1

解答解説のページへ

さいころを 7 回投げ, k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式

$$(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0,\ \ y(y+5)\leqq 0$$

の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。

3　　解答解説のページへ

1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a): (x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。

$\boxed{5}$ 解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。

1

問題のページへ

(1)　積 X_1X_2 が 18 より大となるのは，$X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$，$(6,\ 6)$ である。また，$X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 6)$，$X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって，積 X_1X_2 が 18 以下である確率は，$1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^7=\dfrac{1}{128}$ から，偶数である確率は，

$$1-\frac{1}{128}=\frac{127}{128}$$

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数でない偶数であるのは，X_1，X_2，…，X_7 のうちの 1 つが 2 または 6，残りが奇数の場合より，その確率は，${}_7\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^6=\dfrac{7}{192}$ である。

よって，積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率は，(2)より，

$$\frac{127}{128}-\frac{7}{192}=\frac{367}{384}$$

(4)　さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ R_0，R_1，R_2 とおくと，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで，自然数を 3 で割った余りについて，2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると，積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは，X_1，X_2，…，X_7 のうち，R_1 が 7 回，または R_1 が 5 回で R_2 が 2 回，または R_1 が 3 回で R_2 が 4 回，または R_1 が 1 回で R_2 が 6 回という 4 通りの場合があり，その確率は，

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_7\mathrm{C}_6\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^6=64\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{64}{2187}$$

［解　説］

確率の頻出問題です。(4)は，積が R_1 となるのは，R_0 が 0 回で，R_2 が 0 または偶数回という意味です。

２

問題のページへ

(1)　$y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l_a の方程式は,

$$y-a^2=2a(x-a)\,,\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5\ \cdots\cdots ②$の表す領域に含まれることより，①を②に代入して,

$$2ax-a^2>-x^2+2x-5\,,\ \ x^2+2(a-1)x-a^2+5>0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③が任意の x に対して成立することより,

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)=2(a^2-a-2)<0$$

すると，$(a-2)(a+1)<0$ より，$-1<a<2$ である。

(2)　直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ は，①より，$a^2-2xa+y=0$ が $-1<a<2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで，$f(a)=a^2-2xa+y=(a-x)^2-x^2+y$ とおくと,

(i)　$x\leqq -1$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，$y\leqq 4x-4$

(ii)　$-1<x<2$ のとき

(a)　$f(x)=-x^2+y>0$ より，$y>x^2$

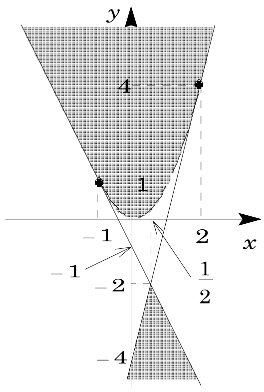
(b)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$，$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より,

$y\leqq -2x-1$，$y\leqq 4x-4$

(iii)　$x\geqq 2$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$ より，$y\leqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\geqq 0$ より，$y\geqq 4x-4$



(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D は右上図の網点部となる。

ただし，破線の境界線のみ領域に含まない。

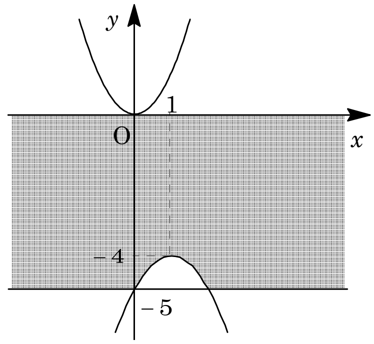
(3)　不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$ を変形すると,

