第１問

解答解説のページへ

[1]　k を定数として，x についての不等式 $\sqrt{5}x < k-x < 2x+1$ ……①を考える。

(1)　不等式 $k-x<2x+1$ を解くと，$x > \dfrac{k-\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，不等式 $\sqrt{5}x<k-x$ を解くと，$x < \dfrac{\boxed{\text{ウエ}}+\sqrt{5}}{\boxed{\text{オ}}}k$ である。

よって，不等式①を満たす x が存在するような k の値の範囲は,
$k < \boxed{\text{カ}} + \boxed{\text{キ}}\sqrt{5}$ ……②である。

(2)　p，q は $p<q$ を満たす実数とする。x の値の範囲 $p<x<q$ に対し，$q-p$ をその範囲の幅ということにする。

②が成り立つとき，不等式①を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるような k の値の範囲は，$k < \boxed{\text{クケ}} - \boxed{\text{コ}}\sqrt{5}$ である。

[2]　△ABC において BC = 1 であるとする。$\sin\angle ABC$ と $\sin\angle ACB$ に関する条件が与えられたときの△ABC の辺，角，面積について考察する。

(1)　$\sin\angle ABC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，$\cos\angle ABC = \pm\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

(2)　$\sin\angle ABC = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$ であるとする。

(i)　このとき，$AC = \boxed{ウ}\,AB$ である。

(ii)　この条件を満たす三角形は 2 つあり，その中で面積が大きい方の△ABC においては，$AB = \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

(3)　$\sin\angle ABC = 2\sin\angle ACB$ を満たす△ABC のうち，面積 S が最大となるものを求めよう。

$\sin\angle ABC = 2\sin\angle ACB$ と BC = 1 により，$\cos\angle ABC = \dfrac{\boxed{カ} - \boxed{キ}\,AB^2}{2AB}$ である。△ABC の面積 S について調べるために，S^2 を考える。$AB^2 = x$ とおくと

$$S^2 = -\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}x^2 + \frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}x - \frac{1}{16}$$

と表すことができる。したがって，S^2 が最大となるのは $x = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ のとき，すなわち $AB = \dfrac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ のときである。$S > 0$ より，このときに面積 S も最大となる。

また，面積 S が最大となる△ABC において，∠ABC は $\boxed{チ}$ で，∠ACB は $\boxed{ツ}$ である。

$\boxed{チ}$，$\boxed{ツ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　鋭角	①　直角	②　鈍角

第２問

解答解説のページへ

[1]　高校 1 年生の太郎さんと花子さんのクラスでは，文化祭でやきそば屋を出店することになった。二人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討するためにアンケート調査を行い，1 皿あたりの価格と売り上げ数の関係について下の表のように予測した。

1 皿あたりに価格 (円)	100	150	200	250	300
売り上げ数　　(皿)	1250	750	450	250	50

この結果から太郎さんと花子さんは，1 皿あたりの価格が 100 円以上 300 円以下の範囲で，予測される利益 (以下，利益) の最大値について考えることにした。

太郎：価格を横軸，売り上げ数を縦軸にとって散布図をかいてみたよ。
花子：散布図の点の並びは，1 次関数のグラフのようには見えないね。2 次関数のグラフみたいに見えるよ。
太郎：価格が 100，200，300 のときの点を通る 2 次関数のグラフをかくと，図 1 のように価格が 150，250 のときの点もそのグラフの近くにあるよ。
花子：現実には，もっと複雑な関係なのだろうけど，1 次関数と 2 次関数で比べると，2 次関数で考えた方がよいような気がするね。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……①のグラフは，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るとする。このとき，$b=\boxed{アイウ}$である。

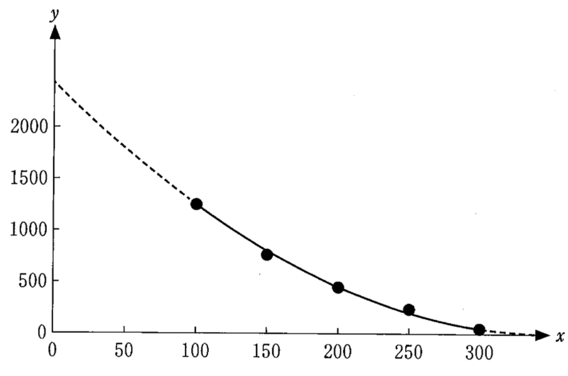


図　1

二人は 1 皿あたりの価格 x と売り上げ数 y の関係が①を満たしたときの，$100 \leqq x \leqq 300$ での利益の最大値 M について考えることにした。

1 皿あたりの材料費は 80 円であり，材料費以外にかかる費用は 5000 円である。よって，$x-80$ と売り上げ数の積から，5000 を引いたものが利益となる。

