第１問

解答解説のページへ

[1]　(1)　$k>0$，$k \neq 1$ とする。関数 $y=\log_k x$ と $y=\log_2 kx$ のグラフについて考えよう。

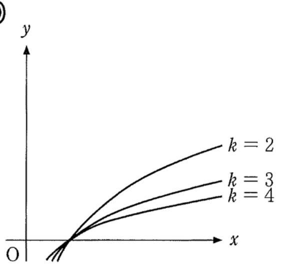
(i)　$y=\log_3 x$ のグラフは点 $(27,\ \boxed{\text{ア}})$ を通る。また，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ のグラフは点 $(\boxed{\text{イウ}},\ 1)$ を通る。

(ii)　$y=\log_k x$ のグラフは，k の値によらず定点 $(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$ を通る。

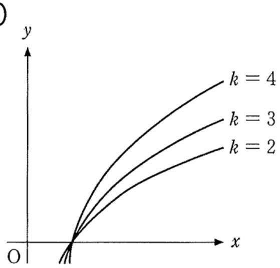
(iii)　$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，$y=\log_k x$ のグラフの概形は $\boxed{\text{カ}}$，$y=\log_2 kx$ のグラフの概形は $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから１つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

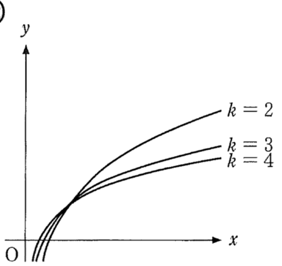
⓪



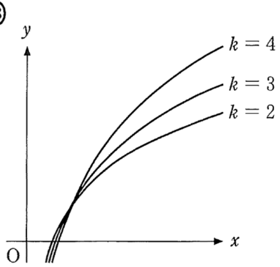
①



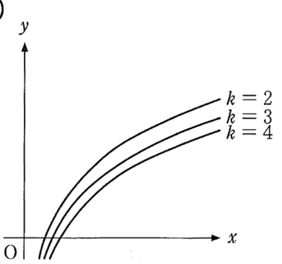
②



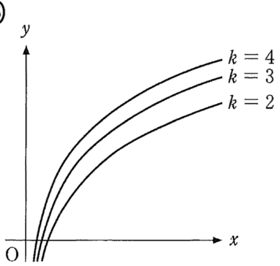
③



④



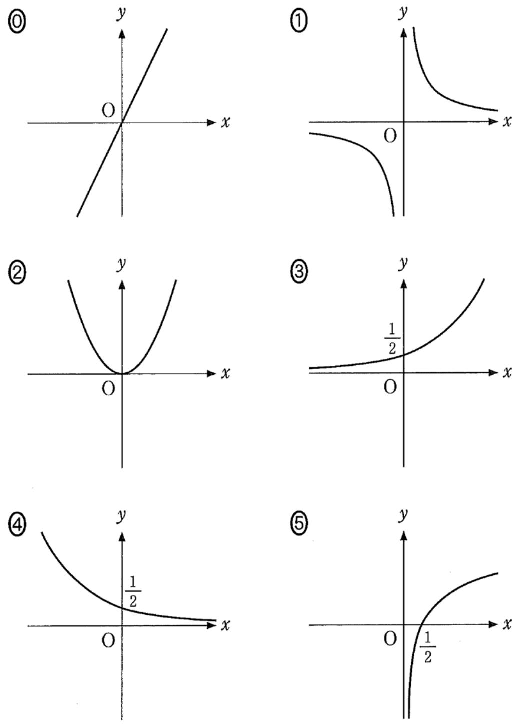
⑤



(2)　$x>0$，$x \neq 1$，$y>0$ とする。$\log_x y$ について考えよう。

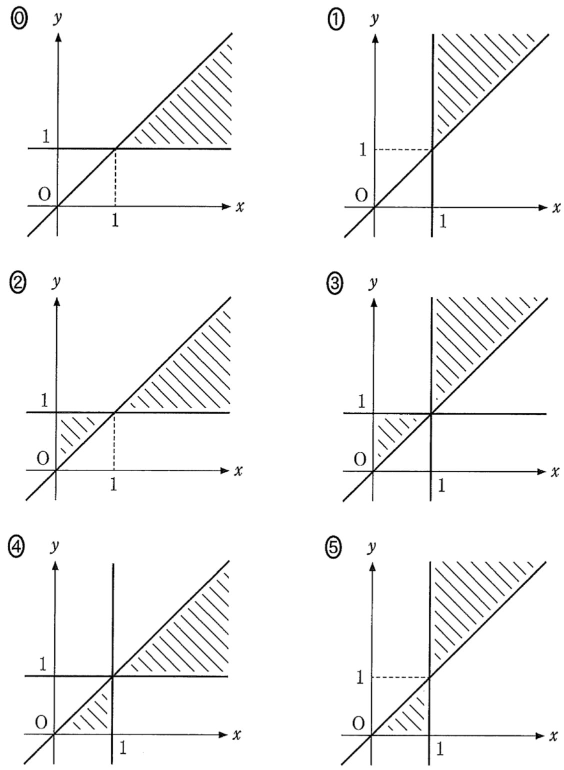
(i)　座標平面において，方程式 $\log_x y=2$ の表す図形を図示すると，$\boxed{\text{ク}}$ の $x>0$，$x \neq 1$，$y>0$ の部分となる。

