第１問

解答解説のページへ

[1]　$P(x)$ を係数が実数である x の整式とする。方程式 $P(x)=0$ は虚数 $1+\sqrt{2}i$ を解にもつとする。

(1)　虚数 $1-\sqrt{2}i$ も $P(x)=0$ の解であることを示そう。

$1\pm\sqrt{2}i$ を解とする x の 2 次方程式で x^2 の係数が 1 であるものは，
$x^2-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}=0$ である。$S(x)=x^2-\boxed{\text{ア}}x+\boxed{\text{イ}}$ とし，$P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，次が成り立つ。

$$P(x)=\boxed{\text{ウ}}$$

また，$S(x)$ は 2 次式であるから，m，n を実数として，$R(x)$ は $R(x)=mx+n$ と表せる。ここで，$1+\sqrt{2}i$ が 2 つの方程式 $P(x)=0$ と $S(x)=0$ の解であることを用いれば $R(1+\sqrt{2}i)=\boxed{\text{エ}}$ となるので，$x=1+\sqrt{2}i$ を $R(x)=mx+n$ に代入することにより，$m=\boxed{\text{オ}}$，$n=\boxed{\text{カ}}$ であることがわかる。したがって，$\boxed{\text{キ}}$ であることがわかるので，$1-\sqrt{2}i$ も $P(x)=0$ の解である。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $S(x)Q(x)R(x)$	① $S(x)R(x)+Q(x)$
② $R(x)Q(x)+S(x)$	③ $S(x)Q(x)+R(x)$

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $P(x)=S(x)R(x)$	① $P(x)=Q(x)R(x)$
② $Q(x)=0$	③ $R(x)=0$
④ $S(x)=Q(x)R(x)$	⑤ $Q(x)=S(x)R(x)$

(2)　k，l を実数として，$P(x)=3x^4+2x^3+kx+l$ の場合を考える。このとき，$P(x)$ を(1)の $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，

$$Q(x)=\boxed{\text{ク}}x^2+\boxed{\text{ケ}}x+\boxed{\text{コ}},\quad R(x)=(k-\boxed{\text{サシ}})x+l-\boxed{\text{スセ}}$$

となる。$P(x)=0$ は $1+\sqrt{2}i$ を解にもつので，(1)の考察を用いると，$k=\boxed{\text{ソタ}}$，$l=\boxed{\text{チツ}}$ である。また，$P(x)=0$ の $1+\sqrt{2}i$ 以外の解は

$$x=\boxed{\text{テ}}-\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\,i,\quad \frac{-\boxed{\text{ナ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}\,i}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

であることがわかる。

[2]　以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 4，5 ページの常用対数表を用いてもよい。

花子さんは，あるスポーツドリンク (以下，商品 S) の売り上げ本数が気温にどう影響されるかを知りたいと考えた。そこで，地区 A について調べたところ，最高気温が 22°C，25°C，28°C であった日の商品 S の売り上げ本数をそれぞれ N_1，N_2，N_3 とするとき，$N_1 = 285$，$N_2 = 368$，$N_3 = 475$ であった。このとき

$$\frac{N_2 - N_1}{25 - 22} < \frac{N_3 - N_2}{28 - 25}$$

であり，座標平面上の 3 点 $(22,\ N_1)$，$(25,\ N_2)$，$(28,\ N_3)$ は 1 つの直線上にはないので，花子さんは N_1，N_2，N_3 の対数を考えてみることにした。

(1)　常用対数表によると，$\log_{10} 2.85 = 0.4548$ であるので

$$\log_{10} N_1 = \log_{10} 285 = 0.4548 + \boxed{\text{ア}} = \boxed{\text{ア}}.4548$$

である。この値の小数第 4 位を四捨五入したものを p_1 とすると，$p_1 = \boxed{\text{ア}}.455$ である。同じように，$\log_{10} N_2$ の値の小数第 4 位を四捨五入したものを p_2 とすると，$p_2 = \boxed{\text{イ}}.\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

さらに，$\log_{10} N_3$ の値の小数第 4 位を四捨五入したものを p_3 とすると

$$\frac{p_2 - p_1}{25 - 22} = \frac{p_3 - p_2}{28 - 25}$$

が成り立つことが確かめられる。したがって，$\dfrac{p_2 - p_1}{25 - 22} = \dfrac{p_3 - p_2}{28 - 25} = k$ とおくとき，座標平面上の 3 点 $(22,\ p_1)$，$(25,\ p_2)$，$(28,\ p_3)$ は次の方程式が表す直線上にある。

$$y = k(x - 22) + p_1 \cdots\cdots\cdots ①$$

いま，N を正の実数とし，座標平面上の点 $(x,\ \log_{10} N)$ が①の直線上にあるとする。このとき，x と N の関係式として，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪	$N = 10k(x - 22) + p_1$
①	$N = 10\{k(x - 22) + p_1\}$
②	$N = 10^{k(x-22)+p_1}$
③	$N = p_1 \cdot 10^{k(x-22)}$

(2)　花子さんは，地区 A で最高気温が 32°C になる日の商品 S の売り上げ本数を予想することにした。$x = 32$ のときに関係式 $\boxed{\text{カ}}$ を満たす N の値は $\boxed{\text{キ}}$ の範囲にある。そこで，花子さんは売り上げ本数が $\boxed{\text{キ}}$ の範囲に入るだろうと考えた。

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ 440 以上 450 未満	① 450 以上 460 未満
② 460 以上 470 未満	③ 470 以上 480 未満
④ 650 以上 660 未満	⑤ 660 以上 670 未満
⑥ 670 以上 680 未満	⑦ 680 以上 690 未満
⑧ 890 以上 900 未満	⑨ 900 以上 910 未満
ⓐ 910 以上 920 未満	ⓑ 920 以上 930 未満

