1

解答解説のページへ

$\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形とする。$\angle$A, $\angle$B の大きさをそれぞれ A, B とおく。$A = 30^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1) X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2) X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3) X が 6 の倍数になる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2) 不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3) 不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

4

解答解説のページへ

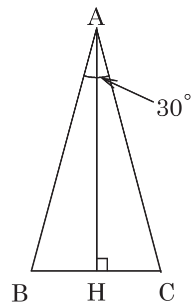
a と k を正の実数とする。$y=\dfrac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\dfrac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を a と k を用いて表せ。

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ



(1)　$A=30^\circ$ より，$B=\dfrac{1}{2}(180^\circ-30^\circ)=75^\circ$ から，

$$\tan B=\tan(45^\circ+30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$$

これから，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}=\dfrac{\mathrm{AH}}{2\mathrm{BH}}=\dfrac{1}{2}\tan B=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

(2)　(1)より，

$$\cos^2 75^\circ=\frac{1}{1+\tan^2 75^\circ}=\frac{1}{1+(2+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{4(2+\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

よって，$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B=\sin(90^\circ-B)\cos B=\cos^2 B=\cos^2 75^\circ=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

［解 説］

三角比の定義についての基本問題です。いろいろな解法が考えられますが，加法定理を利用すると，上のようになります。

2

問題のページへ

(1)　まず, 9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りが同様に確からしいとし, 事象 E の起こる確率を $P(E)$ とおく。

さて, X が 5 の倍数になる事象を A とすると, $P(\overline{A})=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{9}$ から,

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　X が 2 の倍数になる事象を B とすると, X が 10 の倍数になる事象は $A\cap B$ となり, $P(\overline{B})=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{126}$, $P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{126}$ から,

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=1-\frac{5}{9}-\frac{5}{126}+\frac{1}{126}=\frac{26}{63}\end{aligned}$$

(3)　X が 3 の倍数になる事象を C とすると, X が 6 の倍数になる事象は $B\cap C$ となり, $P(\overline{C})=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{42}$, $P(\overline{B}\cap\overline{C})=0$ から,

$$\begin{aligned}P(B\cap C)&=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(\overline{B})-P(\overline{C})+P(\overline{B}\cap\overline{C})\\&=1-\frac{5}{126}-\frac{5}{42}=\frac{53}{63}\end{aligned}$$

［解 説］

余事象の確率が求めやすく, これを起点に計算を進めていくタイプの有名題の 1 つです。3 つの設問は, 同じスタイルで解いています。

3

問題のページへ

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} $$

ここで，$0 \leqq l \leqq k-1$ とすると，$n(k-l) \leqq k(n-l)$ より，$\dfrac{n-l}{k-l} \geqq \dfrac{n}{k}$ となり，

$$ \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k $$

さらに，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ から，

$$ \left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}} $$

(2)　(1)より，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = 2^n $$

よって，$\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$

(3)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} $$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので，

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3 $$

［解 説］

3 題構成の並列型の設問の場合，(1)と(2)が独立で，ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが，本問では，(1)が，独立な(2)と(3)への誘導となっており，変わった構図です。なお，内容は二項定理の応用として，著名なものです。

4

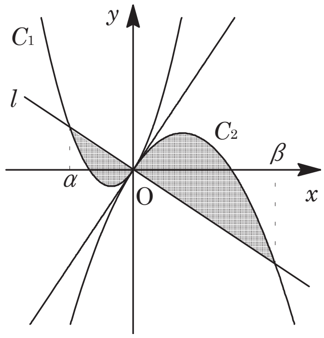
問題のページへ

(1)　原点を通る放物線C_1の方程式を，$y=\dfrac{a}{2}x^2+px$ とおくと，$y'=ax+p$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$p=k$ となり，

$$y=\frac{a}{2}x^2+kx\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，同様にして，原点を通る放物線C_2の方程式を，$y=-\dfrac{2}{a}x^2+qx$ とおくと，$y'=-\dfrac{4}{a}x+q$ となる。



条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$q=k$ となり，

$$y=-\frac{2}{a}x^2+kx\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，直線$y=kx$に垂直な直線lは，$y=-\dfrac{1}{k}x\ \cdots\cdots③$である。

①③の交点$x=\alpha\neq 0$は，$\dfrac{a}{2}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ から，$\alpha=-\dfrac{2}{a}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$となり，

$$S_1=\int_\alpha^0\left(-\frac{1}{k}x-\frac{a}{2}x^2-kx\right)dx=-\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha)^3=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

②③の交点$x=\beta\neq 0$は，$-\dfrac{2}{a}x^2+kx=-\dfrac{1}{k}x$ から，$\beta=\dfrac{a}{2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)$となり，

$$S_2=\int_0^\beta\left(-\frac{2}{a}x^2+kx+\frac{1}{k}x\right)dx=-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\beta^3=\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

よって，$S=S_1+S_2=\dfrac{2}{3a^2}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3+\dfrac{a^2}{24}\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3=\dfrac{1}{24}\left(a^2+\dfrac{16}{a^2}\right)\left(k+\dfrac{1}{k}\right)^3$

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ のとき，$k+\dfrac{1}{k}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$ より，

$$S=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)(2\sqrt{2})^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)$$

ここで，$a^2>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$a^2+\frac{16}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}=8$$

なお，等号は，$a^2=\dfrac{16}{a^2}$ すなわち $a=2$ のときに成立し，このとき S は最小値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

［解 説］

放物線とその法線で囲まれる部分の面積について，その最小値を求めるという頻出問題です。