$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから１つ選べ。



(ii) 座標平面において，不等式 $0 < \log_x y < 1$ の表す領域を図示すると，$\boxed{\text{ケ}}$ の斜線部分となる。ただし，境界（境界線）は含まない。

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから1つ選べ。



[2] $S(x)$ を x の2次式とする。x の整式 $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする。ただし，$S(x)$ と $P(x)$ の係数は実数であるとする。

(1) $P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$，$S(x)=x^2+4x+7$ の場合を考える。方程式 $S(x)=0$ の解は $x=\boxed{\text{コサ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{シ}}}\,i$ である。また，$T(x)=\boxed{\text{ス}}x-\boxed{\text{セ}}$，$U(x)=\boxed{\text{ソタ}}$ である。

(2) 方程式 $S(x)=0$ は異なる2つの解 α，β をもつとする。このとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと同値な条件を考える。

(i) 余りが定数になるときを考えてみよう。

仮定から，定数 k を用いて $U(x)=k$ とおける。このとき，$\boxed{\text{チ}}$。したがって，余りが定数になるとき，$\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つ。

$\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから1つ選べ。

⓪ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

① $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $P(\alpha)=P(\beta)=k$ が成り立つことから，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ となることが導かれる

② $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(x)=S(x)T(x)+k$ となることが導かれる。また，$S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

③ $P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ となることが導かれる

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ $T(\alpha)=T(\beta)$	① $P(\alpha)=P(\beta)$
② $T(\alpha)\neq T(\beta)$	③ $P(\alpha)\neq P(\beta)$

(ii) 逆に $\boxed{\text{ツ}}$ が成り立つとき，余りが定数になるかを調べよう。

$S(x)$ が2次式であるから，m，n を定数として $U(x)=mx+n$ とおける。$P(x)$ を $S(x)$，$T(x)$，m，n を用いて表すと，$P(x)=\boxed{\text{テ}}$ となる。この等式の x に α，β をそれぞれ代入すると $\boxed{\text{ト}}$ となるので，$\boxed{\text{ツ}}$ と $\alpha\neq\beta$ より $\boxed{\text{ナ}}$ となる。以上から余りが定数になることがわかる。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ $(mx+n)S(x)T(x)$	① $S(x)T(x)+mx+n$
② $(mx+n)S(x)+T(x)$	③ $(mx+n)T(x)+S(x)$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪	$P(\alpha)=T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=T(\beta)$
①	$P(\alpha)=m\alpha+n$ かつ $P(\beta)=m\beta+n$
②	$P(\alpha)=(m\alpha+n)T(\alpha)$ かつ $P(\beta)=(m\beta+n)T(\beta)$
③	$P(\alpha)=P(\beta)=0$
④	$P(\alpha)\neq 0$ かつ $P(\beta)\neq 0$

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪	$m\neq 0$	①	$m\neq 0$ かつ $n=0$
②	$m\neq 0$ かつ $n\neq 0$	③	$m=0$
④	$m=n=0$	⑤	$m=0$ かつ $n\neq 0$
⑥	$n=0$	⑦	$n\neq 0$

(i), (ii)の考察から，方程式 $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 α，β をもつとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になることと $\boxed{\text{ツ}}$ であることは同値である。

(3)　p を定数とし，$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2$ の場合を考える。$P(x)$ を $S(x)$ で割った余りが定数になるとき，$p=\boxed{\text{ニヌ}}$ となり，その余りは $\boxed{\text{ネノ}}$ となる。

第２問

解答解説のページへ

m を $m>1$ を満たす定数とし，$f(x)=3(x-1)(x-m)$ とする。また，$S(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする。関数 $y=f(x)$ と $y=S(x)$ のグラフの関係について考えてみよう。

(1)　$m=2$ のとき，すなわち，$f(x)=3(x-1)(x-2)$ のときを考える。

(i)　$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii)　$S(x)$ を計算すると

$$S(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \left(3t^2-\boxed{\text{ウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}\right)dt$$

$$=x^3-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2+\boxed{\text{キ}}\,x$$

であるから，$x=\boxed{\text{ク}}$ のとき，$S(x)$ は極大値 $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ をとり，$x=\boxed{\text{サ}}$ のとき，$S(x)$ は極小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとることがわかる。

(iii)　$f(3)$ と一致するものとして，次の ⓪～④ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ス}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪　$S(3)$

①　2 点 $(2,\ S(2))$，$(4,\ S(4))$ を通る直線の傾き

②　2 点 $(0,\ 0)$，$(3,\ S(3))$ を通る直線の傾き

③　関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾き

④　関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ f(3))$ における接線の傾き

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を S_1，$1\leqq x\leqq m$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_1=\boxed{\text{セ}}$，$S_2=\boxed{\text{ソ}}$ である。

$S_1=S_2$ となるのは $\boxed{\text{タ}}=0$ のときであるから，$S_1=S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{チ}}$ である。また，$S_1>S_2$ が成り立つような $f(x)$ に対する関数 $y=S(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

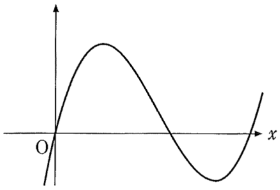
$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

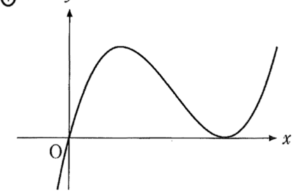
⓪　$\int_0^1 f(x)dx$	①　$\int_0^m f(x)dx$	②　$\int_1^m f(x)dx$
③　$\int_0^1 \{-f(x)\}dx$	④　$\int_0^m \{-f(x)\}dx$	⑤　$\int_1^m \{-f(x)\}dx$