常 用 対 数 表

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996

第２問

解答解説のページへ

[1]　縦の長さが 9cm，横の長さが 24cm の長方形の厚紙がある。この厚紙から容積が最大となる箱を作る。このとき，箱にふたがない場合とふたがある場合で容積の最大値がどう変わるかを調べたい。ただし，厚紙の厚さは考えず，作る箱の形を直方体とみなす。

(1)　厚紙の四隅から図 1 のように 4 つの合同な正方形の斜線部分を切り取り，破線にそって折り曲げて，ふたのない箱を作る。この箱の容積を V cm^3 とする。

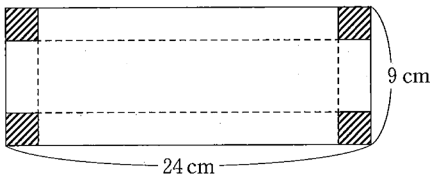


図 1　ふたのない箱を作る場合

次の**構想**に基づいて箱の容積の最大値を考える。

構想

図 1 のように切り取る斜線部分の正方形の 1 辺の長さを x cm とする。V を x の関数として表し，箱が作れる x の値の範囲に注意して V の最大値を考える。

箱が作れるための x のとり得る値の範囲は $0 < x < \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。V を x の式で表すと，$V = \boxed{\text{ウ}}\,x^3 - \boxed{\text{エオ}}\,x^2 + \boxed{\text{カキク}}\,x$ であり，V は $x = \boxed{\text{ケ}}$ で最大値 $\boxed{\text{コサシ}}$ をとる。

(2)　厚紙の四隅から図 2 のように 4 つの斜線部分を切り取り，破線にそって折り曲げて，ふたでぴったりと閉じることのできる箱を作る。この箱の容積を W cm^3 とする。

図 2 の 4 つの斜線部分のうち，左側 2 つの斜線部分をそれぞれ 1 辺の長さが x cm の正方形とすると，右側 2 つの斜線部分は，それぞれ縦の長さが x cm，横の長さが $\boxed{\text{ス}}$ cm の長方形となる。

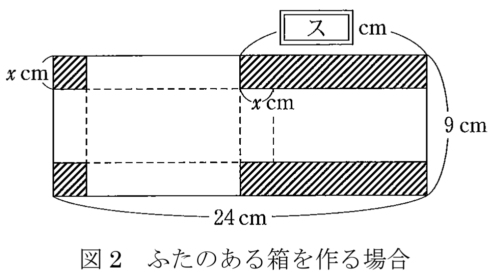


図 2　ふたのある箱を作る場合

$\boxed{\text{ス}}$の解答群

⓪ 6	① $(6-x)$	② $(6+x)$
③ 12	④ $(12-x)$	⑤ $(12+x)$
⑥ 18	⑦ $(18-x)$	⑧ $(18+x)$

太郎さんと花子さんは，W を x の式で表した後，(1)の結果を見ながら W の最大値の求め方について話している。

太郎：W の式がわかったから，W の最大値は(1)と同じように求められるね。
花子：ちょっと待って。W を表す式と(1)の V を表す式は似ているね。W を表す式と V を表す式の関係を利用できないかな。

(1)の V が最大値をとるときの x の値を x_0 とする。W の最大値は(1)で求めた V の最大値$\boxed{\text{セ}}$。また，W が最大値をとる x は$\boxed{\text{ソ}}$。

$\boxed{\text{セ}}$の解答群

⓪ の$\frac{1}{4}$倍である	① の 4 倍である
② の$\frac{1}{3}$倍である	③ の 3 倍である
④ の$\frac{1}{2}$倍である	⑤ の 2 倍である
⑥ と等しくなる	

$\boxed{\text{ソ}}$の解答群

⓪ ただ 1 つあり，その値は x_0 より小さい
① ただ 1 つあり，その値は x_0 より大きい
② ただ 1 つあり，その値は x_0 と等しい
③ 2 つ以上ある

(3) 縦の長さが 9cm，横の長さが 24cm の長方形に限らず，いろいろな長方形の厚紙から(1), (2)と同じようにふたのない箱とふたのある箱を作る。このとき

ふたのある箱の容積の最大値が，ふたのない箱の容積の最大値$\boxed{\text{セ}}$

ということが成り立つための長方形についての記述として，次の ⓪～④ のうち，正しいものは$\boxed{\text{タ}}$である。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪　縦の長さが 9cm，横の長さが 24cm の長方形のときのみ成り立つ。
①　縦の長さが 9cm，横の長さが 24cm の長方形のときと，縦の長さが 24cm，横の長さが 9cm の長方形のときのみ成り立つ。
②　縦と横の長さの比が 3 : 8 の長方形のときのみ成り立つ。
③　縦と横の長さの比が 3 : 8 の長方形のときと，縦と横の長さの比が 8 : 3 の長方形のときのみ成り立つ。
④　縦と横の長さに関係なくどのような長方形のときでも成り立つ。

[2] $1^2+2^2+\cdots+10^2$ をある関数の定積分で表すことを考えよう。

(1) すべての実数 t に対して，$\displaystyle\int_t^{t+1} f(x)\,dx = t^2$ となる 2 次関数 $f(x)$ を求めよう。

$$\int_t^{t+1} 1\,dx = \boxed{\text{ア}},\quad \int_t^{t+1} x\,dx = t + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \int_t^{t+1} x^2\,dx = t^2 + t + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。また，l, m, n を定数とし，$f(x) = lx^2 + mx + n$ とおくと

$$\int_t^{t+1} f(x)\,dx = lt^2 + (l+m)t + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}l + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}m + n$$