このとき，売り上げ数を①の右辺の 2 次式とすると，利益は x の$\boxed{エ}$次式となる。一方で，売り上げ数として①の右辺の代わりに x の$\boxed{オ}$次式を使えば，利益は x の 2 次式となる。

太郎：利益が $\boxed{\text{エ}}$ 次式だと，今の私たちの知識では最大値 M を正確に求めることができないね。

花子：①の右辺の代わりに $\boxed{\text{オ}}$ 次式を使えば利益は 2 次式になるから，最大値を求められるよ。

太郎：現実の問題を考えるときには正確な答えが出せないことも多いから，自分の知識の範囲内で工夫しておおよその値を出すことには価値があると思うよ。

花子：考えているのが利益だから，①の右辺の代わりの式は売り上げ数を少なく見積もった式を考えると手堅いね。

太郎：少なく見積もるということは，その関数のグラフは①のグラフより，下の方にあるということだね。

1 次関数 $y = -4x + 1160$ ……②を考える。このとき，①と②のグラフの位置関係は右の図 2 のようになっている。

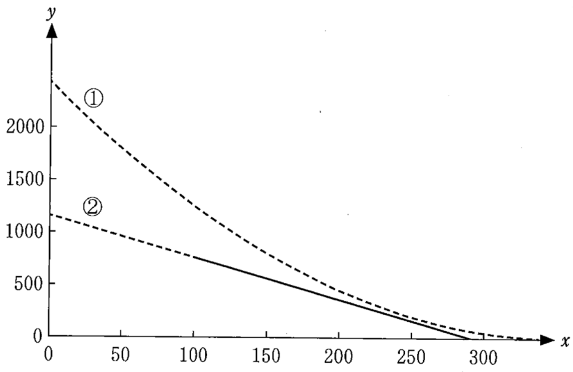


図　2

①の右辺の代わりに②の右辺を使うと，売り上げ数を少なく見積もることになる。売り上げ数を②の右辺としたときの利益 z は，

$$z = -\boxed{\text{カ}}\,x^2 + \boxed{\text{キクケコ}}\,x - 97800$$

で与えられる。z が最大となる x を p とおくと，$p = \boxed{\text{サシス}}$ であり，z の最大値は 39100 である。

太郎：売り上げ数を少なく見積もった式は，各 x について値が①より小さければよいので，色々な式が考えられるね。

花子：それらの式を①の右辺の代わりに使ったときの利益の最大値と，①の右辺から計算される利益の最大値 M との関係はどうなるのかな。

1 次関数 $y=-8x+1968$ ……③を考える。売り上げ数を③の右辺としたときの利益は $x=163$ のとき最大となり，最大値は 50112 となる。

また，①～③のグラフの位置関係は右の図 3 のようになっている。

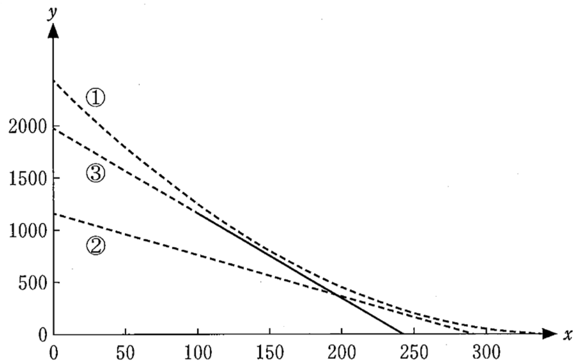


図　3

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の記述として，次の ⓪～⑥ のうち，正しいものは $\boxed{\text{セ}}$ と $\boxed{\text{ソ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群（解答の順序は問わない）

⓪　利益の最大値 M は 39100 である。

①　利益の最大値 M は 50112 である。

②　利益の最大値 M は $\dfrac{39100+50112}{2}$ である。

③　$x=163$ とすれば，利益は少なくとも 50112 以上となる。

④　$x=p$ とすれば，利益は少なくとも 39100 以上となる。

⑤　$x=163$ のときに利益は最大値 M をとる。

⑥　$x=p$ のときに利益は最大値 M をとる。

1 次関数 $y=-6x+1860$ ……④を考える。$100 \leqq x \leqq 300$ において，売り上げ数を④の右辺としたときの利益は $x=195$ のときに最大となり，最大値は 74350 となる。

また，①～④のグラフの位置関係は右の図 4 のようになっている。

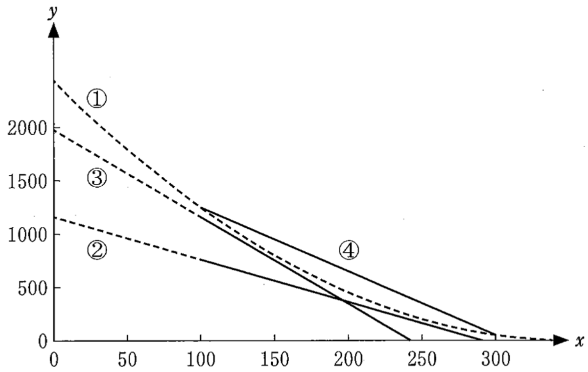


図　4

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の最大値 M についての記述として，次の ⓪～④ のうち，正しいものは $\boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ 利益の最大値 M は 50112 より小さい。