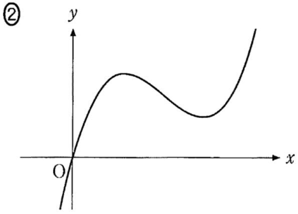
$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

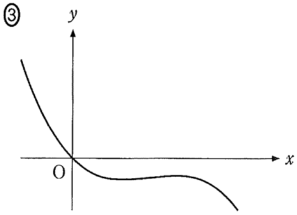
⓪ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$	① $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx$
② $\displaystyle\int_1^m f(x)\,dx$	③ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^m f(x)\,dx$
④ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx-\int_1^m f(x)\,dx$	⑤ $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^m f(x)\,dx$
⑥ $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx$	

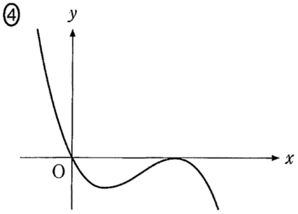
$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

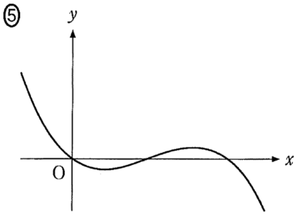
⓪


①


②


③


④


⑤


(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフの特徴から関数 $y=S(x)$ のグラフの特徴を考えてみよう。

関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\boxed{\text{テ}}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して

$$\int_{1-p}^{1} f(x)\,dx=\int_m^{\boxed{\text{ト}}} f(x)\,dx \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

が成り立ち，$M=\boxed{\text{テ}}$ とおくと $0<q\leqq M-1$ であるすべての実数 q に対して

$$\int_{M-q}^{M} \{-f(x)\}\,dx=\int_M^{\boxed{\text{ナ}}} \{-f(x)\}\,dx \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

が成り立つことがわかる。すべての実数 α，β に対して

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = S(\beta) - S(\alpha)$$

が成り立つことに注意すれば，①と②はそれぞれ

$$S(1-p)+S(\boxed{\text{ト}}) = \boxed{\text{ニ}},\quad 2S(M) = \boxed{\text{ヌ}}$$

となる。

以上から，すべての正の実数 p に対して，2点 $(1-p,\ S(1-p))$，$(\boxed{\text{ト}},\ S(\boxed{\text{ト}}))$ を結ぶ線分の中点についての記述として，後の ⓪～⑤ のうち，最も適当なものは $\boxed{\text{ネ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ m	① $\dfrac{m}{2}$	② $m+1$	③ $\dfrac{m+1}{2}$

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

⓪ $1-p$	① p	② $1+p$
③ $m-p$	④ $m+p$	

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ $M-q$	① M	② $M+q$
③ $M+m-q$	④ $M+m$	⑤ $M+m+q$

$\boxed{\text{ニ}}$ の解答群

⓪ $S(1)+S(m)$	① $S(1)+S(p)$	② $S(1)-S(m)$
③ $S(1)-S(p)$	④ $S(p)-S(m)$	⑤ $S(m)-S(p)$

$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群

⓪ $S(M-q)+S(M+m-q)$	① $S(M-q)+S(M+m)$
② $S(M-q)+S(M)$	③ $2S(M-q)$
④ $S(M+q)+S(M-q)$	⑤ $S(M+m+q)+S(M-q)$

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ x 座標は p の値によらず1つに定まり，y 座標は p の値により変わる。

① x 座標は p の値により変わり，y 座標は p の値によらず1つに定まる。

② 中点は p の値によらず1つに定まり，関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。

③ 中点は p の値によらず1つに定まり，関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。

④ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=S(x)$ のグラフ上にある。

⑤ 中点は p の値によって動くが，つねに関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。

第３問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 10 ページの正規分布表を用いてもよい。また，ここでの**晴れ**の定義については，気象庁の天気概況の「快晴」または「晴」とする。

(1)　太郎さんは，自分が住んでいる地域において，日曜日に**晴れ**となる確率を考えている。

晴れの場合は 1，**晴れ**以外の場合は 0 の値をとる確率変数を X と定義する。また，$X=1$ である確率を p とすると，その確率分布は表 1 のようになる。

表　1

X	0	1	計
確　率	$1-p$	p	1

この確率変数 X の平均（期待値）を m とすると，$m=$ $\boxed{\text{ア}}$ となる。

太郎さんは，ある期間における連続した n 週の日曜日の天気を，表 1 の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本とみなし，それらの X を確率変数 X_1，X_2，…，X_n で表すことにした。そして，その標本平均 $\overline{X}$ を利用して，母平均 m を推定しようと考えた。実際に $n=300$ として**晴れ**の日数を調べたところ，表 2 のようになった。

表　2

天　気	日　数
晴れ	75
晴れ以外	225
計	300

母標準偏差を σ とすると，$n=300$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ に従う。

一般に，母標準偏差 σ がわからないとき，標本の大きさ n が大きければ，σ の代わりに標本の標準偏差 S を用いてもよいことが知られている。S は

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\left\{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_n-\overline{X})^2\right\}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{n}(X_1{}^2+X_2{}^2+\cdots+X_n{}^2)-\boxed{\text{ウ}}}$$