を得る。このことから，t についての恒等式

$$t^2 = lt^2 + (l+m)t + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}l + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}m + n$$

を得る。よって，$l = \boxed{\text{カ}}$，$m = \boxed{\text{キク}}$，$n = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ とわかる。

(2) (1)で求めた $f(x)$ を用いれば，次が成り立つ。

$$1^2+2^2+\cdots+10^2 = \int_1^{\boxed{\text{サシ}}} f(x)\,dx$$

第３問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 14 ページの正規分布表を用いてもよい。

1, 2, 3, 4 の数字がそれぞれ 1 つずつ書かれた 4 枚の白のカードが箱 A に，1, 2, 3, 4 の数字がそれぞれ 1 つずつ書かれた 4 枚の赤のカードが箱 B に入っている。箱 A, B からそれぞれ 1 枚ずつのカードを無作為に取り出し，取り出したカードの数字を確認してからもとに戻す試行について，次のように確率変数 X, Y を定める。

「確率変数 X」

取り出した白のカードに書かれた数と赤のカードに書かれた数の**小さい方**の数（書かれた数が等しい場合はその数）を X の値とする。

「確率変数 Y」

取り出した白のカードに書かれた数と赤のカードに書かれた数の**大きい方**の数（書かれた数が等しい場合はその数）を Y の値とする。

太郎さんは，この試行を 2 回繰り返したときに記録された 2 個の数の平均値 $t_2 = 2.50$ と，100 回繰り返したときに記録された 100 個の数の平均値 $t_{100} = 2.95$ が書いてあるメモを見つけた。メモに関する**太郎さんの記憶**は次のとおりである。

太郎さんの記憶

メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 X」の平均値である。

太郎さんは，このメモに書かれていた t_2 と t_{100} が「確率変数 X」か「確率変数 Y」のうちどちらか一方の平均値であったことは覚えていたが，**太郎さんの記憶**における「確率変数 X」の部分が確かでなく，もしかしたら「確率変数 Y」だったかもしれないと感じている。このことについて，太郎さんが花子さんに相談したところ，花子さんは，太郎さんが見つけたメモに書かれていた 2 つの平均値をもとにして**太郎さんの記憶**が正しいかどうかがわかるのではないかと考えた。

(1) $X = 1$ となるのは，白のカード，赤のカードともに 1 か，白のカードが 1 で赤のカードが 2 以上か，赤のカードが 1 で白のカードが 2 以上の場合であり，全部で $\boxed{\text{ア}}$ 通りある。$X = 2, 3, 4$ についても同様に考えることにより，X の確率分布は

X	1	2	3	4	計
P	$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{16}$	$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{16}$	1

となることがわかる。また，Y の確率分布は

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{\boxed{\text{オ}}}{16}$	$\frac{\boxed{\text{カ}}}{16}$	$\frac{\boxed{\text{キ}}}{16}$	1

となる。

確率変数 Z を $Z = \boxed{\text{ク}} - X$ とすると，Z の確率分布と Y の確率分布は同じであることがわかる。

(2) 確率変数 X の平均 (期待値) と標準偏差はそれぞれ，$E(X) = \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{8}$，$\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{55}}{8}$ となる。このことと，(1)の確率変数 Z に関する考察から，確率変数 Y の平均は，$E(Y) = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{8}$ となり，標準偏差は $\sigma(Y) = \boxed{\text{ス}}$ となる。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

⓪ $\{\sigma(X)\}^2$	① $5 - \sigma(X)$	② $5\sigma(X)$	③ $\sigma(X)$

(3) 確率変数 X, Y の分布から**太郎さんの記憶**が正しいかどうかを推測しよう。

X の確率分布をもつ母集団を考え，この母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 X_1，X_2，…，X_n とし，標本平均を $\overline{X}$ とする。Y の確率分布をもつ母集団を考え，この母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 Y_1，Y_2，…，Y_n とし，標本平均を $\overline{Y}$ とする。

(i) メモに書かれていた，$t_2 = 2.50$ について考えよう。

花子さんは，$\overline{X} = 2.50$ となる確率 $P(\overline{X} = 2.50)$ と $\overline{Y} = 2.50$ となる確率 $P(\overline{Y} = 2.50)$ を比較することで，**太郎さんの記憶**が正しいかどうかがわかるのではないかと考えた。

$\overline{X} = 2.50$ となる確率は，$X_1 + X_2 = 5$ となる確率であり，(1)の X の確率分布より

$$P(\overline{X} = 2.50) = \frac{\boxed{\text{セソ}}}{64}$$

となり，(1)の Y の確率分布から，$P(\overline{Y} = 2.50) \boxed{\text{タ}} P(\overline{X} = 2.50)$ が成り立つことがわかる。

このことから，花子さんは，$t_2 = 2.50$ からでは**太郎さんの記憶**が正しいかどうかはわからないと考えた。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(ii) メモに書かれていた，$t_{100}=2.95$ について考えよう。

n が大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(E(\overline{X}),\ \{\sigma(\overline{X})\}^2\right)$ に従い，

$\sigma(\overline{X})=$ $\boxed{\text{チ}}$ である。$n=100$ は大きいので，$\overline{X}=2.95$ であったとすると，推定される母平均を m_X として，m_X の信頼度 95%の信頼区間は

$\boxed{\text{ツ}} \leqq m_X \leqq \boxed{\text{テ}}$ ………①

となる。一方，$\overline{Y}=2.95$ であったとすると，推定される母平均を m_Y として，m_Y の信頼度 95%の信頼区間は

$\boxed{\text{ト}} \leqq m_Y \leqq \boxed{\text{ナ}}$ ………②

となることもわかる。ただし，$\boxed{\text{ツ}}$ ～ $\boxed{\text{ナ}}$ の計算においては，$\sqrt{55}=7.4$ とする。

