1

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1, 2 回目に出る目を a_2, 3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を，$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定める。

(1)　$n=0$ である確率を求めよ。

(2)　$|n|=30$ である確率を求めよ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC の面積は$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$，AB＞AC である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2) 実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

1

問題のページへ

(1)　$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定めるとき，$n\neq 0$ であるのは，a_1，a_2，a_3 がすべて異なる場合より，その確率は，$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ である。

よって，$n=0$ である確率は，$1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$ である。

(2)　$|n|=|a_1-a_2||a_2-a_3||a_3-a_1|$ より，$|n|=30$ となるためには，$30=5\times3\times2$ から，$|a_1-a_2|=5$，$|a_2-a_3|=5$，$|a_3-a_1|=5$ のいずれかが成り立つ。

(i)　$|a_1-a_2|=5$ のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6),\ (6,\ 1)$

$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6)$ では，$|6-a_3||a_3-1|=3\times2$ から，$a_3=3,\ 4$

$(a_1,\ a_2)=(6,\ 1)$ では，$|1-a_3||a_3-6|=3\times2$ から，$a_3=3,\ 4$

よって，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組は，$2\times2=4$ 通りとなる。

(ii)　$|a_2-a_3|=5$ のとき　(i)と同様に 4 通りである。

(iii)　$|a_3-a_1|=5$ のとき　(i)と同様に 4 通りである。

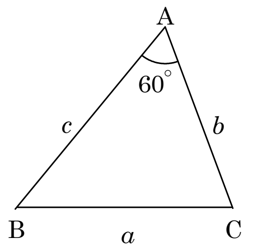
(i)～(iii)より，$|n|=30$ である確率は，$\dfrac{4\times3}{6^3}=\dfrac{1}{18}$ である。

［解　説］

(2)の設問では，場合分けがかなり繁雑ではないかと思いましたが，差が 5 に注目すると，それほどではありませんでした。

2

問題のページへ



まず，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおく。

すると，△ABC の外接円の半径が 1 から，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin 60^\circ}=2\times 1,\quad a=\sqrt{3}\cdots\cdots\cdots①$$

△ABC の面積が $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ より，$\dfrac{1}{2}bc\sin 60^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

$$bc=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1\cdots\cdots\cdots②$$

また，△ABC に余弦定理を適用すると，①より，

$$3=b^2+c^2-2bc\cos 60^\circ,\quad (b+c)^2-3bc=3$$

②より，$(b+c)^2=6+3\sqrt{3}$，$b+c=\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12+2\sqrt{27}}{2}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots③$

②③より, b, c は, 2 次方程式 $\sqrt{2}x^2-(3+\sqrt{3})x+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=0$ の 2 つの解となり，

$$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}-1)(x-\sqrt{2})=0,\quad t=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$$

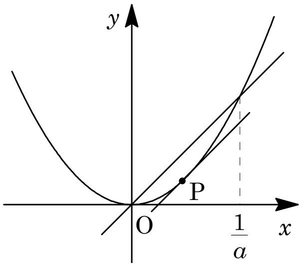
条件より, $c>b$ なので，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ である。

［解 説］

三角比の三角形への応用についての基本問題です。

3

問題のページへ



(1)　直線$l : y = x$と放物線$C : y = ax^2$……①の交点は,

$$ax^2 = x\ ,\ \ x = 0,\ \frac{1}{a}$$

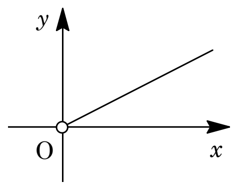
さて, $0<x<\frac{1}{a}$において, C上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$とlとの距離が最大になるのは, PにおけるCの接線がlと平行になるときである。

すなわち, Cの接線の傾きが1であるときより, ①から, $2ax = 1$, $x = \frac{1}{2a}$となり,

$$s = \frac{1}{2a}\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ t = a\left(\frac{1}{2a}\right)^2 = \frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき, Pとlとの距離dは, $d = \dfrac{\left|\frac{1}{2a} - \frac{1}{4a}\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}a} = \dfrac{\sqrt{2}}{8a}$

(2)　②③より, $t = \frac{1}{2}s$となり, $a>0$から$s>0$である。



よって, 点Pの軌跡は, 半直線$y = \frac{1}{2}x$ $(x>0)$である。また, これを図示すると, 右図のようになる。

［解 説］

(1)は図形的に解きましたが, 問題文から推測すると, 出題者の意向に沿った解法とは言えないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=90°$ の直角三角形である。

(2) 条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O，A，M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので，△ABC は AB＝AC の二等辺三角形である。

［解 説］

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。