で計算できる。ここで，$X_1{}^2=X_1$，$X_2{}^2=X_2$，…，$X_n{}^2=X_n$ であることに着目し，右辺を整理すると，$S=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ と表されることがわかる。

よって，表 2 より，大きさ $n=300$ の標本から求められる母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は $\boxed{\text{オ}}$ となる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ p	① p^2	② $1-p$	③ $(1-p)^2$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ σ	① σ^2	② $\dfrac{\sigma}{n}$	③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$	④ $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\overline{X}$	① $(\overline{X})^2$	② $\overline{X}(1-\overline{X})$	③ $1-\overline{X}$

$\boxed{\text{オ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪ $0.201 \leqq m \leqq 0.299$	① $0.209 \leqq m \leqq 0.291$
② $0.225 \leqq m \leqq 0.250$	③ $0.225 \leqq m \leqq 0.275$
④ $0.247 \leqq m \leqq 0.253$	⑤ $0.250 \leqq m \leqq 0.275$

(2) ある期間において，「ちょうど 3 週続けて日曜日の天気が**晴れ**になること」がどのくらいの頻度で起こり得るのかを考察しよう。以下では，連続する k 週の日曜日の天気について，(1)の太郎さんが考えた確率変数のうち X_1，X_2，…，X_k を用いて調べる。ただし，k は 3 以上 300 以下の自然数とする。

X_1，X_2，…，X_k の値を順に並べたときの 0 と 1 からなる列において，「ちょうど 3 つ続けて 1 が現れる部分」を A とし，A の個数を確率変数 U_k で表す。例えば，$k=20$ とし，X_1，X_2，…，X_{20} の値を順に並べたとき

$$1,1,1,1,0,\underbrace{1,1,1}_{\text{A}},0,0,1,1,1,1,1,0,0,\underbrace{1,1,1}_{\text{A}}$$

であったとする。この例では，下線部分は A を示しており，1 が 4 つ以上続く部分は A とはみなさないので，$U_{20}=2$ となる。

$k=4$ のとき，X_1，X_2，X_3，X_4 のとり得る値と，それに対応した U_4 の値を書き出すと，表 3 のようになる。

表 3

X_1	X_2	X_3	X_4	U_4
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0

ここで，U_k の期待値を求めてみよう。(1)における p の値を $p=\dfrac{1}{4}$ とする。$k=4$ のとき，U_4 の期待値は $E(U_4)=\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{128}$ となる。$k=5$ のとき，U_5 の期待値は $E(U_5)=\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{1024}$ となる。

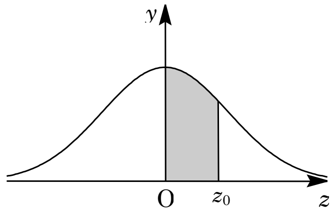
4 以上の k について，k と $E(U_k)$ の関係を詳しく調べると，座標平面上の点 $(4,\ E(U_4))$，$(5,\ E(U_5))$，…，$(300,\ E(U_{300}))$ は 1 つの直線上にあることがわかる。この事実によって，

$$E(U_{300})=\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

となる。

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第４問

解答解説のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$が，$a_{n+1}-a_n=14$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。

$a_1=10$のとき，$a_2=\boxed{\text{アイ}}$，$a_3=\boxed{\text{ウエ}}$である。数列$\{a_n\}$の一般項は，初項a_1を用いて$a_n=a_1+\boxed{\text{オカ}}(n-1)$と表すことができる。

(2)　数列$\{b_n\}$が，$2b_{n+1}-b_n+3=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。

数列$\{b_n\}$の一般項は，初項b_1を用いて$b_n=\left(b_1+\boxed{\text{キ}}\right)\left(\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\right)^{n-1}-\boxed{\text{コ}}$

と表すことができる。

(3)　太郎さんは，$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……①を満たす数列$\{c_n\}$について調べることにした。

(i)　・数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_1=5$のとき，$c_2=\boxed{\text{サ}}$である。

・数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$のとき，$c_2=\boxed{\text{シス}}$，$c_1=\boxed{\text{セソ}}$である。

(ii)　太郎さんは，数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$となる場合について考えている。

$c_3=-3$のとき，c_4がどのような値でも，$(c_3+3)(2c_4-c_3+3)=0$が成り立つ。

・数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$，$c_4=5$のとき，$c_1=\boxed{\text{セソ}}$，$c_2=\boxed{\text{シス}}$，$c_3=-3$，$c_4=5$，$c_5=\boxed{\text{タ}}$である。

・数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_3=-3$，$c_4=83$のとき，$c_1=\boxed{\text{セソ}}$，$c_2=\boxed{\text{シス}}$，$c_3=-3$，$c_4=83$，$c_5=\boxed{\text{チツ}}$である。

(iii) 太郎さんは(i)と(ii)から，$c_n=-3$となることがあるかどうかに着目し，次の**命題A**が成り立つのではないかと考えた。

命題A　数列$\{c_n\}$が①を満たし，$c_1\neq-3$であるとする。このとき，すべての自然数nについて$c_n\neq-3$である。

命題Aが真であることを証明するには，**命題A**の仮定を満たす数列$\{c_n\}$について，$\boxed{\text{テ}}$を示せばよい。実際，このようにして**命題A**が真であることを証明できる。