$\boxed{\text{チ}}$ の解答群

⓪ $\{\sigma(X)\}^2$	① $\dfrac{\sigma(X)}{n}$	② $\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$	③ $\dfrac{\{\sigma(X)\}^2}{n}$

$\boxed{\text{ツ}}$ ～ $\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑧のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 1.693	① 1.875	② 2.057
③ 2.740	④ 2.769	⑤ 2.798
⑥ 3.102	⑦ 3.131	⑧ 3.160

花子さんは，次の**基準**により**太郎さんの記憶**が正しいかどうかを判断することにした。ただし，**基準**が適用できない場合には，判断しないものとする。

基準

①の信頼区間に $E(X)$ が含まれていて，②の信頼区間に $E(Y)$ が含まれていないならば，**太郎さんの記憶**は正しいものとする。①の信頼区間に $E(X)$ が含まれず，②の信頼区間に $E(Y)$ が含まれているならば，**太郎さんの記憶**は正しくないものとする。

$E(X)$ は①の信頼区間に $\boxed{\text{ニ}}$。$E(Y)$ は②の信頼区間に $\boxed{\text{ヌ}}$。

以上より，**太郎さんの記憶**については，$\boxed{\text{ネ}}$。

$\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

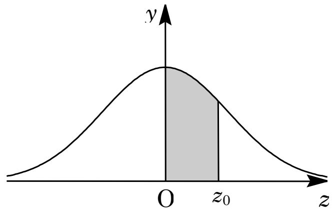
⓪ 含まれている	① 含まれていない

$\boxed{\text{ネ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～② のうちから１つ選べ。

⓪　正しいと判断され，メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 X」の平均値である
①　正しくないと判断され，メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 Y」の平均値である
②　**基準**が適用できないので，判断しない

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第４問

解答解説のページへ

数列の増減について考える。与えられた数列$\{p_n\}$の増減について次のように定める。

・すべての自然数 n について $p_n < p_{n+1}$ となるとき，数列$\{p_n\}$はつねに増加するという。

・すべての自然数 n について $p_n > p_{n+1}$ となるとき，数列$\{p_n\}$はつねに減少するという。

・ $p_k < p_{k+1}$ となる自然数 k があり，さらに $p_l > p_{l+1}$ となる自然数 l もあるとき，数列$\{p_n\}$は増加することも減少することもあるという。

(1)　数列$\{a_n\}$は，$a_1 = 23$，$a_{n+1} = a_n - 3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。このとき，$a_n = \boxed{アイ}\,n + \boxed{ウエ}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となり，$a_n < 0$ を満たす最小の自然数 n は $\boxed{オ}$ である。

数列$\{a_n\}$は $\boxed{カ}$。また，自然数 n に対して，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと，数列$\{S_n\}$は $\boxed{キ}$。$n \geqq \boxed{オ}$ のとき，$\boxed{ク}$。また，$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$n \geqq \boxed{オ}$ のとき，$\boxed{ケ}$。

$\boxed{カ}$，$\boxed{キ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　つねに増加する

①　つねに減少する

②　増加することも減少することもある

$\boxed{ク}$ の解答群

⓪　$a_n < 0$ である

①　$a_n > 0$ である

②　$a_n < 0$ となることも $a_n > 0$ となることもある

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪　$b_n < b_{n+1}$ である

①　$b_n > b_{n+1}$ である

②　$b_n < b_{n+1}$ となることも $b_n > b_{n+1}$ となることもある

(2)　数列$\{c_n\}$は，$c_1 = 30$，$c_{n+1} = \dfrac{50c_n - 800}{c_n - 10}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。

以下では，すべての自然数 n に対して $c_n \neq 20$ となることを用いてよい。

$d_n = \dfrac{1}{c_n - 20}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，$d_1 = \dfrac{1}{\boxed{コサ}}$ であり，また

$c_n = \dfrac{1}{d_n} + \boxed{シス}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$……①が成り立つ。したがって

$$\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{50\left(\dfrac{1}{d_n}+\boxed{\text{シス}}\right)-800}{\left(\dfrac{1}{d_n}+\boxed{\text{シス}}\right)-10}-\boxed{\text{シス}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により，$d_{n+1}=\dfrac{d_n}{\boxed{\text{セ}}}+\dfrac{1}{\boxed{\text{ソタ}}}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つ。

数列$\{d_n\}$の一般項は，$d_n=\dfrac{1}{\boxed{\text{チツ}}}\left(\dfrac{1}{\boxed{\text{テ}}}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{\boxed{\text{トナ}}}$である。

したがって，$d_n\ \boxed{\text{ニ}}\ \dfrac{1}{\boxed{\text{トナ}}}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$であり，数列$\{d_n\}$は$\boxed{\text{ヌ}}$。

