1　解答解説のページへ

袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0\leqq A\leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$，$p(10n,\ 1)$，…，$p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}\leqq 1$ を示す。

2

解答解説のページへ

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^x\ (x>0)$ と正の実数 a について，以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $f(x)f(1-x)$ の最大値および最小値を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}$ における $\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ の最小値を求めよ。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

自然数 n に対して，和 $S_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。

(1) 各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して，$S_n = \dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表されることを示せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3) さらに，自然数 m, $n\,(m<n)$ に対して，和 $S_{m,\,n} = \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。$S_{m,\,n}$ はどんな m, $n\,(m<n)$ に対しても整数にならないことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　袋から玉を無作為に 1 つ取り出したとき，赤玉である確率は $\dfrac{3}{10}$，白玉である確率は $\dfrac{7}{10}$ である。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回取り出す確率は，

$$p(N,\ A)={}_N\mathrm{C}_A\left(\frac{3}{10}\right)^A\left(\frac{7}{10}\right)^{N-A}=\frac{N!}{A!(N-A)!}\cdot\frac{3^A\cdot 7^{N-A}}{10^N}$$

(2)　(i)　0 以上の整数 a，自然数 b に対して，

(a)　$a<b$ のとき　$\dfrac{b!}{a!}=(a+1)(a+2)\cdots(b-1)b<b^{b-a}$

(b)　$a=b$ のとき　$\dfrac{b!}{a!}=1=b^{b-a}$

(c)　$a>b$ のとき　$\dfrac{b!}{a!}=\dfrac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(a-1)a}<\dfrac{1}{b^{a-b}}=b^{b-a}$

(a)～(c)より，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ ………(＊)

(ii)　$0\leqq m\leqq 10n$ のとき，(1)から，$p(10n,\ m)=\dfrac{(10n)!}{m!(10n-m)!}\cdot\dfrac{3^m\cdot 7^{10n-m}}{10^{10n}}$

$$p(10n,\ 3n)=\frac{(10n)!}{(3n)!(7n)!}\cdot\frac{3^{3n}\cdot 7^{7n}}{10^{10n}}$$

すると，(＊)を利用して，

$$\begin{aligned}\frac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}&=\frac{(3n)!(7n)!}{m!(10n-m)!}\cdot\frac{3^m\cdot 7^{10n-m}}{3^{3n}\cdot 7^{7n}}\\&\leqq(3n)^{3n-m}\cdot(7n)^{7n-10n+m}\cdot 3^{m-3n}\cdot 7^{10n-m-7n}\\&=3^{3n-m}\cdot n^{3n-m}\cdot 7^{-3n+m}\cdot n^{-3n+m}\cdot 3^{m-3n}\cdot 7^{3n-m}=1\end{aligned}$$

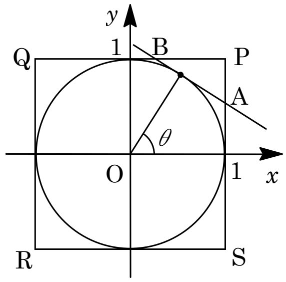
これより，$p(10n,\ 3n)\geqq p(10n,\ m)$ となり，$p(10n,\ 3n)$ が最大である。

［解 説］

反復試行の確率の最大値を題材とした問題です。(2)の(i)の誘導に従えば，方針に迷いは生じません。

2

問題のページへ



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線$x=1$と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$の面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$とおくと，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$より$1<t\leqq\sqrt{2}$となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，Sが最大となるのは，$t=\sqrt{2}$すなわち$\theta=\frac{\pi}{4}$のときである。

［解 説］

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ に対して，$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$ となり，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^{\sin x}(\sin x-1)\cos x\,dx=\int_{-1}^{1} 2e^t(t-1)dt$$

$$=2\Big[e^t(t-1)\Big]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1} e^t\,dt=\frac{4}{e}-2\Big(e-\frac{1}{e}\Big)=\frac{6}{e}-2e$$

(2)　$f'(x)=e^{\sin x}\cos x(\sin 2x-2\cos x)+e^{\sin x}(2\cos 2x+2\sin x)$

$$=2e^{\sin x}(\sin x\cos^2 x-\cos^2 x+1-2\sin^2 x+\sin x)$$

$$=-2e^{\sin x}(\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x)=-2e^{\sin x}\sin x(\sin x-1)(\sin x+2)$$

すると，$0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	0	↗	2	↘	-2

よって，$f(x)$ の最大値は 2 である。

(3)　まず，$f(x+2\pi)=f(x)$

これより，$f(x)$ は周期 2π の周期関数なので，(2)から $f(x)\leqq 2$ である。

さて，$g(x)=(x^2+2x-2)e^x$ とおくと，$x\geqq 0$ において，

$$g'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-2)e^x=x(x+4)e^x\geqq 0$$

