,\ (x_1-1)(5x_1-9)=0$$

よって, $x_1\neq 1$ から $x_1=\dfrac{9}{5}$, ①から $y_1=\dfrac{8}{5}$ となり, $\mathrm{T}_1\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$ である。

(2)　直線 QT_1 は, 傾きが $\left(\dfrac{8}{5}-2\right)\Big/\left(\dfrac{9}{5}-1\right)=-\dfrac{1}{2}$ より, その方程式は,

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1),\quad y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

x 軸との交点は, $0=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ より $x=5$ となり, $\mathrm{P}_2(5,\ 0)$ である。

(3)　(1)と同様にして, $\mathrm{T}_n(x_n,\ y_n)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$(x_n-1)(x-1)+(y_n-1)(y-1)=1$$

点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ 0)$ を通ることより, $(p_n-1)(x_n-1)-(y_n-1)=1$

$$y_n=(p_n-1)(x_n-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

$(x_n-1)^2+(y_n-1)^2=1$ と連立すると, $(x_n-1)^2+\{(p_n-1)(x_n-1)-1\}^2=1$

$$\{1+(p_n-1)^2\}(x_n-1)^2-2(p_n-1)(x_1-1)=0$$

よって, $x_n\neq 1$ から, $x_n=\dfrac{2(p_n-1)}{1+(p_n-1)^2}+1=\dfrac{{p_n}^2}{{p_n}^2-2p_n+2}$

②から $y_n=\dfrac{2(p_n-1)^2}{{p_n}^2-2p_n+1}$ となり, $\mathrm{T}_n\left(\dfrac{{p_n}^2}{{p_n}^2-2p_n+2},\ \dfrac{2(p_n-1)^2}{{p_n}^2-2p_n+2}\right)$ である。

(4)　(2)と同様にして, 直線 QT_n は, 傾きが $\left(\dfrac{2(p_n-1)^2}{{p_n}^2-2p_n+2}-2\right)\Big/\left(\dfrac{{p_n}^2}{{p_n}^2-2p_n+2}-1\right)$

すなわち $-\dfrac{1}{p_n-1}$ より, その方程式は, $y-2=-\dfrac{1}{p_n-1}(x-1)$ である。

x 軸との交点 P_{n+1} の x 座標は, $-2=-\dfrac{1}{p_n-1}(x-1)$ より $x=2p_n-1$ となり,

$$p_{n+1}=2p_n-1,\quad p_{n+1}-1=2(p_n-1)$$

すると, $p_1=3$ から, $p_n-1=(p_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^n$ となり, $p_n=2^n+1$

よって, $\mathrm{P}_n(2^n+1,\ 0)$ である。

［解 説］

数列の図形への応用です。なお, (3)と(4)を先に記述するとよいかもしれません。

4　　問題のページへ

(1)　$n \geqq 2$ のとき，部分積分を用いて，

$$I_{n,\,m} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta\sin^m\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{m+1}\Big[\cos^{n-1}\theta\sin^{m+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\sin\theta\sin^{m+1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\sin^{m+2}\theta\,d\theta = \frac{n-1}{m+1}I_{n-2,\,m+2}$$

(2)　$x = \cos^2\theta$ とおくと，$dx = -2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 x^n(1-x)^m\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

(3)　(1)より，$I_{2n+1,\,2m+1} = \dfrac{2n}{2m+2}I_{2n-1,\,2m+3}$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1} = \frac{2n}{2m+2}\cdot\frac{2n-2}{2m+4}\cdot\frac{2n-4}{2m+6}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2m+2n}I_{1,\,2m+2n+1}$$

$$= \frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin^{2m+2n+1}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{m!n!}{(m+n)!}\Big[\frac{1}{2m+2n+2}\sin^{2m+2n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{m!n!}{2(m+n+1)!}$$

また，二項展開を用いると，(2)より，

$$I_{2n+1,\,2m+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^n\{{}_m\mathrm{C}_0 - {}_m\mathrm{C}_1x + \cdots + (-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_mx^m\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \{{}_m\mathrm{C}_0x^n - {}_m\mathrm{C}_1x^{n+1} + \cdots + (-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_mx^{n+m}\}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}x^{n+1} - \frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}x^{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}x^{n+m+1}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots + \frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}\Big\}$$

以上より，$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!} = \dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1} - \dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2} + \cdots + (-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$

［解　説］

定積分の計算についての有名問題で，要演習の１題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ に対して，$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$ となり，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^{\sin x}(\sin x-1)\cos x\,dx=\int_{-1}^{1} 2e^t(t-1)dt$$

$$=2\Big[e^t(t-1)\Big]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1} e^t\,dt=\frac{4}{e}-2\Big(e-\frac{1}{e}\Big)=\frac{6}{e}-2e$$

(2)　$f'(x)=e^{\sin x}\cos x(\sin 2x-2\cos x)+e^{\sin x}(2\cos 2x+2\sin x)$

$$=2e^{\sin x}(\sin x\cos^2 x-\cos^2 x+1-2\sin^2 x+\sin x)$$

$$=-2e^{\sin x}(\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x)=-2e^{\sin x}\sin x(\sin x-1)(\sin x+2)$$

すると，$0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

よって，$f(x)$ の最大値は 2 である。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

(3)　まず，$f(x+2\pi)=f(x)$

これより，$f(x)$ は周期 2π の周期関数なので，(2)から $f(x)\leqq 2$ である。

さて，$g(x)=(x^2+2x-2)e^x$ とおくと，$x\geqq 0$ において，

$$g'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-2)e^x=x(x+4)e^x\geqq 0$$

(i)　$x\geqq 1$ のとき

$g(x)\geqq g(1)=e>2$ となり，$g(x)\geqq f(x)$ が成り立つ。

(ii)　$0\leqq x<1$ のとき

$1<\frac{\pi}{2}$ から $x\geqq \sin x\geqq 0$ となり，$g''(x)=(x^2+6x+4)e^x\geqq 0$ より，

$$g'(x)\geqq g'(\sin x)=\sin x(\sin x+4)e^{\sin x}$$

ここで，$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと，$h'(x)=g'(x)-f'(x)$ となり，

$$h'(x)\geqq g'(\sin x)-f'(x)$$

$$=\sin x(\sin x+4)e^{\sin x}+2e^{\sin x}\sin x(\sin x-1)(\sin x+2)$$

$$=e^{\sin x}\sin x(\sin x+4+2\sin^2 x+2\sin x-4)$$

$$=e^{\sin x}\sin^2 x(2\sin x+3)\geqq 0$$

よって，$h(x)\geqq h(0)=g(0)-f(0)=0$ より，$g(x)\geqq f(x)$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つ。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。(3)の証明する不等式は，x が大きいときは明らかに成り立つので，x が 0 に近いところで示せばよいことになります。