よって①により，O を原点とする座標平面上に$n=1$から$n=10$まで点$(n,\ c_n)$を図示すると$\boxed{\text{ネ}}$となる。

$\boxed{\text{ニ}}$の解答群

⓪ ＜	① ＝	② ＞

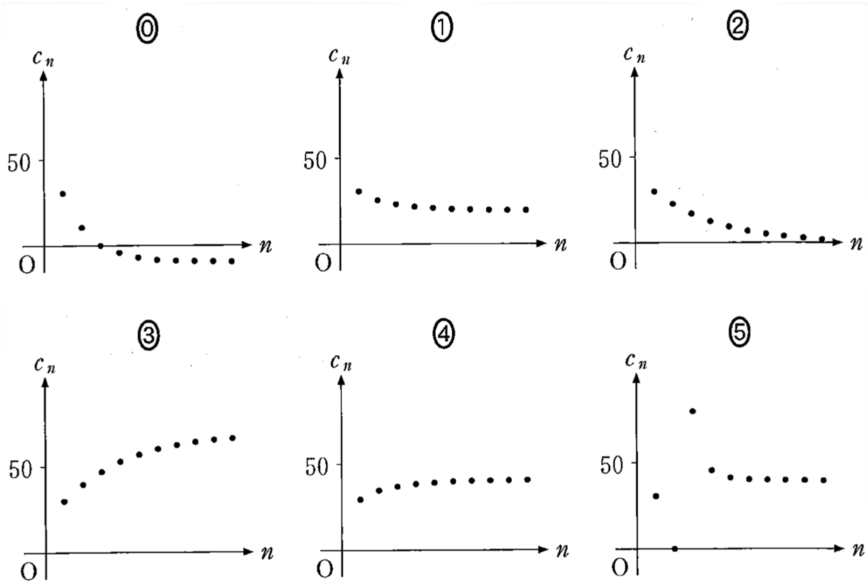
$\boxed{\text{ヌ}}$の解答群

⓪ つねに増加する

① つねに減少する

② 増加することも減少することもある

$\boxed{\text{ネ}}$については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから１つ選べ。



第５問

解答解説のページへ

点 O を原点とする座標空間において 2 点 A，B の座標を，A(0，−3，5)，B(2，0，4) とし，直線 AB と xy 平面との交点を C とする。また，点 D の座標を，D(7，4，5) とする。

直線 AB 上の点 P について，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すことにする。

(1) 点 P の座標は $\mathrm{P}(\boxed{\text{ア}}t,\ \boxed{\text{イ}}t-\boxed{\text{ウ}},\ -t+\boxed{\text{エ}})$ と表すことができる。点 C の座標は $\mathrm{C}(\boxed{\text{オカ}},\ \boxed{\text{キク}},\ 0)$ である。点 C は線分 AB を $\boxed{\text{ケ}}:\boxed{\text{コ}}$ に外分する。ただし $\boxed{\text{ケ}}:\boxed{\text{コ}}$ は最も簡単な整数の比で答えよ。

(2) $\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ となるときの点 P の座標について考えよう。

$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$ ……①が成り立つ。ここで，

$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることから，0 でない実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すことができるので，①は，$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|$ ……②と表すことができる。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ と $|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2$ は，それぞれ

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-7(\boxed{\text{セ}}t-\boxed{\text{ソ}}),\quad |\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2=14(t^2-\boxed{\text{タ}}t+\boxed{\text{チ}})$$

と表される。したがって，②の両辺の 2 乗が等しくなるのは，$t=\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}$ のときである。ただし，$\boxed{\text{ツ}}<\boxed{\text{テ}}$ とする。

$t=\boxed{\text{ツ}},\ \boxed{\text{テ}}$ のときの $\angle\mathrm{CPD}$ をそれぞれ調べることで，$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ となる点 P の座標は，$\mathrm{P}(\boxed{\text{ト}},\ \boxed{\text{ナ}},\ \boxed{\text{ニ}})$ であることがわかる。

(3) 直線 AB から点 A を除いた部分を点 P が動くとき，直線 DP は xy 平面と交わる。この交点を Q とするとき，点 Q が描く図形について考えよう。

点 Q が直線 DP 上にあることから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は実数 s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ と表すことができる。さらに，点 Q が xy 平面上にあることから，s は t を用いて表すことができる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\boxed{\text{ヌネ}},\ \boxed{\text{ノハ}},\ 0)-\frac{\boxed{\text{ヒフ}}}{t}(1,\ 1,\ 0)$$

と表すことができる。

したがって，点 Q はある直線上を動くことがわかる。さらに，t が 0 以外の実数値を変化するとき $\dfrac{1}{t}$ は 0 以外のすべての実数値をとることに注意すると，点 Q が描く図形は直線から 1 点を除いたものであることがわかる。この除かれた点を R とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}$ は $\boxed{\text{ヘ}}$ と平行である。

$\boxed{\text{ヘ}}$ の解答群

⓪	$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$	①	$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$	②	$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$	③	$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$
④	$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$	⑤	$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$	⑥	$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$	⑦	$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　$1\pm\sqrt{2}i$ を解にもつ２次方程式は，解と係数の関係より，

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=2,\ (1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=1-(-2)=3$$

すると，$x^2-2x+3=0$ となる。

ここで，$S(x)=x^2-2x+3$ とおき，$1+\sqrt{2}i$ を解にもつ $P(x)$ を $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，

$$P(x)=S(x)Q(x)+R(x)$$

すると，$P(1+\sqrt{2}i)=0$，$S(1+\sqrt{2}i)=0$ から，$R(1+\sqrt{2}i)=0$

そこで，$R(x)=mx+n$ とおくと，$m(1+\sqrt{2}i)+n=0$ となり，$m=n=0$

よって，$R(x)=0$ から，$1-\sqrt{2}i$ も $P(x)=0$ の解である。

(2)　$P(x)=3x^4+2x^3+kx+l$ を $S(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とすると，$P(x)=S(x)(3x^2+8x+7)+(k-10)x+l-21$ から，

$$Q(x)=3x^2+8x+7,\ R(x)=(k-10)x+l-21$$

$P(x)=0$ は $1+\sqrt{2}i$ を解にもつので $R(x)=0$ となり，$k-10=0$，$l-21=0$ から，

$$k=10,\ l=21$$

これより，$P(x)=(x^2-2x+3)(3x^2+8x+7)$ となり，$P(x)=0$ の $1+\sqrt{2}i$ 以外の解は，$x=1-\sqrt{2}i$，$\dfrac{-4\pm\sqrt{5}i}{3}$ である。

