第１問

解答解説のページへ

[1]　不等式$n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は$\boxed{\text{ア}}$である。実数 a, b を，

$a=2\sqrt{13}-\boxed{\text{ア}}$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③で定める。このとき

$$b=\frac{\boxed{\text{イ}}+2\sqrt{13}}{\boxed{\text{ウ}}} \cdots\cdots④$$

である。また，$a^2-9b^2=\boxed{\text{エオカ}}\sqrt{13}$ である。

①から，$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{\boxed{\text{ア}}+1}{2}$ ……⑤が成り立つ。

太郎さんと花子さんは，$\sqrt{13}$ について話している。

太郎：⑤から$\sqrt{13}$ のおよその値がわかるけど，小数点以下はよくわからないね。
花子：小数点以下をもう少し詳しく調べることができないかな。

①と④から，$\dfrac{m}{\boxed{\text{ウ}}}<b<\dfrac{m+1}{\boxed{\text{ウ}}}$ を満たす整数 m は$\boxed{\text{キク}}$となる。よって，③から，$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m+1}<a<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{m}$ ……⑥が成り立つ。

$\sqrt{13}$ の整数部分は$\boxed{\text{ケ}}$であり，②と⑥を使えば$\sqrt{13}$ の小数第１位の数字は$\boxed{\text{コ}}$，小数第２位の数字は$\boxed{\text{サ}}$であることがわかる。

[2]　以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 3 ページの三角比の表を用いてもよい。

水平な地面（以下，地面）に垂直に立っている電柱の高さを，その影の長さと太陽高度を利用して求めよう。

図 1 のように，電柱の影の先端は坂の斜面（以下，坂）にあるとする。また，坂には傾斜を表す道路標識が設置されていて，そこには 7% と表示されているとする。

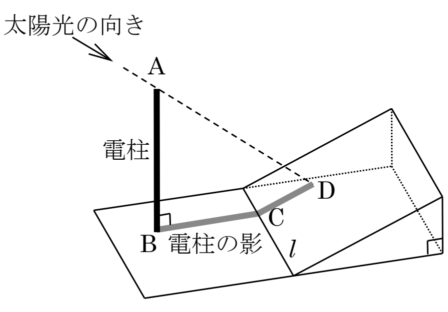


図 1

電柱の太さと影の幅は無視して考えるものとする。また，地面と坂は平面であるとし，地面と坂が交わってできる直線を l とする。

電柱の先端を点 A とし，根もとを点 B とする。電柱の影について，地面にある部分を線分 BC とし，坂にある部分を線分 CD とする。線分 BC，CD がそれぞれ l と垂直であるとき，電柱の影は坂に向かってまっすぐにのびているということにする。

電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびているとする。このとき，4 点 A, B, C, D を通る平面は l と垂直である。その平面において，図 2 のように，直線 AD と直線 BC の交点を P とすると，太陽高度とは∠APB の大きさのことである。

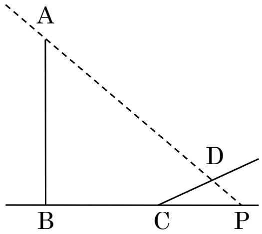


図　2

道路標識の 7% という表示は，この坂をのぼったとき，100 m の水平距離に対して 7 m の割合で高くなることを示している。n を 1 以上 9 以下の整数とするとき，坂の傾斜角∠DCP の大きさについて，$n^\circ < \angle\mathrm{DCP} < n^\circ + 1^\circ$ を満たす n の値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

以下では，∠DCP の大きさは，ちょうど $\boxed{\text{シ}}^\circ$ であるとする。

ある日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたとき，影の長さを調べたところ BC = 7 m，CD = 4 m であり，太陽高度は∠APB = 45° であった。点 D から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とするとき

$$\mathrm{BE} = \boxed{\text{ス}} \times \boxed{\text{セ}}\ \mathrm{m}$$

であり，$\mathrm{DE} = \left(\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{タ}} \times \boxed{\text{チ}}\right)$ m である。よって，電柱の高さは，小数第 2 位で四捨五入すると $\boxed{\text{ツ}}$ m であることがわかる。

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{チ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\dfrac{1}{\sin\angle\mathrm{DCP}}$	② $\cos\angle\mathrm{DCP}$
③ $\dfrac{1}{\cos\angle\mathrm{DCP}}$	④ $\tan\angle\mathrm{DCP}$	⑤ $\dfrac{1}{\tan\angle\mathrm{DCP}}$

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ 10.4	① 10.7	② 11.0
③ 11.3	④ 11.6	⑤ 11.9

別の日，電柱の影が坂に向かってまっすぐにのびていたときの太陽高度は∠APB = 42° であった。電柱の高さがわかったので，前回調べた日からの影の長さの変化を知ることができる。電柱の影について，坂にある部分の長さは

$$\mathrm{CD} = \frac{\mathrm{AB} - \boxed{\text{テ}} \times \boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}} \times \boxed{\text{ト}}}\ \mathrm{m}$$

である。AB = $\boxed{\text{ツ}}$ m として，これを計算することにより，この日の電柱の影について，坂にある部分の長さは，前回調べた 4 m より約 1.2 m だけ長いことがわかる。

$\boxed{\text{ト}}$ ～ $\boxed{\text{ニ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\sin\angle\mathrm{DCP}$	① $\cos\angle\mathrm{DCP}$	② $\tan\angle\mathrm{DCP}$
③ $\sin 42^\circ$	④ $\cos 42^\circ$	⑤ $\tan 42^\circ$

三角比の表

角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)	角	正弦(sin)	余弦(cos)	正接(tan)
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	------

第２問

解答解説のページへ

[1] 座標平面上に 4 点 O(0, 0), A(6, 0), B(4, 6), C(0, 6) を頂点とする台形 OABC がある。また，この座標平面上で，点 P, Q は次の**規則**に従って移動する。

