1

解答解説のページへ

横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし, 長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし, 長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また, 回転角 θ は 0 以上, 長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。

2

解答解説のページへ

すべての項が整数である数列を整数列という。p, q, r, s を実数とし，正の整数 n に対し，

$$a_n = p + qn + rn^2, \quad b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$$

とおく。このとき以下の命題を示せ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が整数列であるための必要十分条件は，p と $q + r + s$ と $2r$ と $6s$ がいずれも整数となることである。

3

解答解説のページへ

さいころを n 回 $(n \geqq 2)$ 投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

xy 平面において，長さ 1 の線分 AB を点 A が原点，点 B が点$(1,\ 0)$に重なるように置く。点 A を y 軸に沿って点$(0,\ 1)$まで移動させ，線分 AB の長さを 1 に保ったまま点 B を x 軸に沿って原点まで移動させる。このとき線分 AB が通る領域を D とする。$0 \leqq x \leqq 1$ となる実数 x に対して，点$(x,\ y)$が領域 D に含まれるような y の最大値を $f(x)$ とする。

(1)　$f(x)$ を x の式で表せ。

(2)　領域 D を x 軸を中心に回転させた立体の体積 V を求めよ。

5

解答解説のページへ

l, n, d を自然数とする。このとき自然数の積 $(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて

$$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$$

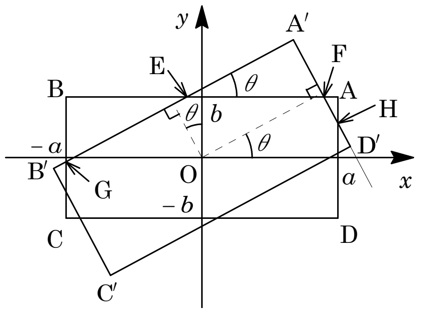
と表せることを証明せよ。

1　　問題のページへ

(i)　$a \neq b$のとき

まず，$a > b$としても一般性を失わない。

右図のように，長方形の中心を原点とし，長方形 ABCD の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして，原点中心にθだけ回転した長方形を$\mathrm{A'B'C'D'}$とする。



さて，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$のときを考える。

そこで，直線$\mathrm{AB}: y = b$と直線$\mathrm{A'B'}: y = x\tan\theta + \dfrac{b}{\cos\theta}$を連立して，

$$b = x\tan\theta + \frac{b}{\cos\theta},\quad x = \frac{b}{\tan\theta}\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

よって，直線 AB と直線$\mathrm{A'B'}$の交点 E は，$\mathrm{E}\left(\dfrac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta},\ b\right)$となり，

$$\mathrm{BE} = \frac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta} - (-a) = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

$$\triangle\mathrm{BEG} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BE}\tan\theta = \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

次に，直線$\mathrm{AB}: y = b$と直線$\mathrm{A'D'}: y = -\dfrac{1}{\tan\theta}\left(x - \dfrac{a}{\cos\theta}\right)$を連立して，

$$b = -\frac{1}{\tan\theta}\left(x - \frac{a}{\cos\theta}\right),\quad x = -b\tan\theta + \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，直線 AB と直線$\mathrm{A'D'}$の交点 F は，$\mathrm{F}\left(\dfrac{a-b\sin\theta}{\cos\theta},\ b\right)$となり，

$$\mathrm{AF} = a - \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta - a}{\cos\theta}$$

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\tan\theta} = \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

したがって，長方形 ABCD と長方形$\mathrm{A'B'C'D'}$の共通部分の面積$S(\theta)$は，

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= \square\mathrm{ABCD} - 2(\triangle\mathrm{BEG} + \triangle\mathrm{AFH}) \\
&= 4ab - 2\left\{\frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}\right\} \\
&= 4ab - \frac{2(a^2 + b^2 - a^2\cos\theta - b^2\cos\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= 4ab - \frac{2(1-\cos\theta)(a^2 + b^2 - 2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta} \cdots\cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

なお，$\theta = 0$のときは，$S(\theta) = 4ab$である。

(ii)　$a = b$のとき

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$のとき，$(*)$において$a = b$とおくと，

$$S(\theta)=4a^2-\frac{2(1-\cos\theta)(2a^2-2a^2\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=4a^2\left\{1-\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{4a^2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{\sin\theta\cos\theta}$$

なお，$\theta=0,\ \dfrac{\pi}{2}$ のときは，$S(\theta)=4a^2$ である。

［解　説］

最初の設定から始める必要があり，そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが，計算量はかなりハードなものがあります。なお，回転角 θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ ですが，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となるのは正方形のときのみです。

2

問題のページへ

(1)　まず，$a_n = p + qn + rn^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$a_1 = p + q + r$ が整数であり，しかも $a_{n+1} - a_n$ が整数であることより，

$$a_{n+1} - a_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2\} - (p + qn + rn^2) = (q + r) + 2rn$$

これより，数列 $\{a_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$p + q + r$ と $q + r$ と $2r$ が整数，すなわち p と $q + r$ と $2r$ が整数となることである。

よって，数列 $\{a_n\}$ が整数列ならば，$2r$ は整数である。

(2)　$b_n = p + qn + rn^2 + sn^3$ に対し，数列 $\{b_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$b_1 = p + q + r + s$ が整数であり，しかも $b_{n+1} - b_n$ が整数である。

ここで，$c_n = b_{n+1} - b_n$ とおくと，

$$c_n = \{p + q(n+1) + r(n+1)^2 + s(n+1)^3\} - (p + qn + rn^2 + sn^3)$$
$$= (q + r + s) + (2r + 3s)n + 3sn^2$$

(1)の結果を利用すると，数列 $\{c_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$q + r + s$ と $2r + 3s + 3s = 2r + 6s$ と $2\cdot 3s = 6s$ が整数となることである。

