1

解答解説のページへ

1 から 7 までの番号が書かれた 7 枚のカードがある。この中から 4 枚のカードを同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和から，取り出されなかった 3 枚のカードに書かれた 3 個の数の和を引いた値を X とする。

(1)　$X=-8$ となる確率を求めよ。

(2)　X が負となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を実数とする。x についての方程式$|x^2+ax+2a|=a+1$が異なる実数解をちょうど2個もつようなaの値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

平面上で AB = 3 となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし, 点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き, 2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし, 線分 CD は点 A を通り, 線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和を Y, 取り出されなかったカードに書かれた 3 個の数の和を Z とおくと,

$$Y+Z=1+2+3+4+5+6+7\,,\ Y+Z=28$$

条件より，$X=Y-Z=(28-Z)-Z=28-2Z$

さて, 7 枚のカードから, 取り出されない 3 枚のカードを選ぶ場合は ${}_7\mathrm{C}_3$ 通りあり, これらは同様に確からしい。

ここで，$X=28-2Z=-8$ のとき，$Z=18$ となり, 取り出されなかったカードに書かれた 3 個の数は $(5,\ 6,\ 7)$ のみである。

よって，$X=-8$ となる確率は $\dfrac{1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{35}$ となる。

(2)　$1+2+3\leqq Z\leqq 5+6+7$ より $6\leqq Z\leqq 18$ である。

さて，$X=28-2Z<0$ となるのは $Z>14$ より，$Z=15,\ 16,\ 17,\ 18$

(i)　$Z=18$ のとき　(1)より 1 通り

(ii)　$Z=17$ のとき　$(4,\ 6,\ 7)$ より 1 通り

(iii)　$Z=16$ のとき　$(3,\ 6,\ 7)$，$(4,\ 5,\ 7)$ より 2 通り

(iv)　$Z=15$ のとき　$(2,\ 6,\ 7)$，$(3,\ 5,\ 7)$，$(4,\ 5,\ 6)$ より 3 通り

よって，$X<0$ となる確率は, $\dfrac{1+1+2+3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{5}$ となる。

(3)　X の期待値を $E(X)$ と表すと,

$$E(X)=E(28-2Z)=28-2E(Z)$$

さて，取り出されない 3 枚のカードに書かれた数の和の期待値 $E(Z)$ は,

$$E(Z)=(1+2+3+4+5+6+7)\times\frac{1}{7}\times 3=12$$

よって，$E(X)=28-2\times 12=4$

［解 説］

取り出されたカードよりは, 取り出されなかったカードに注目した方が簡単です。また, (3)ではすべての事象を網羅する代わりに, 範囲外ですが, 数 C 範囲の知識を利用しました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

$\left|x^2+ax+2a\right|=a+1$に対して，$\left|\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+2a\right|=a+1$………(＊)

(i)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a\geqq 0$ $(0\leqq a\leqq 8)$のとき

(＊)が異なる実数解を 2 個もつ条件は，$a+1>-\dfrac{a^2}{4}+2a$

$a^2-4a+4>0$，$(a-2)^2>0$，$a\neq 2$

よって，$0\leqq a<2$，$2<a\leqq 8$

(ii)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ $(a<0,\ 8<a)$のとき

(＊)が異なる実数解を 2 個もつ条件は，$a+1=0$ または $a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$

(ii-i)　$a+1=0$ のとき　$a=-1$

(ii-ii)　$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$のとき

$a^2-12a-4<0$，$6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

よって，$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より, (＊)が異なる実数解を 2 個もつ条件は,

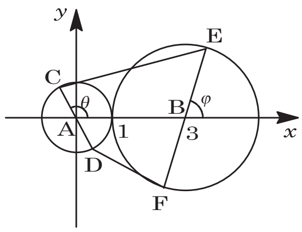
$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

［解 説］

グラフをイメージしながら解いています。x 軸に関して折り返しのない場合が(i), ある場合が(ii)です。

3

問題のページへ



まず，右図のように，点 A を原点として，点$B(3,\ 0)$であるように座標系を設定する。

さて，条件より，点 C, D は A を中心とする半径 1 の円上にあるので，$C(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$D(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$とおくことができる。

また，点 E, F は B を中心とする半径 2 の円上にあるので，$E(3+2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi)$，$F(3-2\cos\varphi,\ -2\sin\varphi)$とおくことができる。

これより，$\overrightarrow{CE}=(3+2\cos\varphi-\cos\theta,\ 2\sin\varphi-\sin\theta)$

$\overrightarrow{DF}=(3-2\cos\varphi+\cos\theta,\ -2\sin\varphi+\sin\theta)$

よって，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}&=9-(2\cos\varphi-\cos\theta)^2-(2\sin\varphi-\sin\theta)^2\\&=9-4-1+4(\cos\varphi\cos\theta+\sin\varphi\sin\theta)\\&=4+4\cos(\varphi-\theta)\end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$は，$\cos(\varphi-\theta)=1$のとき最大値 8 をとり，$\cos(\varphi-\theta)=-1$のとき最小値 0 をとる。

［解 説］

座標系を設定し，内積の成分計算をしましたが，計算は予想外と言ってもよいほど少なめでした。

4

問題のページへ

(1)　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき，$n-1$，$n+1$ は連続する偶数となり，一方は 4 の倍数, もう一方は 4 の倍数でない偶数である。

よって，n^2-1 は 8 の倍数である。

(2)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ より，$n-1$，n，$n+1$ は連続する 3 つの整数なので, いずれか 1 つは 3 の倍数である。

よって，n^5-n は 3 の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)$

$$=(n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2)+5\}$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

これより，$n-2$，$n-1$，n，$n+1$，$n+2$ は連続する 5 つの整数なので, いずれか 1 つは 5 の倍数である。また，$5(n-1)n(n+1)$ は 5 の倍数である。

よって，n^5-n は 5 の倍数となる。

そこで, (1)から $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$ は 8 の倍数, (2)から n^5-n は 3 の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より，n^5-n は $8\times3\times5=120$ の倍数となる。

［解 説］

(3)では，n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし, 記述量が多くなるため, (2)をヒントに式変形を考えたのが上の解です。