規則

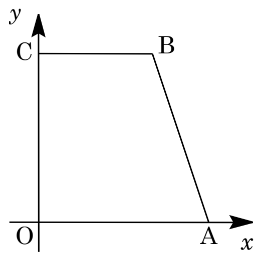
・P は，O から出発して毎秒 1 の一定の速さで x 軸上を正の向きに A まで移動し，A に到達した時点で移動を終了する。

・Q は，C から出発して y 軸上を負の向きに O まで移動し，O に到達した後は y 軸上を正の向きに C まで移動する。そして，C に到達した時点で移動を終了する。ただし，Q は毎秒 2 の一定の速さで移動する。

・P, Q は同時刻に移動を開始する。

この**規則**に従って P, Q が移動するとき，P, Q はそれぞれ A, C に同時刻に到達し，移動を終了する。

以下において，P, Q が移動を開始する時刻を**開始時刻**，移動を終了する時刻を**終了時刻**とする。



参考図

(1) **開始時刻**から 1 秒後の△PBQ の面積は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) **開始時刻**から 3 秒間の△PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{\text{イ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(3) **開始時刻**から**終了時刻**までの△PBQ の面積について，面積の最小値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，最大値は $\boxed{\text{カキ}}$ である。

(4) **開始時刻**から**終了時刻**までの△PBQ の面積について，面積が 10 以下となる時間は $\left(\boxed{\text{ク}}-\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}+\sqrt{\boxed{\text{コ}}}\right)$ 秒間である。

[2] 高校の陸上部で長距離競技の選手として活躍する太郎さんは，長距離競技の公認記録が掲載されている Web ページを見つけた。この Web ページでは，各選手における公認記録のうち最も速いものが掲載されている。その Web ページに掲載されている，ある選手のある長距離競技での公認記録を，その選手のその競技でのベストタイムということにする。

なお，以下の図や表については，ベースボール・マガジン社「陸上競技ランキング」の Web ページをもとに作成している。

(1) 太郎さんは，男子マラソンの日本人選手の 2022 年末時点でのベストタイムを調べた。その中で，2018 年より前にベストタイムを出した選手と 2018 年以降にベストタイムを出した選手に分け，それぞれにおいて速い方から 50 人の選手のベストタイムをデータ A，データ B とした。

ここでは，マラソンのベストタイムは，実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。例えば 2 時間 5 分 30 秒であれば，$60\times5+30=330$(秒)となる。

(i)　図 1 と図 2 はそれぞれ，階級の幅を 30 秒とした A と B のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

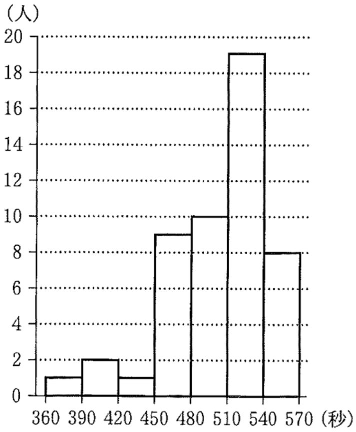


図 1　A のヒストグラム

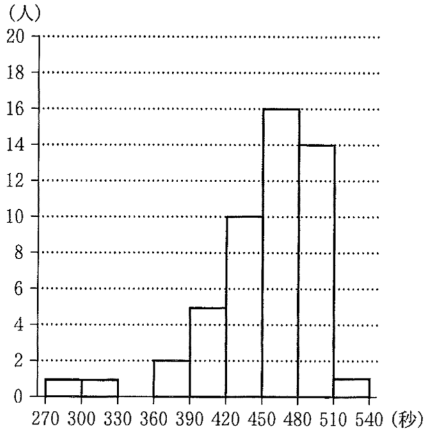


図 2　B のヒストグラム

図 1 から A の最頻値は階級 $\boxed{\text{サ}}$ の階級値である。また，図 2 から B の中央値が含まれる階級は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 270 以上 300 未満	① 300 以上 330 未満
② 330 以上 360 未満	③ 360 以上 390 未満
④ 390 以上 420 未満	⑤ 420 以上 450 未満
⑥ 450 以上 480 未満	⑦ 480 以上 510 未満
⑧ 510 以上 540 未満	⑨ 540 以上 570 未満

(ii)　図 3 は，A，B それぞれの箱ひげ図を並べたものである。ただし，中央値を示す線は省いている。

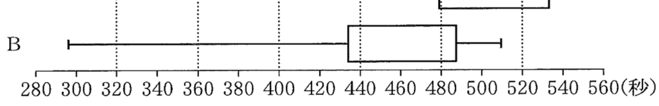


図 3　A と B の箱ひげ図

図 3 より次のことが読み取れる。ただし，A，B それぞれにおける，速い方から 13 番目の選手は，一人ずつとする。

・B の速い方から 13 番目の選手のベストタイムは，A の速い方から 13 番目の選手のベストタイムより，およそ $\boxed{\text{ス}}$ 秒速い。

・A の四分位範囲から B の四分位範囲を引いた差の絶対値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 5	① 15	② 25	③ 35	④ 45	⑤ 55

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ 0 以上 20 未満	① 20 以上 40 未満
② 40 以上 60 未満	③ 60 以上 80 未満
④ 80 以上 100 未満	

(iii) 太郎さんは，A のある選手と B のある選手のベストタイムの比較において，その二人の選手のベストタイムが速いか遅いかとは別の観点でも考えるために，次の**式**を満たす z の値を用いて判断することにした。

式

(あるデータのある選手のベストタイム)＝

(そのデータの平均値)＋z×(そのデータの標準偏差)

二人の選手それぞれのベストタイムに対する z の値を比較し，その値の小さい選手の方が優れていると判断する。

表 1 は，A, B それぞれにおける，速い方から 1 番目の選手（以下，1 位の選手）のベストタイムと，データの平均値と標準偏差をまとめたものである。

表 1　1 位の選手のベストタイム，平均値，標準偏差

データ	1 位の選手のベストタイム	平均値	標準偏差
A	376	504	40
B	296	454	45

式と表 1 を用いると，B の 1 位の選手のベストタイムに対する z の値は

$$z = -\boxed{\text{ソ}}.\boxed{\text{タチ}}$$

である。このことから，B の 1 位の選手のベストタイムは，平均値より標準偏差のおよそ $\boxed{\text{ソ}}.\boxed{\text{タチ}}$ 倍だけ小さいことがわかる。