① 利益の最大値 M は 50112 である。

② 利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい。

③ 利益の最大値 M は 74350 である。

④ 利益の最大値 M は 74350 より大きい。

[2]　花子さんの通う学校では，生徒会会則の一部を変更することの賛否について生徒全員が投票をすることになった。投票結果に関心がある花子さんは，身近な人たちに尋ねて下調べをしてみようと思い，各回答が賛成ならば 1，反対ならば 0 と表すことにした。このようにして作成される n 人分のデータを x_1，x_2，⋯，x_n と表す。ただし，賛成と反対以外の回答はないものとする。

例えば，10 人について調べた結果が，0，1，1，1，0，1，1，1，1，1 であったならば，$x_1=0$，$x_2=1$，⋯，$x_{10}=1$ となる。この場合，データの値の総和は 8 であり，平均値は $\dfrac{4}{5}$ である。

(1)　データの値の総和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ は $\boxed{\text{ア}}$ と一致し，平均値 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ は $\boxed{\text{イ}}$ と一致する。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　賛成の人の数
①　反対の人の数
②　賛成の人の数から反対の人の数を引いた値
③　n 人中における賛成の人の割合
④　n 人中における反対の人の割合
⑤　$\dfrac{\text{賛成の人の数}}{\text{反対の人の数}}$ の値

(2)　花子さんは，0 と 1 だけからなるデータの平均値と分散について考えてみることにした。

$m=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおくと，平均値は $\dfrac{m}{n}$ である。また，分散を s^2 で表す。s^2 は，0 と 1 の個数に着目すると

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{\boxed{\text{ウ}}\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+\boxed{\text{エ}}\left(0-\frac{m}{n}\right)^2\right\}=\boxed{\text{オ}}$$

と表すことができる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　n	①　m	②　$(n-m)$	③　$\dfrac{m}{n}$
④　$\left(1-\dfrac{m}{n}\right)$	⑤　$\dfrac{n}{2}$	⑥　$\dfrac{m}{2}$	⑦　$\dfrac{n-m}{2}$

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{m^2}{n^2}$	① $\left(1-\dfrac{m}{n}\right)^2$	② $\dfrac{m(n-m)}{n^2}$
③ $\dfrac{m(1-m)}{n^2}$	④ $\dfrac{m(n-m)}{2n^2}$	⑤ $\dfrac{n^2-3mn+3m^2}{n^2}$
⑥ $\dfrac{n^2-2mn+2m^2}{2n^2}$		

[3]　変量 $x,\ y$ の値の組 $(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ 1)$ をデータ W とする。データ W の x と y の相関係数は 0 である。データ W に，新たに 1 個の値の組を加えたときの相関係数について調べる。なお，必要に応じて，後に示す表 1 の計算表を用いて考えてもよい。

a を実数とする。データ W に $(5a,\ 5a)$ を加えたデータを W' とする。W' の x の平均値 $\overline{x}$ は $\boxed{\text{ア}}$，W' の x と y の共分散 s_{xy} は $\boxed{\text{イ}}$ となる。ただし，x と y の共分散とは，x の偏差と y の偏差の積の平均値である。

W' の x と y の標準偏差を，それぞれ s_x，s_y とする。積 $s_x s_y$ は $\boxed{\text{ウ}}$ となる。また相関係数が 0.95 以上となるための必要十分条件は $s_{xy} \geqq 0.95 s_x s_y$ である。これより，相関係数が 0.95 以上となるような a の値の範囲は $\boxed{\text{エ}}$ である。

表 1　計算表

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	-1			
-1	1			
1	-1			
1	1			
$5a$	$5a$			

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ 0　① $5a$　② $5a+4$　③ a　④ $a+\dfrac{4}{5}$

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ $4a^2$　① $4a^2+\dfrac{4}{5}$　② $4a^2+\dfrac{4}{5}a$　③ $5a^2$　④ $20a^2$

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $4a^2+\dfrac{16}{5}a+\dfrac{4}{5}$　① $4a^2+1$

② $4a^2+\dfrac{4}{5}$　③ $2a^2+\dfrac{2}{5}$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $-\dfrac{\sqrt{95}}{4} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{95}}{4}$　① $a \leqq -\dfrac{\sqrt{95}}{4},\ \dfrac{\sqrt{95}}{4} \leqq a$