(i)　$x\geqq 1$ のとき

$g(x)\geqq g(1)=e>2$ となり，$g(x)\geqq f(x)$ が成り立つ。

(ii)　$0\leqq x<1$ のとき

$1<\frac{\pi}{2}$ から $x\geqq \sin x\geqq 0$ となり，$g''(x)=(x^2+6x+4)e^x\geqq 0$ より，

$$g'(x)\geqq g'(\sin x)=\sin x(\sin x+4)e^{\sin x}$$

ここで，$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと，$h'(x)=g'(x)-f'(x)$ となり，

$$h'(x)\geqq g'(\sin x)-f'(x)$$

$$=\sin x(\sin x+4)e^{\sin x}+2e^{\sin x}\sin x(\sin x-1)(\sin x+2)$$

$$=e^{\sin x}\sin x(\sin x+4+2\sin^2 x+2\sin x-4)$$

$$=e^{\sin x}\sin^2 x(2\sin x+3)\geqq 0$$

よって，$h(x)\geqq h(0)=g(0)-f(0)=0$ より，$g(x)\geqq f(x)$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つ。

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。(3)の証明する不等式は，x が大きいときは明らかに成り立つので，x が 0 に近いところで示せばよいことになります。

4

問題のページへ

(1) $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ において，$f(x)=x^x$，$g(x)=f(x)f(1-x)=x^x(1-x)^{1-x}$ とすると，

$$\log g(x)=\log x^x(1-x)^{1-x}=x\log x+(1-x)\log(1-x)$$

両辺を x で微分すると，

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\log x+\frac{x}{x}-\log(1-x)-\frac{1-x}{1-x}$$
$$=\log\frac{x}{1-x}$$

x	$\frac{1}{4}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

$g(x)>0$ から，$g(x)$ の増減は右表のようになり，その最大値は $\dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}\left(x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$，最小値は $\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2) $\dfrac{1}{4}\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}$ において，$h(x)=\dfrac{f(x)f(1-x)f(a)}{f(ax)f(a(1-x))}$ とすると，

$$h(x)=\frac{x^x(1-x)^{1-x}a^a}{(ax)^{ax}(a(1-x))^{a(1-x)}}=\frac{x^x(1-x)^{1-x}a^a}{a^{ax}x^{ax}a^{a(1-x)}(1-x)^{a(1-x)}}$$
$$=x^{x-ax}(1-x)^{1-x-a(1-x)}a^{a-ax-a(1-x)}=x^{x(1-a)}(1-x)^{(1-x)(1-a)}$$
$$=\{x^x(1-x)^{1-x}\}^{1-a}=\{g(x)\}^{1-a}$$

これより，$h(x)$ の最小値については，(1)より，

(i) $1-a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-a}$ をとる。

(ii) $1-a<0\ (a>1)$ のとき　$x=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}$ で最小値 $\left(\dfrac{\sqrt[4]{27}}{4}\right)^{1-a}$ をとる。

［解 説］

微分と増減の問題です。(2)は，一見，複雑そうですが，(1)の結果がうまく利用できるように作問されていました。

5

問題のページへ

(1)　自然数 n を素因数分解すると，$2^l\times$(3 以上の素数の積)，すなわち $2^l\times$(奇数)という形に書くことができる。ただし，整数 l は，$2^k\leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ としたとき，$0\leqq l\leqq f(n)$ である。

さて，$S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ について，分母を最小公倍数 $2^{f(n)}\times$(奇数)で通分すると，$\dfrac{1}{2^{f(n)}}$ の項の分子は奇数であるが，それ以外の項の分子は $2^{f(n)-l}\times$(奇数)となり，$f(n)<l$ よりすべて偶数となる。

これより，S_n の分子は奇数となり，a_n，b_n を奇数として，$S_n=\dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表すことができる。

(2)　$n\geqq 2$ のとき $f(n)\geqq 1$ より，S_n の分子は奇数，分母は偶数となるので，S_n は整数にならない。

(3)　$m<n$ のとき，$S_{m,\,n}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ に対して，

(i)　$f(m-1)<f(n)$ のとき

$$S_{m,\,n}=S_n-S_{m-1}=\frac{a_n}{2^{f(n)}b_n}-\frac{a_{m-1}}{2^{f(m-1)}b_{m-1}}=\frac{a_nb_{m-1}-2^{f(n)-f(m-1)}a_{m-1}b_n}{2^{f(n)}b_nb_{m-1}}$$

すると，$S_{m,\,n}$ の分子は奇数，分母は偶数より，$S_{m,\,n}$ は整数にならない。

(ii)　$f(m-1)=f(n)$ のとき

このとき，$S_{m,\,n}$ の項数 $n-m+1$ は $2^{f(m-1)}$ より小となり，

$$S_{m,\,n}<\frac{1}{2^{f(m-1)}}+\frac{1}{2^{f(m-1)}}+\cdots+\frac{1}{2^{f(m-1)}}<\frac{1}{2^{f(m-1)}}\cdot 2^{f(m-1)}=1$$

よって，$S_{m,\,n}$ は整数にならない。

(i)(ii)より，$S_{m,\,n}$ はどんな $m,\,n\,(m<n)$ に対しても整数にならない。

［解　説］

非常に記述しにくい問題です。上のようにアバウトにまとめるだけでも，かなりの時間を費やしました。なお，記述は省きましたが，具体例を通して考えています。