A, B それぞれにおける，1 位の選手についての記述として，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ツ}}$ である。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

⓪ ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く, z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。 ① ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く, z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。 ② ベストタイムで比較すると A の 1 位の選手の方が速く, z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている。 ③ ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く, z の値で比較すると A の 1 位の選手の方が優れている。

(2) 太郎さんは, マラソン, 10000 m, 5000 m のベストタイムに関連がないかを調べることにした。そのために, 2022 年末時点でのこれら 3 種目のベストタイムをすべて確認できた日本人男子選手のうち, マラソンのベストタイムが速い方から 50 人を選んだ。

図 4 と図 5 はそれぞれ, 選んだ 50 人についてのマラソンと 10000 m のベストタイム, 5000 m と 10000 m のベストタイムの散布図である。ただし, 5000 m と 10000 m のベストタイムは秒単位で表し, マラソンのベストタイムは(1)の場合と同様, 実際のベストタイムから 2 時間を引いた時間を秒単位で表したものとする。なお, これらの散布図には, 完全に重なっている点はない。

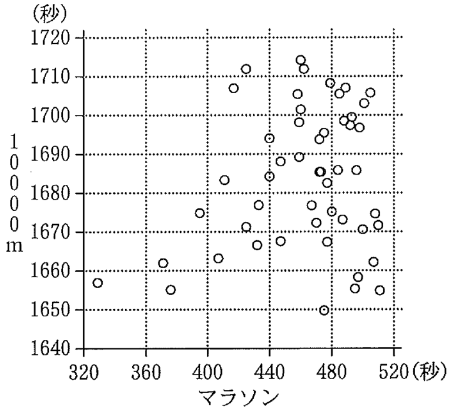


図 4 マラソンと 10000 m の散布図

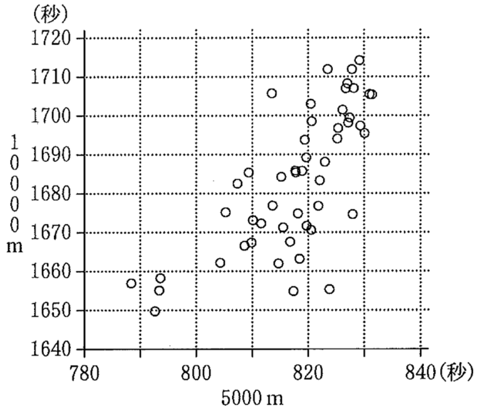


図 5 5000 m と 10000 m の散布図

次の(a), (b)は, 図 4 と図 5 に関する記述である。

(a) マラソンのベストタイムの速い方から 3 番目までの選手の 10000 m のベストタイムは, 3 選手とも 1670 秒未満である。

(b) マラソンと 10000 m の間の相関は, 5000 m と 10000 m の間の相関より強い。

(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{テ}$ の解答群

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

第３問

解答解説のページへ

箱の中にカードが 2 枚以上入っており，それぞれのカードにはアルファベットが 1 文字だけ書かれている。この箱の中からカードを 1 枚取り出し，書かれているアルファベットを確認してからもとに戻すという試行を繰り返し行う。

(1)　箱の中に$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$のカードが 1 枚ずつ全部で 2 枚入っている場合を考える。

以下では，2 以上の自然数 n に対し，n 回の試行で A, B がそろっているとは，n 回の試行で$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出されることを意味する。

(i)　2 回の試行で A, B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii)　3 回の試行で A, B がそろっている確率を求める。

例えば，3 回の試行のうち$\boxed{\text{A}}$を 1 回，$\boxed{\text{B}}$を 2 回取り出す取り出し方は 3 通りあり，それらをすべて挙げると右のようになる。このように考えることにより，3 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は$\boxed{\text{ウ}}$通りあることがわかる。よって，3 回の試行で A, B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{2^3}$ である。

1 回目	2 回目	3 回目
$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$
$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$	$\boxed{\text{B}}$
$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{B}}$	$\boxed{\text{A}}$

(iii)　4 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は$\boxed{\text{エオ}}$通りある。よって，4 回の試行で A, B がそろっている確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　箱の中に$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$のカードが 1 枚ずつ全部で 3 枚入っている場合を考える。

以下では，3 以上の自然数 n に対し，n 回目の試行で初めて A, B, C がそろうとは，n 回の試行で$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$のうちいずれか 1 枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

(i)　3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は$\boxed{\text{ク}}$通りある。よって，3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{3^3}$ である。

(ii)　4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率を求める。

4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は，(1)の(ii)を振り返ることにより，$3\times\boxed{\text{ウ}}$通りあることがわかる。よって，4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(iii) 5回目の試行で初めてA, B, Cがそろう取り出し方は $\boxed{\text{サシ}}$ 通りある。よって，5回目の試行で初めてA, B, Cがそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{3^5}$ である

(3) 箱の中に $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ のカードが 1 枚ずつ全部で 4 枚入っている場合を考える。

以下では，6回目の試行で初めてA, B, C, Dがそろうとは，6回の試行で $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ のそれぞれが少なくとも1回は取り出され，かつ $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, $\boxed{\text{D}}$ のうちいずれか1枚が6回目の試行で初めて取り出されることを意味する。

また，3以上5以下の自然数 n に対し，6回の試行のうち n 回目の試行で初めてA, B, Cだけがそろうとは，6回の試行のうち1回目から n 回目の試行で，$\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも1回は取り出され，$\boxed{\text{D}}$ は1回も取り出されず，かつ $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のうちいずれか1枚が n 回目の試行で初めて取り出されることを意味する。6回の試行のうち n 回目の試行で初めてB, C, Dだけがそろうなども同様に定める。