よって，数列 $\{b_n\}$ が整数列となる必要十分条件は，$p + q + r + s$ と $q + r + s$ と $2r + 6s$ と $6s$ が整数，すなわち p と $q + r + s$ と $2r$ と $6s$ が整数となることである。

［解　説］

整数と整式の有名問題ですが，次数下げの方法を知らないとかなり面倒です。(1)は(2)での利用を考えて必要十分条件を求めています。

３　　問題のページへ

(1)　積 X_1X_2 が 18 より大となるのは，$X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$，$(6,\ 6)$ である。また，$X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(5,\ 6)$，$X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって，積 X_1X_2 が 18 以下である確率は，$1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ から，偶数である確率は，

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数でない偶数であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より，その確率は，${}_n\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{n}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。よって，積 $X_1X_2\cdots X_n$ が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4)　さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ R_0，R_1，R_2 とおくと，いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで，自然数を 3 で割った余りについて，2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると，積 $X_1X_2\cdots X_n$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のうち，R_1 が n 回，または R_1 が $n-2$ 回で R_2 が 2 回，または R_1 が $n-4$ 回で R_2 が 4 回，……という場合がある。その確率は, n を偶奇で分けると,

(i)　n が偶数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii)　n が奇数のとき

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

さて，二項定理を用いて,

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n\ \cdots\cdots\cdots①$$

$${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+(-1)^n\,{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　n が偶数のとき

①＋②より，$2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n)=2^n$，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^{n-1}$

(ii)　n が奇数のとき

①＋②より，$2({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1})=2^n$，${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^{n-1}$

(i)(ii)より，n の偶奇にかかわらず，求める確率は，$2^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ である。

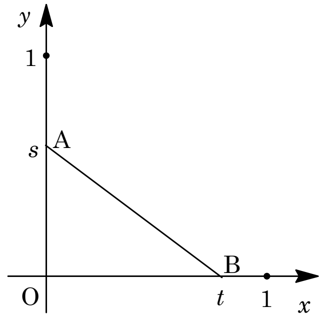
［解 説］

確率の頻出問題です。(4)は，積が R_1 となるのは，R_0 が 0 回で，R_2 が 0 または偶数回という意味です。なお，$n=7$ の場合が，他学部で出題されています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　A$(0,\ s)$，B$(t,\ 0)$ とおくと，線分 AB の方程式は，$0 \leqq x \leqq t$ として，



$$\frac{x}{t}+\frac{y}{s}=1,\ \ y=s\left(1-\frac{x}{t}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$s^2+t^2=1\ \ (s>0,\ t>0)\cdots\cdots\cdots②$

②より，$s=\sqrt{1-t^2}$ となり，①に代入すると，

$$y=\sqrt{1-t^2}\left(1-\frac{x}{t}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，x の値を固定し，$x \leqq t < 1$ において，t の値を変化させると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\left(1-\frac{x}{t}\right)+\sqrt{1-t^2}\cdot\frac{x}{t^2}$$

$$=\frac{-t^2(t-x)+x(1-t^2)}{t^2\sqrt{1-t^2}}=\frac{-(t^3-x)}{t^2\sqrt{1-t^2}}$$

t	x	$\cdots$	$\sqrt[3]{x}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗		↘	0

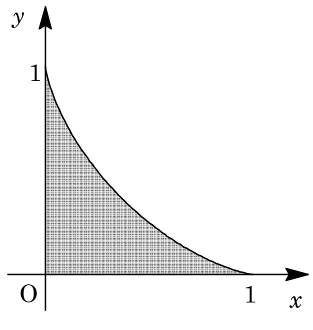
これより, y の値の増減は右表のようになる。

すると，$t=\sqrt[3]{x}$ において y は最大となり，その最大値 $f(x)$ は,

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\left(1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}\right)=\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

なお，$s=0$ のときは線分 AB : $y=0\ \ (0 \leqq x \leqq 1)$，$t=0$ のときは線分 AB : $x=0$ $(0 \leqq y \leqq 1)$ となり，$f(x)$ は成立している。

(2)　領域 D は右図の網点部となり，これを x 軸を中心に回転させた立体の体積 V は,



$$V=\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx$$

$$=\pi\int_0^1\left(1-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[x-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{16}{105}\pi$$

［解 説］

アステロイドの出現する有名な問題です。1 文字 x を固定して，y のとる値の範囲を求めています。

5

問題のページへ

自然数 $l,\ n,\ d$ に対して，$(2l+1)nd=\sum_{i=1}^{m}\{a+(i-1)d\}$ ……①より，

$$(2l+1)nd=am+\frac{1}{2}m(m-1)d\ ,\ \ am=(2l+1)nd-\frac{1}{2}m(m-1)d$$

a を分離して，$a=\left\{\frac{(2l+1)n}{m}-\frac{m-1}{2}\right\}d$ ………②

(i)　$n>l$ のとき　$m=2l+1\geqq 3$ とすると，②より，

$$a=\left\{\frac{(2l+1)n}{2l+1}-\frac{2l}{2}\right\}d=(n-l)d>0$$

(ii)　$l\geqq n$ のとき　$m=2n\geqq 2$ とすると，②より，

$$a=\left\{\frac{(2l+1)n}{2n}-\frac{2n-1}{2}\right\}d=\left(\frac{2l+1}{2}-\frac{2n-1}{2}\right)d=(l-n+1)d>0$$

(i)(ii)より，$(2l+1)nd$ は，ある自然数 a と 2 以上の整数 m を用いて①と表せる。

［解　説］

自然数 a と m を自然数 $l,\ n,\ d$ を用いて表せることを示します。ここで，m が 2 以上というのが，意外なことに大きなヒントになっています。