$x^2>-x^2+2x-5$ より,

$$-x^2+2x-5\leqq y\leqq x^2\ \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$y(y+5)\leqq 0$ より,

$$-5\leqq y\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$



よって，連立不等式④⑤の表す領域 E は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

さて，直線 $y=-2x-1$ と放物線 $y=-x^2+2x-5$ を連立すると,

$$-2x-1=-x^2+2x-5\,,\ \ x^2-4x+4=0$$

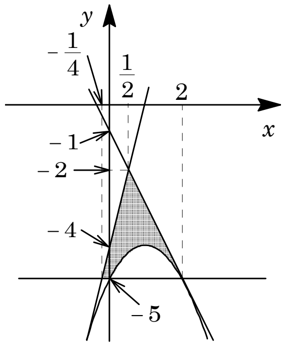
重解 $x=2$ をもつことより，$x=2$ で接する。

また，直線 $y=4x-4$ と放物線 $y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$4x-4=-x^2+2x-5,\quad x^2+2x+1=0$$

重解 $x=-1$ をもつことより，$x=-1$ で接する。

これより，領域 D と E の共通部分を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



そこで，この共通部分の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{4}\right)(-2+5)-\int_0^2(-x^2+2x-5+5)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}-\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{27}{8}-\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{49}{24}$$

［解　説］

計算量の多い問題で，時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが，図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

3

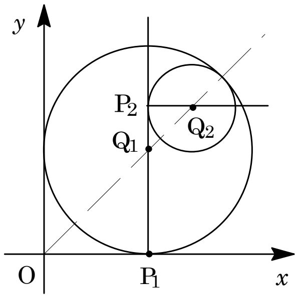
問題のページへ

(1)　$0<a<1$ から，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ は，中心 $(1-a,\ 1-a)$ で半径 $\sqrt{2}a$ である。

ここで，$a=a_1$ のとき，$C(a_1)$ が x 軸と接する条件は,

$$1-a_1=\sqrt{2}a_1,\ (\sqrt{2}+1)a_1=1$$

よって，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$



(2)　(1)より，$\mathrm{P}_1(2-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ となり，直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ は $x=2-\sqrt{2}$ である。

条件より，円 $C(a_2)$ は直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ と接することより，

$$\left|(1-a_2)-(2-\sqrt{2})\right|=\sqrt{2}a_2,\ \sqrt{2}-1-a_2=\pm\sqrt{2}a_2$$

(i)　$\sqrt{2}-1-a_2=\sqrt{2}a_2$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=\sqrt{2}-1$ より，$a_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

(ii)　$\sqrt{2}-1-a_2=-\sqrt{2}a_2$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_2=\sqrt{2}-1$ となり，$0<a_2<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_2=3-2\sqrt{2}$ である。

(3)　円 $C(a_n)$ は中心 $(1-a_n,\ 1-a_n)$ で半径 $\sqrt{2}a_n$ であり，直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ は $x=1-a_{n-1}$ または $y=1-a_{n-1}$ である。

条件より，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ が接するので,

$$\left|(1-a_n)-(1-a_{n-1})\right|=\sqrt{2}a_n,\ a_{n-1}-a_n=\pm\sqrt{2}a_n$$

(i)　$a_{n-1}-a_n=\sqrt{2}a_n$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=a_{n-1}$ より，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1}=(\sqrt{2}-1)a_{n-1}=a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

(1)より，$a_1=\sqrt{2}-1$ なので，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$

(ii)　$a_{n-1}-a_n=-\sqrt{2}a_n$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_n=a_{n-1}$ となり，$0<a_n<1$，$0<a_{n-1}<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$ である。

［解 説］

(3)では，n を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが，対称性から不要でした。なお，円 $C(a)$ は a の値にかかわらず定点 $(1,\ 1)$ を通ることに注目すると，場合分けが必要ありません。

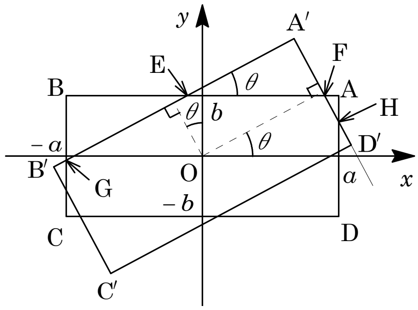
4

問題のページへ

(i)　$a \neq b$のとき

まず，$a > b$としても一般性を失わない。

右図のように，長方形の中心を原点とし，長方形 ABCD の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして，原点中心にθだけ回転した長方形を$\mathrm{A'B'C'D'}$とする。