太郎さんと花子さんは，6回目の試行で初めてA, B, C, Dがそろう確率について考えている。

太郎：例えば，5回目までに $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも1回は取り出され，かつ 6 回目に初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される場合を考えたら計算できそうだね。

花子：それなら，初めてA, B, Cだけがそろうのが，3回目のとき，4回目のとき，5回目のときで分けて考えてみてはどうかな。

6回の試行のうち3回目の試行で初めてA, B, Cだけがそろう取り出し方が $\boxed{\text{ク}}$ 通りであることに注意すると，「6回の試行のうち3回目の試行で初めてA, B, Cだけがそろい，かつ6回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は $\boxed{\text{スセ}}$ 通りあることがわかる。

同じように考えると，「6回の試行のうち4回目の試行で初めてA, B, Cだけがそろい，かつ6回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方は $\boxed{\text{ソタ}}$ 通りあることもわかる。

以上のように考えることにより，6回目の試行で初めてA, B, C, Dがそろう確率は $\dfrac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$ であることがわかる。

第４問

解答解説のページへ

T3, T4, T6 を次のようなタイマーとする。

T3：3 進数を 3 桁表示するタイマー

T4：4 進数を 3 桁表示するタイマー

T6：6 進数を 3 桁表示するタイマー

なお, n 進数とは n 進法で表された数のことである。

これらのタイマーは, すべて次の**表示方法**に従うものとする。

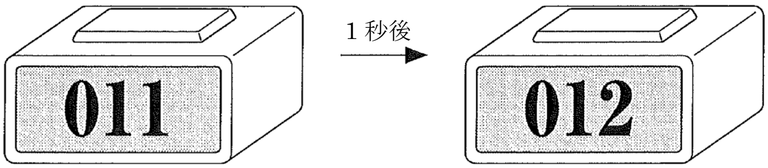
表示方法

(a)　スタートした時点でタイマーは 000 と表示されている。

(b)　タイマーは, スタートした後, 表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき, 3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に, 表示が 000 に戻る。

(c)　タイマーは表示が 000 に戻った後も, (b)と同様に, 表示される数が 1 秒ごとに 1 ずつ増えていき, 3 桁で表示できる最大の数が表示された 1 秒後に, 表示が 000 に戻るという動作を繰り返す。

T3



参考図

例えば, T3 はスタートしてから 3 進数で $12_{(3)}$秒後に 012 と表示される。その後, 222 と表示された 1 秒後に表示が 000 に戻り, その $12_{(3)}$秒後に再び 012 と表示される。

(1)　T6 は, スタートしてから 10 進数で 40 秒後に $\boxed{\text{アイウ}}$ と表示される。

T4 は, スタートしてから 2 進数で $10011_{(2)}$秒後に $\boxed{\text{エオカ}}$ と表示される。

(2)　T4 をスタートさせた後, 初めて表示が 000 に戻るのは, スタートしてから 10 進数で $\boxed{\text{キク}}$ 秒後であり, その後も $\boxed{\text{キク}}$ 秒ごとに表示が 000 に戻る。

同様の考察を T6 に対しても行うことにより, T4 と T6 を同時にスタートさせた後, 初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは, スタートしてから 10 進数で $\boxed{\text{ケコサシ}}$ 秒後であることがわかる。

(3)　0 以上の整数 l に対して, T4 をスタートさせた l 秒後に T4 が 012 と表示されることと, l を $\boxed{\text{スセ}}$ で割った余りが $\boxed{\text{ソ}}$ であることは同値である。ただし, $\boxed{\text{スセ}}$ と $\boxed{\text{ソ}}$ は 10 進法で表されているものとする。

T3についても同様の考察を行うことにより，次のことがわかる。

T3とT4を同時にスタートさせてから，初めて両方が同時に012と表示されるまでの時間をm秒とするとき，mは10進法で $\boxed{\text{タチツ}}$ と表される。

また，T4とT6の表示に関する記述として，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ T4とT6を同時にスタートさせてから，m秒後より前に初めて両方が同時に012と表示される。

① T4とT6を同時にスタートさせてから，ちょうどm秒後に初めて両方が同時に012と表示される。

② T4とT6を同時にスタートさせてから，m秒後より後に初めて両方が同時に012と表示される。

③ T4とT6を同時にスタートさせてから，両方が同時に012と表示されることはない。

第５問

解答解説のページへ

図１のように，平面上に５点 A, B, C, D, E があり，線分 AC, CE, EB, BD, DA によって，星形の図形ができるときを考える。線分 AC と BE の交点を P，AC と BD の交点を Q，BD と CE の交点を R，AD と CE の交点を S，AD と BE の交点を T とする。

ここでは AP : PQ : QC = 2 : 3 : 3，AT : TS : SD = 1 : 1 : 3 を満たす星形の図形を考える。

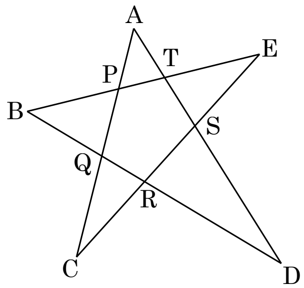


図 1

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1) △AQD と直線 CE に着目すると，$\dfrac{QR}{RD}\cdot\dfrac{DS}{SA}\cdot\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{CQ}=1$ が成り立つので，

QR : RD = $\boxed{\text{イ}}$: $\boxed{\text{ウ}}$ となる。また，△AQD と直線 BE に着目すると，QB : BD = $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ となる。したがって

BQ : QR : RD = $\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{イ}}$: $\boxed{\text{ウ}}$

となることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ AC	① AP	② AQ	③ CP	④ PQ

(2) ５点 P, Q, R, S, T が同一円周上にあるとし，AC = 8 であるとする。

(i) ５点 A, P, Q, S, T に着目すると，AT : AS = 1 : 2 より AT = $\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ となる。さらに，５点 D, Q, R, S, T に着目すると，DR = $4\sqrt{3}$ となることがわかる。

