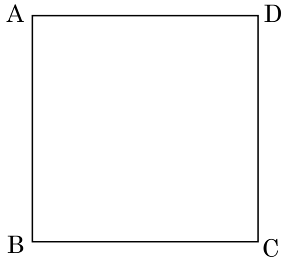
1

解答解説のページへ

右図のような 1 辺の長さ10cmの正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が35cm^2となる時刻をすべて求めよ。



2

解答解説のページへ

A, B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

・初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。

・A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。

・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。

・A, B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しはやめて，2 回勝った方をゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(2) A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(3) A がゲームの勝者になる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

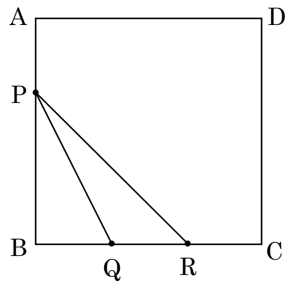
実数 a に対し，関数 $f(x)=\int_{x}^{x+1}|t+1|dt+a$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

点 R が C, D, A に達するのは, それぞれ 5 秒後, 10 秒後, 15 秒後である。そして, 出発してから t 秒後の△PQR の面積を S とし, $S=35$ となる t を求める。

(i)　$0\leqq t\leqq 5$ のとき

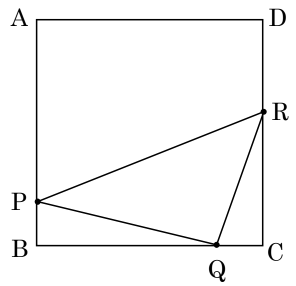


$\mathrm{PB}=10-t$, $\mathrm{QR}=2t-t=t$ より,

$$S=\frac{1}{2}t(10-t)=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$$

$S\leqq\dfrac{25}{2}$ より, $S=35$ となる場合はない。

(ii)　$5\leqq t\leqq 10$ のとき

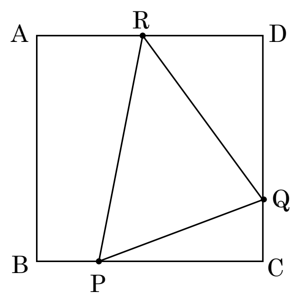


$\mathrm{PB}=\mathrm{QC}=10-t$, $\mathrm{BQ}=t$, $\mathrm{CR}=2t-10$ より,

$$S=\frac{1}{2}(2t-10+10-t)\cdot 10-\frac{1}{2}(10-t)(t+2t-10)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-15t+50$$

ここで, $S=35$ とすると, $t^2-10t+10=0$ となり, $5\leqq t\leqq 10$ から, $t=5+\sqrt{15}$

(iii)　$10\leqq t\leqq 15$ のとき



$\mathrm{PC}=\mathrm{QD}=20-t$, $\mathrm{CQ}=t-10$, $\mathrm{DR}=2t-20$ より,

$$S=\frac{1}{2}(2t-20+20-t)\cdot 10$$
$$-\frac{1}{2}(20-t)(t-10+2t-20)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-40t+300$$

ここで, $S=35$ とすると, $3t^2-80t+530=0$ となり, $10\leqq t\leqq 15$ から, $t=\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$

(i)〜(iii)より, $t=5+\sqrt{15}$, $\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$ である。

［解　説］

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　A が 0 勝 0 敗 4 引き分けして，ゲームが引き分けになるのは，A と B が同じ番号のカードを 4 回出した場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\right)^2\times4! = \frac{1}{24}$$

(2)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けして，ゲームが引き分けになるのは，A と B が同じ番号のカードを 2 回，異なる番号のカードを 2 回出した場合である。同じ番号の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りよりより，その確率は，

$$6\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\right)^2\times4! = \frac{1}{4}$$

(3)　まず，引き分けの回数が 1 または 3 で，ゲームが引き分けになるの場合はありえない。さらに，A と B の勝負は対等なので，A がゲームの勝者になる確率は，

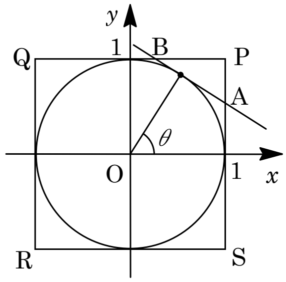
$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{48}$$

［解　説］

条件設定は複雑ですが，内容は確率の基本問題です。

3

問題のページへ



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は,

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線$x=1$と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$となることを用いて,

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$の面積をSとすると,

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$1<t\leqq\sqrt{2}$となり，$(*)$から,

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

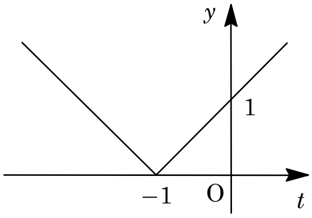
よって，Sが最大となるのは，$t=\sqrt{2}$すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときである。

［解　説］

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

$\boxed{4}$

問題のページへ



$f(x)=\int_x^{x+1}|t+1|dt+a$ に対し，右図は $y=|t+1|$ のグラフであり，さらに $g(x)=\int_x^{x+1}|t+1|dt$ とおくと，

(i)　$x<-2$ のとき

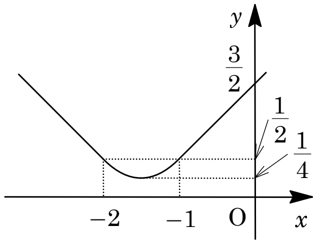
$$g(x)=\frac{1}{2}(-x-1-x-2)\cdot 1=-x-\frac{3}{2}$$

(ii)　$-2\leqq x<-1$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(-x-1)^2+\frac{1}{2}(x+2)^2=x^2+3x+\frac{5}{2}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

(iii)　$x\geqq -1$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+1+x+2)\cdot 1=x+\frac{3}{2}$$



(i)～(iii)より，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。

すると，曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつ条件は，$f(x)=0$ すなわち $g(x)=-a$ が異なる 2 実数解をもつことに対応し，$-a>\frac{1}{4}$ すなわち $a<-\frac{1}{4}$ である。曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=-a$ で囲まれる部分の面積に等しいので，

(a)　$\frac{1}{4}<-a\leqq\frac{1}{2}\ \left(-\frac{1}{2}\leqq a<-\frac{1}{4}\right)$ のとき

$y=g(x)\ (-2\leqq x\leqq -1)$ と $y=-a$ を連立すると，$x^2+3x+\frac{5}{2}+a=0$ となり，

この解 $x=\frac{-3\pm\sqrt{-4a-1}}{2}$ を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$S=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{-4a-1}\right)^3$$

(b)　$-a>\frac{1}{2}\ \left(a<-\frac{1}{2}\right)$ のとき

$y=g(x)\ (x<-2)$ と $y=-a$ を連立すると $x=a-\frac{3}{2}$，$y=g(x)\ (x>-1)$ と $y=-a$ を連立すると $x=-a-\frac{3}{2}$ となり，

$$S=\frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3+\frac{1}{2}\left[\{-1-(-2)\}+\left(-a-\frac{3}{2}\right)-\left(a-\frac{3}{2}\right)\right]\left(-a-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}(-2a+1)(-2a-1)=a^2-\frac{1}{12}$$

［解　説］

絶対値つきの関数の定積分は，グラフを利用して，台形や三角形の面積を対応させて計算しています。