$\boxed{\text{テ}}$については，最も適当なものを，次の⓪～④のうちから１つ選べ。

⓪　$c_2\neq-3$かつ$c_3\neq-3$であること

①　$c_{100}\neq-3$かつ$c_{200}\neq-3$であること

②　$c_{100}\neq-3$ならば$c_{101}\neq-3$であること

③　$n=k$のとき$c_n\neq-3$が成り立つと仮定すると，$n=k+1$のときも$c_n\neq-3$が成り立つこと

④　$n=k$のとき$c_n=-3$が成り立つと仮定すると，$n=k+1$のときも$c_n=-3$が成り立つこと

(iv) 次の(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)は，数列$\{c_n\}$に関する命題である。

(Ⅰ) $c_1 = 3$ かつ $c_{100} = -3$ であり，かつ①を満たす数列$\{c_n\}$がある。

(Ⅱ) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = -3$ であり，かつ①を満たす数列$\{c_n\}$がある。

(Ⅲ) $c_1 = -3$ かつ $c_{100} = 3$ であり，かつ①を満たす数列$\{c_n\}$がある。

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)の真偽の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ト}}$ である。

$\boxed{\text{ト}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	真	真	真	真	偽	偽	偽	偽
(Ⅱ)	真	真	偽	偽	真	真	偽	偽
(Ⅲ)	真	偽	真	偽	真	偽	真	偽

第５問

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間に 4 点 A(2, 7, −1), B(3, 6, 0), C(−8, 10, −3), D(−9, 8, −4) がある。A, B を通る直線を l_1 とし, C, D を通る直線を l_2 とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=($ ア , イウ , エ $)$ であり, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$ オ である。

(2) 花子さんと太郎さんは, 点 P が l_1 上を動くとき, $|\overrightarrow{OP}|$ が最小となる P の位置について考えている。

P が l_1 上にあるので, $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 s があり, $\overrightarrow{OP}=$ カ が成り立つ。$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となる s の値を求めれば P の位置が求まる。このことについて, 花子さんと太郎さんが話をしている。

> 花子：$|\overrightarrow{OP}|^2$ が最小となる s の値を求めればよいね。
>
> 太郎：$|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるときの直線 OP と l_1 の関係に着目してもよさそうだよ。

$|\overrightarrow{OP}|^2=$ キ s^2- クケ $s+$ コサ である。また, $|\overrightarrow{OP}|$ が最小となるとき, 直線 OP と l_1 の関係に着目すると シ が成り立つことがわかる。

花子さんの考え方でも, 太郎さんの考え方でも, $s=$ ス のとき $|\overrightarrow{OP}|$ が最小となることがわかる。

カ の解答群

⓪ $s\overrightarrow{AB}$	① $s\overrightarrow{OB}$
② $\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$	③ $(1-2s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$
④ $(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$	

シ の解答群

⓪ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}>0$	① $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$
② $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}<0$	③ $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{AB}|$
④ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}$	⑤ $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AP}=0$
⑥ $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{AB}|$	

(3) 点 P が l_1 上を動き, 点 Q が l_2 上を動くとする。

このとき, 線分 PQ の長さが最小になる P の座標は(セソ , タチ , ツテ), Q の座標は(トナ , ニヌ , ネノ)である。

第１問

問題のページへ

[1] (1) $k>0$，$k\neq 1$ のとき，関数 $y=\log_k x$ と $y=\log_2 kx$ のグラフについて，

(i) $y=\log_3 x$ に対して，$x=27$ のとき $y=\log_3 3^3=3$ より，そのグラフは点 $(27,\ 3)$ を通る。また，$y=\log_2 \dfrac{x}{5}$ に対して，$y=1$ のとき $\dfrac{x}{5}=2^1$ から $x=10$ となるので，そのグラフは点 $(10,\ 1)$ を通る。

(ii) $\log_k 1=0$ より，$y=\log_k x$ のグラフはつねに定点 $(1,\ 0)$ を通る。

(iii) $y=\log_k x$ のグラフは定点 $(1,\ 0)$ を通り，$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，$\log_k x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 k}$ と $\dfrac{1}{\log_2 2}>\dfrac{1}{\log_2 3}>\dfrac{1}{\log_2 4}>0$ から，$x>1$ で $\log_2 x>\log_3 x>\log_4 x$ となる。これより，適切な図は ⓪である。

また，$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，$\log_2 kx=\log_2 x+\log_2 k$ と $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$ から，$y=\log_2 kx$ のグラフは，$y=\log_2 x$ のグラフを y 軸方向に $\log_2 2$，$\log_2 3$，$\log_2 4$ だけ平行移動したものとなる。これより，適切な図は ⑤である。

(2) (i) $x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ において，方程式 $\log_x y=2$ は，$\log_x y=\log_x x^2$ すなわち $y=x^2$ と同値なので，適切な図は ②の $x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ の部分である。

(ii) $x>0$，$x\neq 1$，$y>0$ において，不等式 $0<\log_x y<1$ は，$\log_x 1<\log_x y<\log_x x$ となり，これより $x>1$ のとき $1<y<x$，$0<x<1$ のとき $1>y>x$ と同値なので，適切な図は ②である。

[2] $P(x)$ を 2 次式 $S(x)$ で割ったときの商を $T(x)$，余りを $U(x)$ とする。

(1) $P(x)=2x^3+7x^2+10x+5$，$S(x)=x^2+4x+7$ のとき，$P(x)$ を $S(x)$ で割ると，$T(x)=2x-1$，$U(x)=12$ となり，また $S(x)=0$ の解は $x=-2\pm\sqrt{3}i$ である。