(ii) ３点 A, B, C を通る円と点 D との位置関係を，次の**構想**に基づいて調べよう。

構想

線分 AC と BD の交点 Q に着目し，AQ·CQ と BQ·DQ の大小を比べる。

まず，AQ·CQ = 5·3 = 15 かつ BQ·DQ = $\boxed{\text{キク}}$ であるから

AQ·CQ $\boxed{\text{ケ}}$ BQ·DQ ………①

が成り立つ。また，３点 A, B, C を通る円と直線 BD との交点のうち，B と異なる点を X とすると

AQ·CQ $\boxed{\text{コ}}$ BQ·XQ ………②

が成り立つ。①と②の左辺は同じなので，①と②の右辺を比べることにより，XQ $\boxed{\text{サ}}$ DQ が得られる。したがって，点 D は３点 A, B, C を通る円の $\boxed{\text{シ}}$ にある。

$\boxed{ケ}$～$\boxed{サ}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ ＜	① ＝	② ＞

$\boxed{シ}$の解答群

⓪ 内部	① 周上	② 外部

(iii) 3 点 C, D, E を通る円と 2 点 A, B との位置関係について調べよう。

この星形の図形において，$CR = RS = SE = 3$ となることがわかる。したがって，点 A は 3 点 C, D, E を通る円の$\boxed{ス}$にあり，点 B は 3 点 C, D, E を通る円の$\boxed{セ}$にある。

$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 内部	① 周上	② 外部

第１問

問題のページへ

[1] $n<2\sqrt{13}<n+1$ ……①を満たす整数 n は，$n^2<52<(n+1)^2$ から，$n=7$ である。さて，$a=2\sqrt{13}-7$ ……②，$b=\dfrac{1}{a}$ ……③とおくと，

$$b=\frac{1}{2\sqrt{13}-7}=\frac{7+2\sqrt{13}}{(2\sqrt{13})^2-7^2}=\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$a^2-9b^2=(2\sqrt{13}-7)^2-9\cdot\frac{(7+2\sqrt{13})^2}{9}=-28\sqrt{13}\cdot2=-56\sqrt{13}$$

①から $\dfrac{7}{2}<\sqrt{13}<\dfrac{8}{2}$ ……⑤，①④から $\dfrac{7+7}{3}<b<\dfrac{7+8}{3}$ となり，$\dfrac{14}{3}<b<\dfrac{15}{3}$

これより，$\dfrac{m}{3}<b<\dfrac{m+1}{3}$ を満たす整数 m は $m=14$ である。

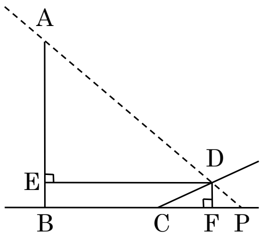
よって，③から $\dfrac{14}{3}<\dfrac{1}{a}<\dfrac{15}{3}$ となり，$\dfrac{3}{15}<a<\dfrac{3}{14}$ ……⑥である。

したがって，⑤から $\sqrt{13}$ の整数部分は 3 であり，②⑥から，

$$\frac{3}{15}<2\sqrt{13}-7<\frac{3}{14},\ \frac{36}{5}<2\sqrt{13}<\frac{101}{14},\ \frac{18}{5}<\sqrt{13}<\frac{101}{28}$$

$\dfrac{18}{5}=3.6$，$3.60<\dfrac{101}{28}<3.61$ から，$\sqrt{13}$ の小数第 1 位の数字は 6，小数第 2 位の数字は 0 である。

[2] 図 2 において，点 D から直線 AB, BP に垂直な直線をひき，それぞれ DE, DF とする。



さて，坂の傾斜角 $\angle\mathrm{DCP}$ について，$\tan\angle\mathrm{DCP}=\dfrac{7}{100}=0.07$

三角比の表から，$\tan4°=0.0699$，$\tan5°=0.0875$ なので，

$$\tan4°<\tan\angle\mathrm{DCP}<\tan5°$$

$n°<\angle\mathrm{DCP}<n°+1°$ を満たす n の値は $n=4$ であり，以下，$\angle\mathrm{DCP}=4°$ とする。

ここで，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=4$，太陽高度 $\angle\mathrm{APB}=45°$ のとき，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{DCP}=4\sin\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{DE}=\mathrm{BF}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{DCP}=7+4\cos\angle\mathrm{DCP}$$

すると，$\angle\mathrm{APB}=45°$ から，$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}+\mathrm{BE}$ となり，

$$\mathrm{AB}=(7+4\cos\angle\mathrm{DCP})+4\sin\angle\mathrm{DCP}=7+4(\sin4°+\cos4°)$$
$$=7+4(0.0698+0.9976)=7+4\times1.0674\fallingdotseq11.3$$

また，太陽高度 $\angle\mathrm{APB}=42°$ の別の日に，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{CD}=x$ とすると，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{DF}=x\sin\angle\mathrm{DCP},\ \mathrm{DE}=\mathrm{BF}=7+x\cos\angle\mathrm{DCP}$$

$$\mathrm{AB}=\mathrm{AE}+\mathrm{BE}=\mathrm{DE}\tan42°+\mathrm{BE}=(7+x\cos\angle\mathrm{DCP})\tan42°+x\sin\angle\mathrm{DCP}$$

これより，$x(\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan42°)=\mathrm{AB}-7\tan42°$ となり，

$$\mathrm{CD}=x=\frac{\mathrm{AB}-7\tan 42^\circ}{\sin\angle\mathrm{DCP}+\cos\angle\mathrm{DCP}\tan 42^\circ}$$

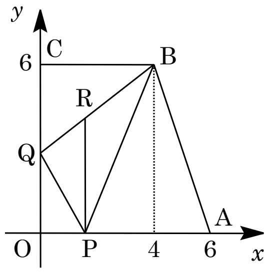
そして，$\mathrm{AB}=11.3$ とすると，$\mathrm{CD}\fallingdotseq 5.2=4+1.2$ となる。