［解　説］

複素数と方程式を題材にした基本題です。

[2]　(1)　22°C で $N_1=285$，25°C で $N_2=368$，28°C で $N_3=475$ のとき，

$$\log_{10}N_1=\log_{10}285=\log_{10}(2.85\times10^2)=0.4548+2=2.4548$$

$$\log_{10}N_2=\log_{10}368=\log_{10}(3.68\times10^2)=0.5658+2=2.5658$$

これより，$p_1=2.455$，$p_2=2.566$ となり，同様に p_3 を計算すると，

$$\frac{p_2-p_1}{25-22}=\frac{p_3-p_2}{28-25}=k$$

すると，3 点 $(22,\ p_1)$，$(25,\ p_2)$，$(28,\ p_3)$ は直線 $y=k(x-22)+p_1$ 上にあり，ここで点 $(x,\ \log_{10}N)$ がこの直線上にあるとすると，$\log_{10}N=k(x-22)+p_1$ から，

$$N=10^{k(x-22)+p_1}$$

(2)　$k=\dfrac{2.566-2.455}{25-22}=0.037$ となり，$x=32$ のとき，

$$\log_{10}N=0.037(32-22)+2.455=2.825=0.825+2$$

$\log_{10}6.68<0.825<\log_{10}6.69$ より，$\log_{10}6.68+2<\log_{10}N<\log_{10}6.69+2$

$$\log_{10}(6.68\times10^2)<\log_{10}N<\log_{10}(6.69\times10^2)$$

よって，$668<N<669$ から，N は ⑤「660 以上 670 未満」と予想できる。

［解　説］

常用対数の応用で，問題文は長いものの，内容は基本的です。

第２問

問題のページへ

[1]　図 1 のように，縦 9cm で横 24cm の長方形の四隅から 1 辺の長さ $x$cm の正方形を切り取り，破線にそって折り曲げて，ふたのない箱を作る。このとき，$0<2x<9$ から $0<x<\frac{9}{2}$ となり，この箱の容積 V cm^3 は，

$$V=(9-2x)(24-2x)x=4x^3-66x^2+216x$$

$$\begin{aligned}V'&=12x^2-132x+216\\&=12(x^2-11x+18)\\&=12(x-2)(x-9)\end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$\frac{9}{2}$
V'		＋	0	－	
V	0	↗	200	↘	0

すると，V の増減は右表のようになり，V は $x=2$ で最大値 200 をとる。

(2)　図 2 のように，縦 9cm で横 24cm の長方形から 4 つの斜線部分を切り取り，破線にそって折り曲げて，ふたで閉じることのできる箱を作る。このとき，左側 2 つの斜線部分が 1 辺の長さ $x$cm の正方形とすると，右側 2 つの斜線部分は縦 $x$cm で横 $\frac{24}{2}=12$ cm の長方形となり，この箱の容積 W cm^3 は，

$$W=(9-2x)(12-x)x$$

すると，$W=\frac{1}{2}V$ から，W の最大値は V の最大値の $\frac{1}{2}$ 倍である。また，W が最大値をとる x は，ただ 1 つあり，その値は $x_0=2$ と等しい。

(3)　縦 $a$cm で横 $b$cm の長方形の場合，

$$V=(a-2x)(b-2x)x\,,\ \ W=(a-2x)\left(\frac{b}{2}-x\right)x$$

これより，縦と横の長さに関係なくどのような長方形のときでも，$W=\frac{1}{2}V$ は成り立つ。

［解　説］

微分の応用問題です。図 1 と図 2 が記されているために，立式は容易でしょう。

[2]　(1)　$\displaystyle\int_t^{t+1} 1\,dx = \Big[\,x\,\Big]_t^{t+1} = 1$，$\displaystyle\int_t^{t+1} x\,dx = \Big[\,\frac{x^2}{2}\,\Big]_t^{t+1} = \frac{1}{2}\{(t+1)^2 - t^2\} = t + \frac{1}{2}$

$$\int_t^{t+1} x^2\,dx = \Big[\,\frac{x^3}{3}\,\Big]_t^{t+1} = \frac{1}{3}\{(t+1)^3 - t^3\} = t^2 + t + \frac{1}{3}$$

ここで，$f(x) = lx^2 + mx + n$ とおくと，

$$\int_t^{t+1} f(x)\,dx = l\Big(t^2 + t + \frac{1}{3}\Big) + m\Big(t + \frac{1}{2}\Big) + n\cdot 1$$
$$= lt^2 + (l+m)t + \frac{1}{3}l + \frac{1}{2}m + n$$

すると，$\displaystyle\int_t^{t+1} f(x)\,dx = t^2$ から，$t^2 = lt^2 + (l+m)t + \dfrac{1}{3}l + \dfrac{1}{2}m + n$ となり，

$$l = 1,\quad l + m = 0,\quad \frac{1}{3}l + \frac{1}{2}m + n = 0$$

よって，$l = 1$，$m = -1$，$n = -\dfrac{1}{3}\cdot 1 - \dfrac{1}{2}\cdot(-1) = \dfrac{1}{6}$

(2)　(1)より，$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 1^2$，$\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = 2^2$，$\cdots$，$\displaystyle\int_{10}^{11} f(x)\,dx = 10^2$ から，

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \cdots + \int_{10}^{11} f(x)\,dx$$
$$= \int_1^{11} f(x)\,dx$$

［解　説］

定積分の計算問題です。誘導が非常に丁寧です。

第３問

問題のページへ

4 枚の白カードと 4 枚の赤カードに，それぞれ 1, 2, 3, 4 の数字が書かれている。白カードの入っている箱 A，赤カードが入っている箱 B から，1 枚ずつ取り出して数字を確認し，もとに戻す試行について，白カードの数字と赤カードの数字の小さい方の数を X，大きい方を Y とする。

