1

解答解説のページへ

n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ，1 回目に出た目の数を x，2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n|\leqq n$ となる確率を P_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　P_n が最大となる n を求め，そのときの P_n を求めよ。

(3)　$P_n=\dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2)　$a,\ b$ を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。

3

解答解説のページへ

2 次関数 $f(x)$ は

$$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+(x^2+x)\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$$

を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $xf(x)$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上の△ABC において, 辺 AB を$4:3$に内分する点を D, 辺 BC を$1:2$に内分する点を E とし, 線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$とするとき, ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$を$\vec{p}$, $\vec{q}$で表せ。

(2) 点 O が△ABC の外接円の中心になるとき, 3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$|x-1|+|y-1|\leqq 1$ を満たす $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (1,\ 2)$

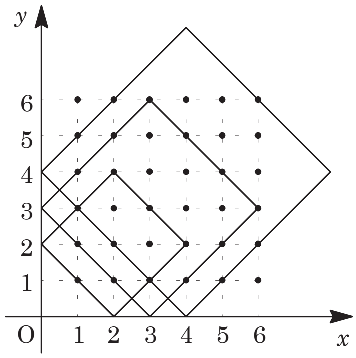
よって，$P_1=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$ である。

(2)　$n\geqq 2$ に対し，$|x-n|+|y-n|\leqq n$ ……(＊)を満たす 1 以上 6 以下の整数 $(x,\ y)$ の個数を求める。

(i)　$n=2,\ 3,\ 4$ のとき

右図において，(＊)を満たす正方形の内部または辺上にある格子点 $(x,\ y)$ は，$n=2$ のとき 11 個，$n=3$ のとき 23 個，$n=4$ のとき 31 個であり，

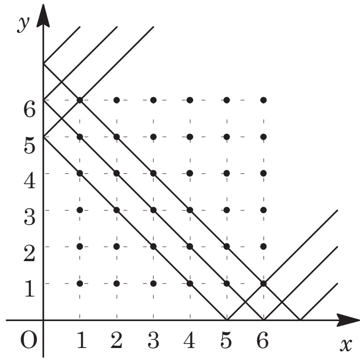
$$P_2=\frac{11}{36},\ P_3=\frac{23}{36},\ P_4=\frac{31}{36}$$



(ii)　$n\geqq 5$ のとき

右図において，(＊)を満たす $(x,\ y)$ は，直線 $x+y=n$ の上側または線上にある格子点となり，$n=5$ のとき 30 個，$n=6$ のとき 26 個，$n=7$ のとき 21 個，…となり，

$$P_5=\frac{30}{36},\ P_6=\frac{26}{36},\ P_7=\frac{21}{36},\ \cdots$$



また，(＊)を満たす格子点の個数は，n の増加に伴って，明らかに単調に減少する。

(i)(ii)より，P_n は $n=4$ のとき最大となり，$P_4=\dfrac{31}{36}$ である。

(3)　(2)より，$P_n=\dfrac{1}{36}$ となるのは，(＊)を満たす $(x,\ y)$ が 1 個の場合であり，

$(x,\ y)=(6,\ 6)$

よって，$n=12$ である。

［解　説］

(＊)を満たす $(x,\ y)$ の個数をすばやく数えるためには，上の解のように，図示するのが最も安全でしょう。ただ，その実行を決断するには，時間がかかります。

2

問題のページへ

(1)　x は有理数より, $p\,(>0)$, q を互いに素な整数として，$x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ，

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より，$7x^2$ は整数なので，p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので，p^2 と q^2 も互いに素であり，p^2 は素数 7 の約数，すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より，$p=1$ となり，つまり x は整数である。

(2)　k, l を整数とし, a, b を偶数，奇数に分けて考える。

(i)　$a=2k$，$b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii)　$a=2k$，$b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii)　$a=2k+1$，$b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv)　$a=2k+1$，$b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より，a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき，$r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり，しかも r が整数より，$7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

そこで，(2)の結果を用いると，r と $2s$ はともに偶数となることより，s は整数である。

［解 説］

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

3

問題のページへ

(1)　$xf(x)=\dfrac{2}{3}x^3+(x^2+x)\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ に対し，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=a$ とおくと，

$$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+a(x^2+x)+\int_0^x f(t)\,dt\ \cdots\cdots\cdots①$$

①は $x=0$ のとき成立し，そこで両辺を微分すると，

$$f(x)+xf'(x)=2x^2+a(2x+1)+f(x),\ \ xf'(x)=2x^2+a(2x+1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

$f(x)$ は 2 次関数なので，②の両辺の定数項を比較すると，$a=0$ である。

②より，$xf'(x)=2x^2$，$f'(x)=2x$ となり, C を定数として,

$$f(x)=x^2+C$$

すると，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=0$ より，$\dfrac{1}{3}+C=0$ となり，$C=-\dfrac{1}{3}$

以上より，$f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　$g(x)=xf(x)=x^3-\dfrac{1}{3}x$ とおくと，

$$g'(x)=3x^2-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x+1)(3x-1)$$

$x\geqq 0$ における $g(x)$ の増減は右表のようになり，最小値は，$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{27}$ である。

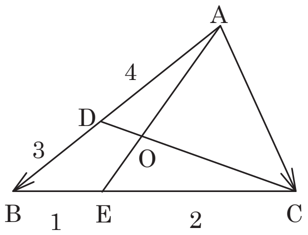
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

［解 説］

計算量を減少させるために，数Ⅱの範囲外ですが，積の微分法を利用して解いています。

4

問題のページへ



(1)　△ABE と直線 CD に対して，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=1,\quad \frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\vec{p}+\vec{q}}{3}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}$$

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}-\vec{p}=-\frac{5}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}-\vec{q}=\frac{4}{9}\vec{p}-\frac{7}{9}\vec{q}$$

条件より，点 O は△ABC の外心なので，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$

$$|4\vec{p}+2\vec{q}|=|-5\vec{p}+2\vec{q}|\cdots\cdots①,\quad |4\vec{p}+2\vec{q}|=|4\vec{p}-7\vec{q}|\cdots\cdots②$$

①より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=25|\vec{p}|^2-20\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2$，$|\vec{p}|^2=4\vec{p}\cdot\vec{q}$

②より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=16|\vec{p}|^2-56\vec{p}\cdot\vec{q}+49|\vec{q}|^2$，$5|\vec{q}|^2=8\vec{p}\cdot\vec{q}$

さて，$\vec{p}\cdot\vec{q}=k$ とおくと，$\mathrm{AB}^2=|\vec{p}|^2=4k$，$\mathrm{CA}^2=|\vec{q}|^2=\frac{8}{5}k$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=|\vec{p}-\vec{q}|^2=4k-2k+\frac{8}{5}k=\frac{18}{5}k$$

よって，$\mathrm{AB}^2:\mathrm{BC}^2:\mathrm{CA}^2=4k:\frac{18}{5}k:\frac{8}{5}k=10:9:4$

［解 説］

平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。