［解 説］

[1]は数と式の基本的な問題です。流れに沿って，計算を進めることがポイントです。[2]は三角比の応用問題で，共通テストらしい題材です。最後の設問は解答群を見ながら立式します。

第２問

問題のページへ



[1]　4 点 $O(0,\ 0)$，$A(6,\ 0)$，$B(4,\ 6)$，$C(0,\ 6)$ を頂点とする台形 OABC に対して，与えられた規則によって，点 P，Q が移動する。そして，点 P から y 軸に平行な直線と直線 QB との交点を R，$\triangle PBQ$ の面積を S とおく。

(1)　開始時刻から 1 秒後に，$P(1,\ 0)$，$Q(0,\ 4)$ より，

$$QB: y=\frac{6-4}{4}x+4=\frac{1}{2}x+4$$

$x=1$ のとき $y=\dfrac{9}{2}$ から，$R\left(1,\ \dfrac{9}{2}\right)$ となり，$S=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{2}\cdot 4=9$ である。

(2)　開始時刻から t 秒後 $(0\leqq t\leqq 3)$ において，$P(t,\ 0)$，$Q(0,\ 6-2t)$ より，

$$QB: y=\frac{6-(6-2t)}{4}x+6-2t=\frac{t}{2}x+6-2t$$

$x=t$ のとき $y=\dfrac{t^2}{2}-2t+6$ から，$R\left(t,\ \dfrac{t^2}{2}-2t+6\right)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-2t+6\right)\cdot 4=t^2-4t+12=(t-2)^2+8\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$0\leqq t\leqq 3$ において，S の最小値は $8\,(t=2)$，最大値は $12\,(t=0)$ となる。

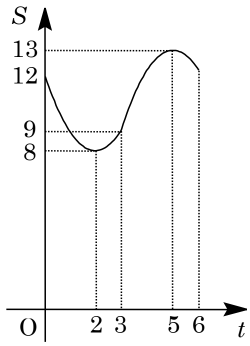
(3)　開始時刻から t 秒後 $(3\leqq t\leqq 6)$ において，$P(t,\ 0)$，$Q(0,\ 2t-6)$ より，

$$QB: y=\frac{6-(2t-6)}{4}x+2t-6=-\frac{t-6}{2}x+2t-6$$

$x=t$ のとき $y=-\dfrac{t^2-6t}{2}+2t-6=-\dfrac{t^2}{2}+5t-6$ から，$R\left(t,\ -\dfrac{t^2}{2}+5t-6\right)$ となり，

$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{t^2}{2}+5t-6\right)\cdot 4=-t^2+10t-12=-(t-5)^2+13\ \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，①②から $0\leqq t\leqq 6$ における S のグラフは右図のようになり，S の最小値は $8\,(t=2)$，最大値は $13\,(t=5)$ である。



(4)　$0\leqq t\leqq 3$ において，$S=10$ となるのは，①から，

$$(t-2)^2+8=10,\ t=2-\sqrt{2}$$

$3\leqq t\leqq 6$ において，$S=10$ となるのは，②から，

$$-(t-5)^2+13=10,\ t=5-\sqrt{3}$$

これより，$S\leqq 10$ となる時間は，右図より，

$$(5-\sqrt{3})-(2-\sqrt{2})=3-\sqrt{3}+\sqrt{2}$$

[2]　(1)　(i)　データ A の最頻値は，図 1 から，階級 ⑧「510 以上 540 未満」の階級値である。データ B の中央値は，小さいから 25 番目と 26 番目の平均値より，図 2 から，⑥「450 以上 480 未満」の階級に含まれる。

(ii) 速い方から 13 番目の選手は，図 3 の第 1 四分位数に注目すると，データ B では約 435 秒，データ A では約 480 秒から，B の 13 番目の選手は A の 13 番目の選手より，$480-435=45$ 秒ほど速い。

また，データ A の四分位範囲とデータ B の四分位範囲はほぼ同じなので，四分位範囲の差の絶対値は，⓪「0 以上 20 未満」である。

(iii) 表 1 から，A の 1 位の選手のベストタイム 376 に対する z の値 z_{A} は，

$$376=504+40z_{\mathrm{A}}\,,\ \ z_{\mathrm{A}}=-3.2$$

同様に，B の 1 位の選手のベストタイム 296 に対する z の値 z_{B} は，

$$296=454+45z_{\mathrm{B}}\,,\ \ z_{\mathrm{B}}\fallingdotseq-3.51$$

$z_{\mathrm{B}}<z_{\mathrm{A}}$ より，①「ベストタイムで比較すると B の 1 位の選手の方が速く，z の値で比較すると B の 1 位の選手の方が優れている」といえる。

(2) (a)については，図 4 から，マラソンの速い方から 3 番目までの選手については，すべて 10000 m は 1670 秒未満であり，正しい。

(b)については，図 4 と図 5 から，マラソンと 10000 m の間の相関は，5000 m と 10000 m の間の相関より弱いので，誤りである。

よって，(a), (b)の正誤の組合せとして正しいものは ①である。

［解 説］

[1]はときどき見かける 2 次関数の問題です。設定がわかりやすく，量的にも少ないので，勢いをつけるのに適切ではないかと思えます。なお，三角形の面積 S については，いろいろな求め方があります。[2]はデータの分析の問題で，例年通り，問題文は長いのですが，内容は基本的です。特に(2)はあっさり結論が導けます。

第３問

問題のページへ

(1)　箱の中に$\boxed{A}$, $\boxed{B}$のカードが 1 枚ずつ全部で 2 枚入っている。

(i)　2 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は, A→B または B→A より, その確率は$\dfrac{2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$である。

(ii)　3 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は, $\boxed{A}$が 1 回, $\boxed{B}$が 2 回のときは A→B→B, B→A→B, B→B→A の 3 通り, $\boxed{A}$が 2 回, $\boxed{B}$が 1 回のときも同様に 3 通りなので, 合わせて$3+3=6$通りとなる。そして, その確率は$\dfrac{6}{2^3}=\dfrac{3}{4}$である。