(1)　$X=1$ となるのは，(白，赤)$=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(1,\ 3)$，$(1,\ 4)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 1)$，$(4,\ 1)$ の 7 通りである。$X=2$ となるのは，(白，赤)$=(2,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 2)$ の 5 通り，$X=3$ となるのは，(白，赤)$=(3,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$ の 3 通り，$X=4$ となるのは，(白，赤)$=(4,\ 4)$ の 1 通りである。

$Y=1,\ 2,\ 3,\ 4$ の場合も同様に考えると，X, Y の確率分布は下表のようになる。

X	1	2	3	4	計
P	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

Y	1	2	3	4	計
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

すると，確率変数 Z を $Z=5-X$ とすると，Z の確率分布と Y の確率分布は同じである。

(2)　$E(X)=1\times\frac{7}{16}+2\times\frac{5}{16}+3\times\frac{3}{16}+4\times\frac{1}{16}=\frac{15}{8}$ であり，$\sigma(X)=\frac{\sqrt{55}}{8}$ となる。

また，$Y=5-X$ から，

$$E(Y)=5-E(X)=5-\frac{15}{8}=\frac{25}{8},\ \ \sigma(Y)=\left|-1\right|\sigma(X)=\sigma(X)=\frac{\sqrt{55}}{8}$$

(3)　X の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 X_1，X_2，…，X_n とし，標本平均を $\overline{X}$ とする。Y の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 Y_1，Y_2，…，Y_n とし，標本平均を $\overline{Y}$ とする。

(i)　$t_2=2.50$ について，$P(\overline{X}=2.50)$ と $P(\overline{Y}=2.50)$ を比較する。

まず，$\overline{X}=2.50$ すなわち $X_1+X_2=5$ となるのは，$(X_1,\ X_2)=(1,\ 4)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(4,\ 1)$ より，

$$P(\overline{X}=2.50)=\frac{7}{16}\times\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\times\frac{3}{16}+\frac{3}{16}\times\frac{5}{16}+\frac{1}{16}\times\frac{7}{16}=\frac{44}{16^2}=\frac{11}{64}$$

$\overline{Y}=2.50$ すなわち $Y_1+Y_2=5$ となるのも，同様すると $P(\overline{Y}=2.50)=\frac{11}{64}$ から，

$$P(\overline{X}=2.50)=P(\overline{Y}=2.50)$$

よって，$t_2=2.50$ からでは「太郎さんの記憶」が正しいかどうかはわからない。

(ii)　$t_{100}=2.95$ について，n が十分に大きいときには，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(E(\overline{X}),\ \{\sigma(\overline{X})\}^2\right)$ に従い，

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}=\frac{\sigma(X)}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{55}}{80}$$

$n=100$ で，$\overline{X}=2.95$ であったとすると，母平均 m_X の信頼度 95%の信頼区間は,

$$2.95-1.96\times\frac{\sqrt{55}}{80}\leqq m_X\leqq 2.95+1.96\times\frac{\sqrt{55}}{80}$$

ここで，$1.96\times\frac{\sqrt{55}}{80}=1.96\times\frac{7.4}{80}=0.1813$ となり，$2.7687\leqq m_X\leqq 3.1313$ から,

$$2.769\leqq m_X\leqq 3.131\cdots\cdots\cdots①$$

同様に，$\overline{Y}$ は近似的に正規分布 $N\left(E(\overline{Y}),\ \{\sigma(\overline{Y})\}^2\right)$ に従い,

$$\sigma(\overline{Y})=\frac{\sigma(Y)}{\sqrt{n}}=\frac{\sigma(Y)}{\sqrt{100}}=\frac{\sqrt{55}}{80}$$

$n=100$ で，$\overline{Y}=2.95$ であったとすると，母平均 m_Y の信頼度 95%の信頼区間は,

$$2.95-1.96\times\frac{\sqrt{55}}{80}\leqq m_Y\leqq 2.95+1.96\times\frac{\sqrt{55}}{80}$$

①の計算過程を流用すると，$2.769\leqq m_Y\leqq 3.131\cdots\cdots\cdots②$

これより，$E(X)$ は①の信頼区間に含まれていない。$E(Y)$ は②の信頼区間に含まれている。

したがって,「太郎さんの記憶」については，正しくないと判断され，メモに書かれていた t_2 と t_{100} は「確率変数 Y」の平均値である。

［解　説］

「物忘れ」が題材となった興味深い内容ですが，現実的に考えると引っかかるところもあります。ただ，配点比で計算して，制限時間 12 分の問題としては，量的に適切とは言い難いでしょう。これまで，確率分布と統計の選択題については，あまりなかったことですが……。

第４問

問題のページへ

(1)　$a_1=23$，$a_{n+1}=a_n-3$ に対し，$a_n=23-3(n-1)=-3n+26$

$a_n<0$ となるのは，$-3n+26<0$ から $n>\dfrac{26}{3}=8+\dfrac{2}{3}$ であり，満たす最小の自然数 n は 9 である。そして，数列 $\{a_n\}$ はつねに減少する。

すると，$n\leqq 8$ で $a_n>0$，$n\geqq 9$ で $a_n<0$ となり，

$$a_1>a_2>\cdots>a_8>0>a_9>a_{10}>\cdots$$

これより，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと，数列 $\{S_n\}$ は増加することも減少することもある。

また，$n\geqq 9$ で，$0>a_n>a_{n+1}$ から $\dfrac{1}{a_n}<\dfrac{1}{a_{n+1}}<0$ となり，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，$b_n<b_{n+1}<0$ である。

