1

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=5\sin A$，$\mathrm{CA}=3$ であるとする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) $\triangle$ABC の内接円の半径を求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 a に対し, 2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ を通り, $1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。この中からカードを 3 枚同時に取り出す。取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち，最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする。

(1)　$X=3$ である確率を求めよ。

(2)　X の期待値を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

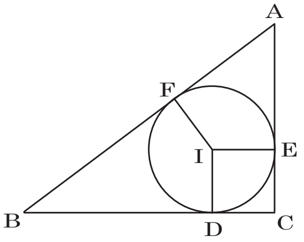
また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　正弦定理より，

$$\frac{5\sin A}{\sin A} = \frac{5}{\sin C}$$

すると，$\sin C = 1$ より，$C = 90°$ となる。

よって，$\mathrm{BC} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

(2)　内接円の中心を I，半径を r とする。また，I から辺 BC，CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。

このとき，四角形 IDCE は正方形となり，$\mathrm{CD} = \mathrm{CE} = r$ である。

これより，$\mathrm{BF} = \mathrm{BD} = 4 - r$，$\mathrm{AF} = \mathrm{AE} = 3 - r$ となり，

$$(4 - r) + (3 - r) = 5$$

よって，$r = 1$

［解 説］

△ABC が直角三角形であるのは，問題文から予測できます。しかし，筋道を立てて示すということは必要です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=0$ すなわち $x^2-ax-a^2+5a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$D=a^2-4(-a^2+5a)>0$$

まとめると，$5a(a-4)>0$ より，$a<0$，$4<a$

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点 $x=\alpha$，β が $1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ を満たす条件は，まず(1)から，$a<0$，$4<a$ ………①

また，$y=f(x)$ のグラフの軸が $x=\dfrac{a}{2}$ なので，$1<\dfrac{a}{2}<3$ より，

$$2<a<6 \text{ ………②}$$

さらに，$f(1)=1-a-a^2+5a\geqq 0$ より，$a^2-4a-1\leqq 0$

$$2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5} \text{ ………③}$$

$f(3)=9-3a-a^2+5a\geqq 0$ より，$a^2-2a-9\leqq 0$

$$1-\sqrt{10}\leqq a\leqq 1+\sqrt{10} \text{ ………④}$$

①～④の共通範囲をとって，$4<a\leqq 1+\sqrt{10}$

［解 説］

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

3

問題のページへ

(1)　$X=3$となるのは，取り出された 3 枚のカードが，1 と 2，および 3 以上が 1 枚の場合なので，その確率は，

$$\frac{10-2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$$

(2)　3 枚のカードに書かれた 3 つの整数を a，b，c（$a<b<c$）とおき，$b=k$ のときの $a+b$ の期待値を E_k とすると，

$$E_k=\{(1+k)+(2+k)+\cdots+(k-1+k)\}\cdot\frac{10-k}{{}_{10}\mathrm{C}_3}$$

$$=\frac{(1+k+k-1+k)(k-1)}{2}\cdot\frac{10-k}{120}=\frac{1}{80}k(k-1)(10-k)$$

すると, X の期待値 E は, $2\leqq k\leqq 9$ から,

$$E=\frac{1}{80}\sum_{k=2}^{9}k(k-1)(10-k)=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}k(k-1)(10-k)$$

$$=\frac{1}{80}\sum_{k=1}^{9}(-k^3+11k^2-10k)$$

$$=\frac{1}{80}\left(-\frac{1}{4}\cdot 9^2\cdot 10^2+11\cdot\frac{1}{6}\cdot 9\cdot 10\cdot 19-10\cdot\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 10\right)$$

$$=\frac{33}{4}$$

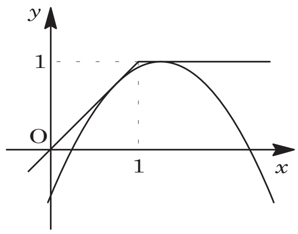
［解 説］

(2)を(1)の続きとして考え，$X=4$，5，…，17 の確率を順に求めていくという見方もできます。しかし，これは大変なので，アプローチの方法を変更しました。

4

問題のページへ

(1)　$y = g(x)$ のグラフが $y = f(x)$ のグラフと 2 点で接することより, $p>1$ として,



$$g(x) = -(x-p)^2+1$$

すると，$y = g(x)$ のグラフと直線 $y = x$ との共有点は,

$$x = -(x-p)^2+1,\ x^2-(2p-1)x+p^2-1 = 0$$

$x<1$ において接することより,

$$D = (2p-1)^2-4(p^2-1) = 0 \cdots\cdots\cdots①$$

$$x = \frac{2p-1}{2}<1 \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$1-4p+4 = 0$，$p = \dfrac{5}{4}$

この値は $p>1$ を満たし，しかも②は $x = \dfrac{3}{4}<1$ となり，成立しているので,

$$g(x) = -\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+1 = -x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}$$

よって，$a = \dfrac{5}{2}$，$b = -\dfrac{9}{16}$

(2)　$x<1$ における接点は②より $x = \dfrac{3}{4}$，$x>1$ における接点は $x = p = \dfrac{5}{4}$ から，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_{\frac{3}{4}}^{1}\left\{x-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left\{1-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx$$

$$= \int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2dx = \frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{1}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{96}$$

［解 説］

微積分の基本問題です。$y = f(x)$ のグラフが複雑ではないので，直感に依存した解となっています。