(iii) 4 回の試行で A, B がそろっている取り出し方は, A→A→A→A と B→B→B→B 以外のときより, $2^4-2=14$通りとなる。そして, その確率は$\dfrac{14}{2^4}=\dfrac{7}{8}$である。

(2)　箱の中に$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$のカードが 1 枚ずつ全部で 3 枚入っている。

(i)　3 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は, 3 回目が$\boxed{C}$のとき(1)(i)から 2 通り, 3 回目が$\boxed{A}$または$\boxed{B}$のときも同様で, 合わせて$3\times2=6$通りとなる。そして, その確率は$\dfrac{6}{3^3}=\dfrac{2}{9}$である。

(ii)　4 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は, 4 回目が$\boxed{C}$のとき(1)(ii)から 6 通り, 4 回目が$\boxed{A}$または$\boxed{B}$のときも同様で, 合わせて$3\times6=18$通りとなる。そして, その確率は$\dfrac{18}{3^4}=\dfrac{2}{9}$である。

(iii) 5 回目の試行で初めて A, B, C がそろう取り出し方は, 5 回目が$\boxed{C}$のとき(1)(iii)から 14 通り, 5 回目が$\boxed{A}$または$\boxed{B}$のときも同様で, 合わせて$3\times14=42$通りとなる。そして, その確率は$\dfrac{42}{3^5}$である。

(3)　箱の中に$\boxed{A}$, $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$のカードが 1 枚ずつ全部で 4 枚入っている。

　6 回目の試行で初めて A, B, C, D がそろう確率を求めるために, まず 6 回目が$\boxed{D}$のときを考える。

・6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろう取り出し方は, (2)(i)から 6 通り, 4 回目と 5 回目は A, B, C のいずれかで, 6 回目は D より,

$$6\times3\times3\times1=54\ （通り）$$

・6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろう取り出し方は, (2)(ii)から 18 通り, 5 回目は A, B, C のいずれかで, 6 回目は D より,

$$18\times3\times1=54\ （通り）$$

・6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めて A, B, C だけがそろう取り出し方は, (2)(iii)から 42 通り, 6 回目は D より,

$$42\times1=42\ （通り）$$

以上より，6回目が$\boxed{\mathrm{D}}$で，6回目の試行で初めてA, B, C, Dがそろうのは，

$$54+54+42=150 \text{（通り）}$$

6回目が$\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$, $\boxed{\mathrm{C}}$のときも同様なので，6回目の試行で初めてA, B, C, Dがそろう確率は，$\dfrac{4\times150}{4^6}=\dfrac{75}{512}$である。

［解 説］

誘導の丁寧な確率問題です。そのために問題文がかなり長く，読解力が問われます。特に，「……がそろう」と「初めて……がそろう」と「初めて……だけがそろう」という 3 つの記述の違いを意識して計算する必要があります。

第４問

問題のページへ

(1)　$40=104_{(6)}$より，T6 は 40 秒後に 104 と表示される。また，$10011_{(2)}=103_{(4)}$より，T4 は $10011_{(2)}$秒後に 103 と表示される。

(2)　T4 の表示が，初めて 000 に戻るのは，333 の 1 秒後より，

$$(3\cdot4^2+3\cdot4+3)+1=\frac{3(4^3-1)}{4-1}+1=4^3=64 \text{（秒後）}$$

T6 の表示が，初めて 000 に戻るのは，555 の 1 秒後より，

$$(5\cdot6^2+5\cdot6+5)+1=\frac{5(6^3-1)}{6-1}+1=6^3=216 \text{（秒後）}$$

ここで，T4 の表示が a 回目に 000 に戻るのは $64a$ 秒後，T6 の表示が b 回目に 000 に戻るのは $216b$ 秒後なので，両方の表示が同時に 000 に戻る条件は,

$$64a=216b\,,\ \ 8a=27b\ \cdots\cdots\cdots①$$

8 と 27 は互いに素なので，①を満たす最小の自然数 a, b は，$(a,\ b)=(27,\ 8)$

よって，初めて両方の表示が同時に 000 に戻るのは,

$$64a=64\times27=1728 \text{（秒後）}$$

(3)　T4 の表示が初めて 012 となるのは$1\cdot4+2=6$秒後，初めて 000 に戻るのは 64 秒後である。すると，l 秒後に，T4 の表示が 012 となる条件は,「l を 64 で割った余りが 6」である。すなわち，p を 0 以上の整数として，$l=64p+6\cdots\cdots②$と表せる。

同様に考え，T3 の表示が初めて 012 となるのは$1\cdot3+2=5$秒後，初めて 000 に戻るのは$(2\cdot3^2+2\cdot3+2)+1=3^3=27$秒後である。すると，$l$ 秒後に，T3 の表示が 012 となる条件は,「l を 27 で割った余りが 5」である。すなわち，q を 0 以上の整数として，$l=27q+5\cdots\cdots③$と表せる。

よって，T3 と T4 の表示が同時に 012 になる条件は，②③より,

$$64p+6=27q+5\,,\ \ 27q-64p=1\cdots\cdots\cdots④$$

④を満たす特殊解を求めるために，64 と 27 に互除法を適用すると，右のようになる。ここで，$s=64$，$t=27$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると,

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3\,) & 7\,) & 10\,) & 27\,) & 64 \\ & 6 & 7 & 20 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 7 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3s-7t\,) & -2s+5t\,) & s-2t\,) & t\,) & s \\ & 6s-14t & -2s+5t & 2s-4t & 2t \\ \hline & -8s+19t & 3s-7t & -2s+5t & s-2t \end{array}$$

$$-8s+19t=1$$

$$27\cdot19-64\cdot8=1\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より,

$$27(q-19)-64(p-8)=0$$

$$64(p-8)=27(q-19)\cdots\cdots\cdots⑥$$

64 と 27 は互いに素なので，⑥を満たす整数 p, q は，n を 0 以上の整数として,

$$(p-8,\ q-19)=(27n,\ 64n)\,,\ (p,\ q)=(27n+8,\ 64n+19)$$

$p \geqq 0$, $q \geqq 0$ から $n \geqq 0$ となるので，最小の自然数 p, q は，$(p,\ q)=(8,\ 19)$

よって，m 秒後に初めて T3 と T4 の表示が同時に 012 になるとすると，②から，

$$m=64\cdot 8+6=518$$

さらに，T6 の表示が初めて 012 となるのは $1\cdot 6+2=8$ 秒後，初めて 000 に戻るのは 216 秒後である。すると，l 秒後に，T6 の表示が 012 となる条件は，「l を 216 で割った余りが 8」である。すなわち，r を 0 以上の整数として，$l=216r+8$ ……⑥ と表せる。