(2) $S(x)=0$ が異なる 2 つの解 $x=\alpha,\ \beta$ をもつ，すなわち $S(\alpha)=S(\beta)=0$ とする。

(i) 余りが定数になるとき，$U(x)=k$ とおくと，$P(x)=S(x)T(x)+k$ が成り立ち，

$$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+k=k,\quad P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+k=k$$

言い換えると，③「$P(x)=S(x)T(x)+k$ かつ $S(\alpha)=S(\beta)=0$ が成り立つことから，$P(\alpha)=P(\beta)=k$ が導かれる」。よって，①「$P(\alpha)=P(\beta)$」が成り立つ。

(ii) 逆に $P(\alpha)=P(\beta)$ が成り立つとき，$U(x)=mx+n$ とおくと，

$$P(x)=S(x)T(x)+mx+n$$

これより，$P(\alpha)=S(\alpha)T(\alpha)+m\alpha+n$，$P(\beta)=S(\beta)T(\beta)+m\beta+n$ となり，

$$P(\alpha)=m\alpha+n \quad かつ \quad P(\beta)=m\beta+n$$

すると，$P(\alpha)=P(\beta)$ から $m\alpha+n=m\beta+n$ となり，$\alpha\neq\beta$ から $m=0$，すなわち余り $U(x)$ は定数である。

(i), (ii)より，方程式$S(x)=0$が異なる2つの解α，βをもつとき，$P(x)$を$S(x)$で割った余りが定数になることと$P(\alpha)=P(\beta)$は同値である。

(3)　$P(x)=x^{10}-2x^9-px^2-5x$，$S(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$に対し，$P(x)$を$S(x)$で割った余りが定数になるとき，$\alpha=-1$，$\beta=2$とおくと，

$$P(-1)=(-1)^{10}-2\cdot(-1)^9-p\cdot(-1)^2-5\cdot(-1)=1+2-p+5=-p+8$$
$$P(2)=2^{10}-2\cdot 2^9-p\cdot 2^2-5\cdot 2=-4p-10$$

(2)から$P(-1)=P(2)$なので，$-p+8=-4p-10$となり，$3p=-18$すなわち$p=-6$である。このとき，余りは$n=P(-1)=-(-6)+8=14$となる。

［解　説］

[1]は対数関数に関する基本題です。図を選択する設問が多いですが，迷うことはないでしょう。[2]は整式の除法に関する問題で，誘導に従えば計算はほとんど不要です。なお，この分野は昨年の追試で出題されましたが，本試だけでみると，2004 年以来，久々の登場です。

第２問

問題のページへ

$f(x)=3(x-1)(x-m)\ (m>1)$，$S(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ に対して，

(1)　$m=2$ のとき，$f(x)=3(x-1)(x-2)=3x^2-9x+6$ となり，

(i)　$f'(x)=6x-9$ から，$f'(x)=0$ の解は $x=\dfrac{3}{2}$ である。

(ii)　$S(x)=\displaystyle\int_0^x (3t^2-9t+6)\,dt=\left[t^3-\frac{9}{2}t^2+6t\right]_0^x=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x$

$S'(x)=f(x)=3(x-1)(x-2)$ から，$S(x)$ の増減は右表のようになる。

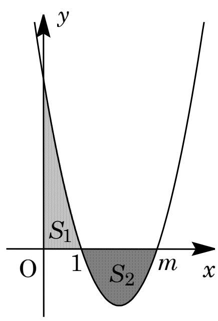
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$S(x)$	↗	$\frac{5}{2}$	↘	2	↗

これより，$S(x)$ は $x=1$ のとき極大値 $\dfrac{5}{2}$ をとり，$x=2$ のとき極小値 2 をとる。

(iii)　$f(3)=S'(3)$ なので，$f(3)$ は ③「関数 $y=S(x)$ のグラフ上の点 $(3,\ S(3))$ における接線の傾き」を表す。

(2)　右図の網点部の面積 S_1，S_2 について，

$$S_1=\int_0^1 f(x)\,dx\ ,\ \ S_2=\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$$



$S_1=S_2$ となるのは，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_1^m \{-f(x)\}\,dx$ から，

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx=0$ となり，

$$\int_0^m f(x)\,dx=0$$

よって，$S(m)=0$ である。

さて，(1)と同様に $S(x)$ の増減を調べると，$S(x)$ は $x=1$ のとき極大値 $S(1)$ をとり，$x=m$ のとき極小値 $S(m)$ をとる。

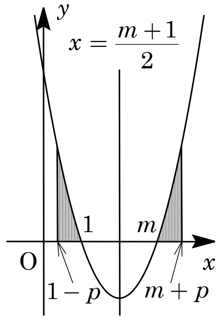
すると，$S_1=S_2$ のとき $S(m)=0$ から，$y=S(x)$ のグラフの概形は ① である。

また，$S_1>S_2$ のときは，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^m f(x)\,dx>0$ から $\displaystyle\int_0^m f(x)\,dx>0$ となり，極小値 $S(m)>0$ となる。