さて，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$のときを考える。

そこで，直線$\mathrm{AB}: y = b$と直線$\mathrm{A'B'}: y = x\tan\theta + \dfrac{b}{\cos\theta}$を連立して，

$$b = x\tan\theta + \frac{b}{\cos\theta},\quad x = \frac{b}{\tan\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

よって，直線 AB と直線$\mathrm{A'B'}$の交点 E は，$\mathrm{E}\left(\dfrac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta},\ b\right)$となり，

$$\mathrm{BE} = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta} - (-a) = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

$$\triangle\mathrm{BEG} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BE}\tan\theta = \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

次に，直線$\mathrm{AB}: y = b$と直線$\mathrm{A'D'}: y = -\dfrac{1}{\tan\theta}\left(x - \dfrac{a}{\cos\theta}\right)$を連立して，

$$b = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{a}{\cos\theta}\right),\quad x = -b\tan\theta + \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，直線 AB と直線$\mathrm{A'D'}$の交点 F は，$\mathrm{F}\left(\dfrac{a - b\sin\theta}{\cos\theta},\ b\right)$となり，

$$\mathrm{AF} = a - \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta - a}{\cos\theta}$$

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\tan\theta} = \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

したがって，長方形 ABCD と長方形$\mathrm{A'B'C'D'}$の共通部分の面積$S(\theta)$は,

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= \square\mathrm{ABCD} - 2(\triangle\mathrm{BEG} + \triangle\mathrm{AFH}) \\
&= 4ab - 2\left\{\frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}\right\} \\
&= 4ab - \frac{2(a^2 + b^2 - a^2\cos\theta - b^2\cos\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= 4ab - \frac{2(1-\cos\theta)(a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \cdots\cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

なお，$\theta = 0$のときは，$S(\theta) = 4ab$である。

(ii)　$a = b$のとき

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$のとき, $(*)$において$a = b$とおくと,

$$S(\theta)=4a^2-\frac{2(1-\cos\theta)(2a^2-2a^2\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=4a^2\left\{1-\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{4a^2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{\sin\theta\cos\theta}$$

なお，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$S(\theta)=4a^2$ である。

［解　説］

最初の設定から始める必要があり，そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが，計算量はかなりハードなものがあります。なお，回転角 θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ですが，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となるのは正方形のときのみです。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1)　$a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ より，

$$\int_a^b\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx=\left[\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)\right]_a^b-\int_a^b-f'(x)\,dx$$
$$=\frac{a-b}{2}f'(b)-\frac{b-a}{2}f'(a)+\Big[f(x)\Big]_a^b$$
$$=f(b)-f(a)$$

(2)　車が時刻 0 で発進後，時刻 t での位置を $x(t)$ とすると，$0<T$ に対して，

$$L=\left|\int_0^T x'(t)\,dt\right|=\left|x(T)-x(0)\right|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，条件より，$x'(0)=x'(T)=0$ なので, (1)から，

$$x(T)-x(0)=\int_0^T\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\left|x''(t)\right|<\dfrac{4L}{T^2}$ と仮定すると，①②より，

$$L=\left|\int_0^T\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\right|\leqq\int_0^T\left|\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\right|dt=\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|\left|x''(t)\right|dt$$
$$<\frac{4L}{T^2}\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|dt=\frac{4L}{T^2}\left(\frac{T^2}{8}+\frac{T^2}{8}\right)=L$$

すると，$L<L$ となり成立しない。

よって，この車の加速度の絶対値$\left|x''(t)\right|$は，ある瞬間に$\dfrac{4L}{T^2}$以上である。

［解　説］

速度，加速度が題材になっているユニークな問題です。(1)の結論を利用すると，(2)の背理法へとスムーズに繋がります。なお，定積分の計算は，記述を省略しましたが，面積を対応させて値を求めています。