よって，T4 と T6 の表示が同時に 012 になる条件は，②⑥より，

$$64p+6=216r+8,\ 32p-108r=1,\ 4(8p-27r)=1 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦の左辺は 4 の倍数なので，⑦を満たす整数 $(p,\ r)$ は存在しない。

したがって, T4 と T6 の表示について, ❸「T4 と T6 を同時にスタートさせてから，両方が同時に 012 と表示されることはない」ことがわかる。

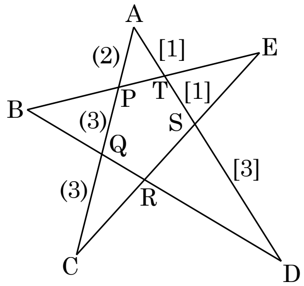
［解 説］

n 進数と不定方程式の融合したおもしろい内容の問題です。誘導は丁寧ですが，計算量は多めです。特に，④式の特殊解の発見には，時間がかかります。

第５問

問題のページへ

$AP : PQ : QC = 2 : 3 : 3$，$AT : TS : SD = 1 : 1 : 3$ である右の星形の図形に対して,



(1)　△AQD と直線 CE に対して，メネラウスの定理から,

$$\frac{QR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}\cdot\frac{AC}{CQ}=1,\ \ \frac{QR}{RD}=\frac{SA}{DS}\cdot\frac{CQ}{AC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

これより，$QR : RD = 1 : 4$ ………ⓐ

△AQD と直線 BE に対して，メネラウスの定理から,

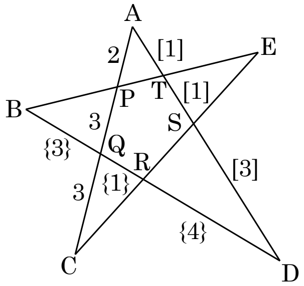
$$\frac{AP}{PQ}\cdot\frac{QB}{BD}\cdot\frac{DT}{TA}=1,\ \ \frac{QB}{BD}=\frac{PQ}{AP}\cdot\frac{TA}{DT}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

これより，$QB : BD = 3 : 8$ ………ⓑ

ⓐⓑより，$BQ : QR : RD = 3 : 1 : 4$ となる。

(2)　5 点 P, Q, R, S, T が同一円周上，$AC = 8$ のとき,

$AP = 2$，$PQ = QC = 3$



(i)　方べきの定理より，$AT\cdot AS = AP\cdot AQ$

$AT : AS = 1 : 2$ より，$2AT^2 = 2\cdot 5$ となり，$AT = \sqrt{5}$

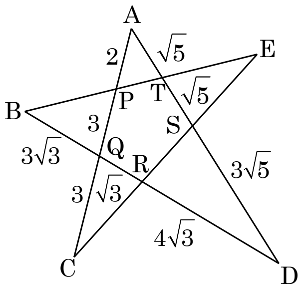
同様に，方べきの定理より，$DR\cdot DQ = DS\cdot DT$

$DR : DQ = 4 : 5$ より，$\frac{5}{4}DR^2 = 3\sqrt{5}\cdot 4\sqrt{5}$ となり,

$$DR^2 = \frac{4}{5}\cdot 12\cdot 5 = 48,\ \ DR = 4\sqrt{3}$$

(ii)　$AQ\cdot CQ = 5\cdot 3 = 15$，$BQ\cdot DQ = 3\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 45$ より,

$AQ\cdot CQ < BQ\cdot DQ$ ………①



また, 3 点 A, B, C を通る円と直線 BD との交点のうち, B と異なる点を X とすると，方べきの定理より,

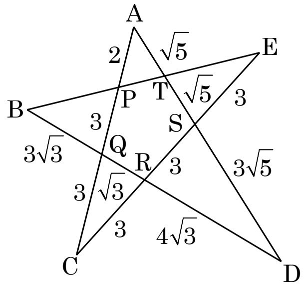
$AQ\cdot CQ = BQ\cdot XQ$ ………②

①②より，$XQ < DQ$ となり，点 D は 3 点 A, B, C を通る円の外部にある。

(iii) 同様にすると，$CR = RS = SE = 3$ となる。

$CS\cdot ES = 6\cdot 3 = 18$，$DS\cdot AS = 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5} = 30$ より,

$CS\cdot ES < DS\cdot AS$ ………③



また, 3 点 C, D, E を通る円と直線 AD との交点のうち, D と異なる点を Y とすると，方べきの定理より,

$CS\cdot ES = DS\cdot YS$ ………④

③④より，$YS < AS$ となり，点 A は 3 点 C, D, E を通る円の外部にある。

同様に，$CR \cdot ER = 3 \cdot 6 = 18$，$DR \cdot BR = 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 48$ より，

$CR \cdot ER < DR \cdot BR$ ………⑤

また, 3 点 C, D, E を通る円と直線 BD との交点のうち, D と異なる点を Z とすると，方べきの定理より，

$CR \cdot ER = DR \cdot ZR$ ………⑥

⑤⑥より，$ZR < BR$ となり，点 B は 3 点 C, D, E を通る円の外部にある。

［解 説］

平面図形を対象にし，細かな誘導のついた問題です。問題文の図に，与えられた数値も使って，わかったことをどんどん書き込み，すばやく処理をするのがポイントです。なお, (2)の(iii)の設問は,「同様に」として処理しても構いません。