すると，$S_1>S_2$ のとき $y=S(x)$ のグラフの概形は ② である。

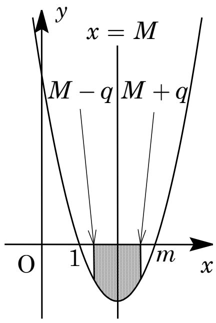
(3)　関数 $y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{m+1}{2}$ に関して対称であるから，すべての正の実数 p に対して，

$$\int_{1-p}^1 f(x)\,dx=\int_m^{m+p} f(x)\,dx\ \cdots\cdots\text{①}$$



$M=\dfrac{m+1}{2}$ とし，$0<q\leqq M-1$ のすべての実数 q に対して，

$$\int_{M-q}^{M}\{-f(x)\}dx=\int_{M}^{M+q}\{-f(x)\}dx\cdots\cdots\cdots②$$



すると，①から，$S(1)-S(1-p)=S(m+p)-S(m)$となり，

$$S(1-p)+S(m+p)=S(1)+S(m)\cdots\cdots\cdots③$$

②から，$-S(M)+S(M-q)=-S(M+q)+S(M)$となり，

$$2S(M)=S(M+q)+S(M-q)\cdots\cdots\cdots④$$

さて，すべての正の実数 p に対して，2 点$(1-p,\ S(1-p))$，$(m+p,\ S(m+p))$を結ぶ線分の中点を$(x,\ y)$とおくと，

$$x=\frac{(1-p)+(m+p)}{2}=\frac{m+1}{2}=M\cdots\cdots\cdots⑤$$

③より，$y=\dfrac{S(1-p)+S(m+p)}{2}=\dfrac{S(1)+S(m)}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，④において$q=M-1$とおくと，$2S(M)=S(m)+S(1)$となり，⑥から，

$$y=S(M)\cdots\cdots\cdots⑦$$

よって，中点の座標は$(M,\ S(M))$となり，②「中点はpの値によらず1つに定まり，関数$y=S(x)$のグラフ上にある」ことになる。

[解 説]

微積分の総合問題です。誘導に従っていくだけなのですが，その際に図をかいておくと，選択肢から結論がすばやく見つかります。

第３問

問題のページへ

(1) 右の表 1 のように，晴れは 1，晴れ以外は 0 の値をとる確率変数を X とすると，X の平均 m は，

$$m=E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

X	0	1	計
確　率	$1-p$	p	1

さて，連続した n 週の日曜日の天気を，この確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本とみなし，それらの X を確率変数 X_1，X_2，…，X_n で表す。そして，この標本平均 $\overline{X}$ を利用して，母平均 m を推定する。

ここで，$n=300$ のとき，表 2 から，$\overline{X}=\dfrac{1\cdot 75+0\cdot 225}{300}=\dfrac{1}{4}=0.25$ であった。

そして，母標準偏差を σ とすると，$n=300$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

このとき，標本の標準偏差 S は，$S=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ から，

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{X_i{}^2-2\overline{X}X_i+(\overline{X})^2\}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-2\overline{X}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i+(\overline{X})^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-2(\overline{X})^2+(\overline{X})^2}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2-(\overline{X})^2}$$

ここで，$X_i=0$ または $X_i=1$ なので，いずれの場合も $X_i{}^2=X_i$ となることより，

$$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-(\overline{X})^2}=\sqrt{\overline{X}-(\overline{X})^2}=\sqrt{\overline{X}(1-\overline{X})}=\sqrt{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

さらに，$\sigma=S$ とすると，$\overline{X}$ は $N\left(m,\ \dfrac{1}{300}\cdot\dfrac{3}{16}\right)$ すなわち $N\left(m,\ \left(\dfrac{1}{40}\right)^2\right)$ に従うとみなせることより，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は，

$$0.25-1.96\cdot\frac{1}{40}\leqq m\leqq 0.25+1.96\cdot\frac{1}{40}$$

まとめると，$0.201\leqq m\leqq 0.299$ となる。

(2) k を 3 以上 300 以下の自然数として，X_1，X_2，…，X_k の値を順に並べたときの 0 と 1 からなる列において，「ちょうど 3 つ続けて 1 が現れる部分」を A とし，A の個数を確率変数 U_k で表す。なお，表 1 における p の値は $p=\dfrac{1}{4}$ とする。

$k=4$ のとき，$U_4=1$ となるのは，表 3 から，

$$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

このときの確率は，$2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(1-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{128}$ なので，

$$E(U_4)=0\cdot\left(1-\frac{3}{128}\right)+1\cdot\frac{3}{128}=\frac{3}{128}$$

$k=5$ のとき，$U_5=1$ となるのは，$(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5)$ の値が，

$(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$

$(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$

このときの確率は，$3\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{33}{4^5}=\frac{33}{1024}$ なので，

$$E(U_5)=0\cdot\left(1-\frac{33}{1024}\right)+1\cdot\frac{33}{1024}=\frac{33}{1024}$$

そして，座標平面上の点$(4,\ E(U_4))$，$(5,\ E(U_5))$，$\cdots$，$(300,\ E(U_{300}))$は 1 つの直線上にあることから，

$$\frac{\frac{33}{1024}-\frac{3}{128}}{5-4}=\frac{E(U_{300})-\frac{33}{1024}}{300-5},\quad \frac{9}{1024}=\frac{E(U_{300})-\frac{33}{1024}}{295}$$

これより，$E(U_{300})=\frac{33}{1024}+\frac{9}{1024}\cdot 295=\frac{2688}{1024}=\frac{21}{8}$ となる。

［解　説］

確率分布と推定の問題です。表 1 のように確率変数 X を設定すると，標本平均 $\overline{X}$ は標本比率 R に対応します。これより，(1)は母比率の推定を行っているというわけです。なお，(2)は読解力の問題です。