(2)　$c_1=30$，$c_{n+1}=\dfrac{50c_n-800}{c_n-10}$ に対し，$d_n=\dfrac{1}{c_n-20}$ とおくと，$d_1=\dfrac{1}{30-20}=\dfrac{1}{10}$

また，$c_n-20=\dfrac{1}{d_n}$ より $c_n=\dfrac{1}{d_n}+20$ となり，$\dfrac{1}{d_{n+1}}+20=\dfrac{50\left(\dfrac{1}{d_n}+20\right)-800}{\left(\dfrac{1}{d_n}+20\right)-10}$

$$\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{50\left(\dfrac{1}{d_n}+20\right)-800}{\left(\dfrac{1}{d_n}+20\right)-10}-20=\frac{50+1000d_n-800d_n}{1+20d_n-10d_n}-20$$

$$=\frac{200d_n+50}{10d_n+1}-20=\frac{200d_n+50-200d_n-20}{10d_n+1}=\frac{30}{10d_n+1}$$

すると，$d_{n+1}=\dfrac{10d_n+1}{30}=\dfrac{d_n}{3}+\dfrac{1}{30}$ となり，$d_{n+1}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{3}\left(d_n-\dfrac{1}{20}\right)$ から，

$$d_n-\frac{1}{20}=\left(d_1-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{20}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{20}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$d_n=\dfrac{1}{20}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{20}$ であり，したがって $d_n>\dfrac{1}{20}$ となる。

また，数列 $\{d_n\}$ はつねに減少するので，$d_n\leqq d_1=\dfrac{1}{10}$ である。

これより，$10\leqq\dfrac{1}{d_n}<20$ で数列 $\left\{\dfrac{1}{d_n}\right\}$ はつねに増加するので，$c_n=\dfrac{1}{d_n}+20$ から，$30\leqq c_n<40$ で数列 $\{c_n\}$ はつねに増加する。

すると，$n=1$ から $n=10$ まで点 $(n,\ c_n)$ を図示すると ④ となる。

［解　説］

誘導付きで漸化式を解く標準題です。ただ，不等式の処理に関してミスに要注意ですので，たとえば $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフを見ながら進めるのも 1 つの手です。

第５問

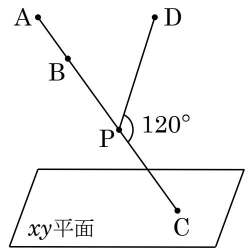
問題のページへ

(1) A$(0,\ -3,\ 5)$，B$(2,\ 0,\ 4)$に対し，直線 AB 上の点 P について，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ -3,\ 5)+t(2,\ 3,\ -1)=(2t,\ 3t-3,\ -t+5)$$

ここで，直線 AB と xy 平面との交点を C とすると，$-t+5=0$ から $t=5$ となり，C$(10,\ 12,\ 0)$ である。これより，点 C は線分 AB を $5:(5-1)=5:4$ に外分する。

(2) D$(7,\ 4,\ 5)$ とするとき，$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ となるのは，



$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|\cos120^\circ=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PC}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と表すと，①より，

$$k\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=-\frac{1}{2}|k\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{PD}}|\cdots\cdots\cdots②$$

$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(7-2t,\ 7-3t,\ t)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=2(7-2t)+3(7-3t)-t=-14t+35=-7(2t-5)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2=(7-2t)^2+(7-3t)^2+t^2=14t^2-70t+98=14(t^2-5t+7)$$

②より，$k^2(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}})^2=\frac{1}{4}k^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|^2$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=4+9+1=14$ から，

$$49(2t-5)^2=\frac{1}{4}\cdot14\cdot14(t^2-5t+7),\ 4t^2-20t+25=t^2-5t+7$$

すると，$t^2-5t+6=0$ から $(t-2)(t-3)=0$ となり，$t=2,\ 3$ である。

・$t=2$ のとき　P$(4,\ 3,\ 3)$ から $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(6,\ 9,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(3,\ 1,\ 2)$

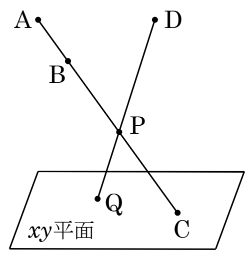
$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=18+9-6=21>0$$

・$t=3$ のとき　P$(6,\ 6,\ 2)$ から $\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(4,\ 6,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=(1,\ -2,\ 3)$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PD}}=4-12-6=-14<0$$

よって，$\angle\mathrm{CPD}=120^\circ$ となるのは $t=3$ のときで，P$(6,\ 6,\ 2)$ である。

(3) 直線 AB から点 A を除いた部分を点 P が動くとき，直線 DP と xy 平面との交点を Q とすると，



$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(7,\ 4,\ 5)+s(2t-7,\ 3t-7,\ -t)$$

$5-st=0$ から $s=\frac{5}{t}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(7,\ 4,\ 5)+\frac{5}{t}(2t-7,\ 3t-7,\ -t)$$

$$=(7,\ 4,\ 5)+\left(10-\frac{35}{t},\ 15-\frac{35}{t},\ -5\right)=(17,\ 19,\ 0)-\frac{35}{t}(1,\ 1,\ 0)$$

これより，点 Q が描く図形は直線となる。ただし，$\frac{1}{t}$ は 0 以外のすべての実数値をとることより，この直線から点 R$(17,\ 19,\ 0)$ は除く。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}=(10,\ 15,\ -5)=5(2,\ 3,\ -1)=5\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{DR}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と平行である。

［解 説］

空間ベクトルと直線の標準的な問題です。丁寧な誘導がついていますが，量的にはやや多めです。