1　解答解説のページへ

三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 A_0，A_1，A_2，…，A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

4　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$ が任意の正の実数 $x,\ y$ に対して成立するような, 最大の実数 a の値を求めよ。

(2)　0 以上 1 以下の実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して

$$abcd \leqq \frac{4}{27} \quad \text{または} \quad (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。

5

解答解説のページへ

座標平面上の点$(x,\ y)$が

$$(x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2の最大値，およびその最大値を与えるx,yの値を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形である。

(2)　条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O, A, M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

(3)　まず, O と M が一致しないとき, (2)より，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ ………③

ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ または $\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し，③より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(ii)　$\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)(ii)より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

次に，O と M が一致するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{MI}}\neq\vec{0}$ なので，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

よって，いずれの場合も $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ であり，これより $\mathrm{IB}=\mathrm{IC}$ となり，

$$\angle\mathrm{IBC}=\angle\mathrm{ICB},\ 2\angle\mathrm{IBC}=2\angle\mathrm{ICB},\ \angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$$

したがって，△ABC は二等辺三角形である。

［解 説］

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。なお，(2)までは文理共通です。

2

問題のページへ

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと，最初，部屋 A_0 にいたので，$p_1=\dfrac{1}{k}$ である。

また，$n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは，n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて，A_1 を $\dfrac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{k}(1-p_n)\text{，}\ p_{n+1}=-\frac{1}{k}p_n+\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{k+1}=-\dfrac{1}{k}\left(p_n-\dfrac{1}{k+1}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{k+1}=\left(p_1-\frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=-\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{k+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}$ である。

［解 説］

最初の移動で場合分けをし，隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ，そのプロセスで$(*)$が導かれ，考え直したのが，上の解答例です。

3

問題のページへ

(1) 実数α，βに対し，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$を満たす2次方程式は,

$$x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$に対して，4次方程式$f(x)=0$は異なる2つの実数解α，βと2つの虚数解をもつことより, kを定数として,

$$x^4+bx^2+cx+2=\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}\right\}(x^2+kx+2a)\cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺の係数を比較すると，$k+a+1=0\cdots\cdots\cdots③$

$$2a+k(a+1)+\frac{1}{a}=b\cdots\cdots\cdots④,\ \ 2a(a+1)+\frac{k}{a}=c\cdots\cdots\cdots⑤$$

③より，$k=-a-1$となり，④⑤に代入すると,

$$b=2a-(a+1)^2+\frac{1}{a}=-a^2+\frac{1}{a}-1\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$c=2a(a+1)-\frac{a+1}{a}=2a^2+2a-\frac{1}{a}-1\cdots\cdots\cdots⑦$$

(2) ①は異なる2つの実数解をもつことより,

$$D=(a+1)^2-\frac{4}{a}=\frac{a^3+2a^2+a-4}{a}=\frac{(a-1)(a^2+3a+4)}{a}>0$$

すると，$a^2+3a+4>0$より，$a<0,\ 1<a\cdots\cdots\cdots⑧$

また, ②③から，$x^2-(a+1)x+2a=0$は2つの虚数解をもつことより,

$$D=(a+1)^2-8a=a^2-6a+1<0$$

よって，$3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}\cdots\cdots\cdots⑨$

以上より, ⑧⑨をともに満たすaの範囲は，$1<a<3+2\sqrt{2}$

(3) $g(a)=-a^2+\dfrac{1}{a}-1$とおくと，⑥より，$b=g(a)$となり，$1<a<3+2\sqrt{2}$で,

$$g'(a)=-2a-\frac{1}{a^2}<0$$

よって，$g(a)$は単調に減少し，$g(3+2\sqrt{2})<g(a)<g(1)$

すると，$g(3+2\sqrt{2})=-15-14\sqrt{2}$，$g(1)=-1$から, bのとり得る値の範囲は,

$$-15-14\sqrt{2}<b<-1$$

［解 説］

高次方程式についての基本問題です。(1)では, 最初，$f(x)$を$x^2+(a+1)x+\dfrac{1}{a}$で割ろうとしましたが, 係数が複雑になりすぎると予測し, 方針転換をして恒等式②で計算を進めました。

4

問題のページへ

(1)　任意の $x>0,\ y>0$ に対して，$\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$ より，

$$\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \geqq 1+\frac{y}{x}+a\sqrt{\frac{y}{x}}$$

ここで，$t=\dfrac{y}{x}>0$ とおくと，$\sqrt{1+t^2} \geqq 1+t+a\sqrt{t}$ から，

$$\frac{\sqrt{1+t^2}-(1+t)}{\sqrt{t}} \geqq a,\quad \sqrt{\frac{1}{t}+t}-\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right) \geqq a \cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$u=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}$ とおくと，相加平均と相乗平均の関係より，

$$u=\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}}=2\ \text{（等号は}t=1\text{のとき成立）}$$

また，$\dfrac{1}{t}+t=\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t}=u^2-2$ より，①は，

$$\sqrt{u^2-2}-u \geqq a \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(u)=\sqrt{u^2-2}-u$ とおくと，$f'(u)=\dfrac{2u}{2\sqrt{u^2-2}}-1=\dfrac{u-\sqrt{u^2-2}}{\sqrt{u^2-2}}>0$

よって，$u \geqq 2$ において，$f(u) \geqq f(2)=\sqrt{2}-2$ となり，②を満たす最大の実数 a の値は，$\sqrt{2}-2$ である。

(2)　$0 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x)=x(1-x^2)$ とおくと，

$$g'(x)=1-3x^2$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

すると，右表より，$0 \leqq g(x) \leqq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

さて，0 以上 1 以下の実数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対し，

$$0 \leqq g(a) \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad 0 \leqq g(b) \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad 0 \leqq g(c) \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}},\quad 0 \leqq g(d) \leqq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

これより，$0 \leqq g(a)g(b)g(c)g(d) \leqq \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)^4=\left(\dfrac{4}{27}\right)^2$ となり，

$$0 \leqq abcd(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \left(\frac{4}{27}\right)^2 \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$abcd>\dfrac{4}{27}$ かつ $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2)>\dfrac{4}{27}$ と仮定すると，

$$abcd(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2)>\left(\frac{4}{27}\right)^2 \cdots\cdots\cdots④$$

④は③に反することより，$abcd \leqq \dfrac{4}{27}$ または $(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \dfrac{4}{27}$

［解 説］

2 つの設問の関連はきわめて薄く，関数を設定するという方法ぐらいでした。

5

問題のページへ

まず，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$　$(r \geqq 0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$とおくと，$x^2 + y^2 = r^2$である。

条件より，$(x^2 + y^2)^2 - (3x^2 - y^2)y = 0$ ……①，$x \geqq 0$ ……②，$y \geqq 0$ ……③に対して，$r = 0$のときは$x = y = 0$となり，①②③はすべて満たされる。

そこで，以下，$r > 0$のときを考えると，②③より，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ ………④

また，①より，$(r^2)^2 - (3r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)r\sin\theta = 0$となり，

$$r = (3\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\theta = (3 - 4\sin^2\theta)\sin\theta = \sin 3\theta \text{ ………⑤}$$

④⑤より，$3\theta = \dfrac{\pi}{2}\left(\theta = \dfrac{\pi}{6}\right)$のとき，$r$は最大値1をとる。

よって，$x^2 + y^2$の最大値は1であり，このときのx, yの値は,

$$x = 1 \times \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad y = 1 \times \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

［解 説］

問題文から匂いますが，極座標の設定がすべてと言っても過言ではありません。有名な三葉線が現れます。