第４問

問題のページへ

(1)　$a_{n+1}-a_n=14$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす数列$\{a_n\}$に対して，$a_1=10$ であれば，$a_2=10+14=24$，$a_3=24+14=38$ となる。

一般的には，$a_n=a_1+14(n-1)$ である。

(2)　$2b_{n+1}-b_n+3=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす数列$\{b_n\}$に対して，

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-\frac{3}{2},\ \ b_{n+1}+3=\frac{1}{2}(b_n+3)$$

これより，$b_n+3=(b_1+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，$b_n=(b_1+3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3$

(3)　$(c_n+3)(2c_{n+1}-c_n+3)=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ ……①を満たす数列$\{c_n\}$に対して，

(i)　$c_1=5$ のとき，$(5+3)(2c_2-5+3)=0$ より $c_2=1$

$c_3=-3$ のとき，$(c_2+3)\{2\cdot(-3)-c_2+3\}=0$ から $(c_2+3)^2=0$ となり $c_2=-3$

また，$(c_1+3)\{2\cdot(-3)-c_1+3\}=0$ から $(c_1+3)^2=0$ となり $c_1=-3$

(ii)　$c_3=-3$ のとき，c_4 がどのような値でも $(c_3+3)(2c_4-c_3+3)=0$ は成り立ち，(i)から，$c_1=c_2=-3$ となる。

ここで，$c_4=5$ のとき，$(5+3)(2c_5-5+3)=0$ から $c_5=1$ である。

また，$c_4=83$ のとき，$(83+3)(2c_5-83+3)=0$ から $c_5=40$ である。

(iii) ①を満たす数列$\{c_n\}$に対して，命題 A「$c_1\neq-3$ であるとき，すべての自然数 n について $c_n\neq-3$ である」を証明するためには，数学的帰納法を用いて，③「$n=k$ のとき $c_n\neq-3$ が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも $c_n\neq-3$ が成り立つこと」を示せばよい。

(iv)　命題 A の対偶は，$n=100$ の場合，「$c_{100}=-3$ ならば $c_1=-3$」である。

これより，(Ⅰ)の命題は偽である。

(Ⅱ)と(Ⅲ)については，$c_1=-3$ であれば c_2 は任意で $c_2=-3$ とすることができる。同様に繰り返すと，$c_3=c_4=\cdots c_{99}=-3$ とすることができ，これより c_{100} は任意となる。すると，$c_{100}=-3$ や $c_{100}=3$ で①は満たされる。そして，$n\geqq101$ のときも，ともに①を満たす数列$\{c_n\}$が存在する。これより，(Ⅱ)と(Ⅲ)の命題は真である。

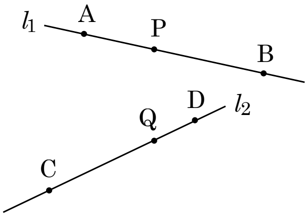
したがって，正しい真偽の組合せは ④である。

［解　説］

漸化式の問題です。(1)と(2)は基本の確認だけです。また，(3)は(i)と(ii)の設問から，この漸化式の特徴が把握できるでしょう。

第５問

問題のページへ



4 点 $A(2,\ 7,\ -1)$, $B(3,\ 6,\ 0)$, $C(-8,\ 10,\ -3)$, $D(-9,\ 8,\ -4)$ に対し, A, B を通る直線を l_1 とし, C, D を通る直線を l_2 とする。

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{CD}=(-1,\ -2,\ -1)$ より,

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-1+2-1=0$$

(2) 点 P が l_1 上を動くとき, $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}$ とおくと,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}=(2,\ 7,\ -1)+s(1,\ -1,\ 1)=(2+s,\ 7-s,\ -1+s)$$

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=(2+s)^2+(7-s)^2+(-1+s)^2=3s^2-12s+54=3(s-2)^2+42$$

これより, $s=2$ のとき $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ が最小となる。

また, $\left|\overrightarrow{OP}\right|$ が最小となるとき, $OP\perp l_1$ から $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ が成り立つ。

(3) 点 Q が l_2 上を動くとき, $\overrightarrow{CQ}=t\overrightarrow{CD}$ とおくと,

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CD}=(-8,\ 10,\ -3)+t(-1,\ -2,\ -1)$$
$$=(-8-t,\ 10-2t,\ -3-t)$$

$$\overrightarrow{QP}=(2+s,\ 7-s,\ -1+s)-(-8-t,\ 10-2t,\ -3-t)$$
$$=(10+s+t,\ -3-s+2t,\ 2+s+t)$$

線分 PQ の長さが最小になるとき, $QP\perp l_1$ かつ $QP\perp l_2$ から,

$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ………①, $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ………②

①より, $(10+s+t)-(-3-s+2t)+(2+s+t)=0$ となり, $15+3s=0$ から,

$s=-5$

②より, $-(10+s+t)-2(-3-s+2t)-(2+s+t)=0$ となり, $-6-6t=0$ から,

$t=-1$

よって, 求める P, Q の座標は, $P(-3,\ 12,\ -6)$, $Q(-7,\ 12,\ -2)$ である。

［解 説］

空間内の 2 直線についての頻出題です。量的にも少なめですし, 計算も簡単ですので, 10 分程度で完答したい 1 題です。なお, (3)は太郎さんの考え方で計算しています。