② $-\dfrac{\sqrt{95}}{5} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{95}}{5}$　③ $a \leqq -\dfrac{\sqrt{95}}{5},\ \dfrac{\sqrt{95}}{5} \leqq a$

④ $-\dfrac{2\sqrt{19}}{5} \leqq a \leqq \dfrac{2\sqrt{19}}{5}$　⑤ $a \leqq -\dfrac{2\sqrt{19}}{5},\ \dfrac{2\sqrt{19}}{5} \leqq a$

第３問

解答解説のページへ

(1)　1 枚の硬貨を繰り返し投げるとき，この硬貨の表裏の出方に応じて，座標平面上の点 P が次の**規則１**に従って移動するものとする。

規則１

・点 P は原点 O(0, 0) を出発点とする。

・点 P の x 座標は，硬貨を投げるごとに 1 だけ増加する。

・点 P の y 座標は，硬貨を投げるごとに，表が出たら 1 だけ増加し，裏が出たら 1 だけ減少する。

また，点 P の座標を次の**記号**で表す。

記号

硬貨を k 回投げ終えた時点での点 P の座標 $(x,\ y)$ を $(k,\ y_k)$ で表す。

座標平面上の点 P の移動の仕方について，例えば，硬貨を 1 回投げて表が出た場合について考える。このとき，点 P の座標は (1, 1) となる。これを図 1 のように，原点 O(0, 0) と点 (1, 1) をまっすぐな矢印で結ぶ。このようにして点 P の移動の仕方を表す。

以下において，図を使用する際には同じように考えることにする。

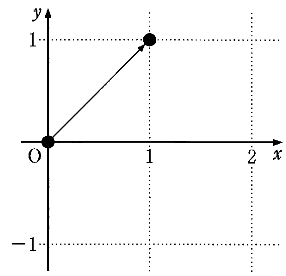


図　1

(i)　硬貨を 3 回投げ終えたとき，点 P の移動の仕方が条件

$$y_1 \geqq -1 \text{ かつ } y_2 \geqq -1 \text{ かつ } y_3 \geqq -1 \cdots\cdots\cdots (*)$$

を満たす確率を求めよう。

条件(＊)を満たす点 P の移動の仕方は図 2 のようになる。例えば点 O(0, 0) から点 A(2, 0) までの点 P の移動の仕方は，点 O(0, 0) から点 (1, 1) まで移動したのち点 A(2, 0) に移動する場合と，点 O(0, 0) から点 (1, −1) まで移動したのち点 A(2, 0) に移動する場合のいずれかであるため，2 通りある。このとき，この移動の仕方の総数である 2 を，**四角囲みの中の数字**で点 A(2, 0) の近くに書く。図 2 における他の四角囲みの中の数字についても同様に考える。

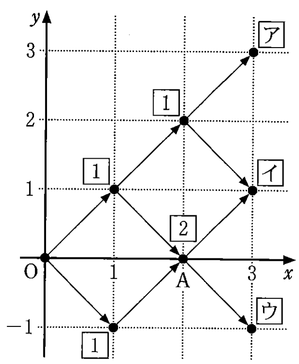


図　2

このように考えると，条件(＊)を満たす点 P の移動の仕方のうち，点(3, 3)に至る移動の仕方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，点(3, 1)に至る移動の仕方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りあり，点(3, -1)に至る移動の仕方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。

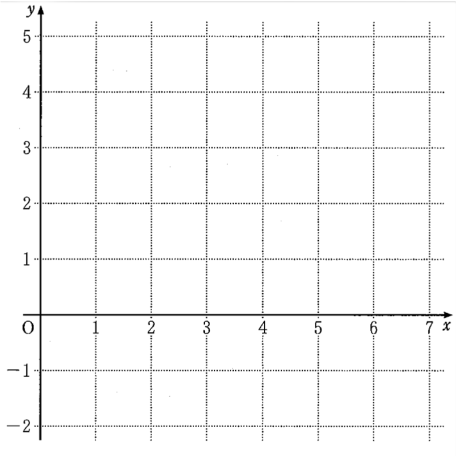
よって，点 P の移動の仕方が条件(＊)を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は，$\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}$ である。

したがって，点 P の移動の仕方が条件(＊)を満たす確率は

$$\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}{2^3}$$

として求めることができる。

(ii) 硬貨を 4 回投げるとする。このとき，(i)と同様に図を用いて考えよう。$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる。また，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 = 1$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。さらに，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ であったとき，$y_3 = 1$ である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ となる。



参考図

(iii) 硬貨を 4 回投げ終えた時点で点 P の座標が(4, 2)であるとき，点(4, 2)に至る移動の仕方によらず表の出る回数は $\boxed{\text{コ}}$ 回となり，裏の出る回数は $(4-\boxed{\text{コ}})$ 回となる。

(2) 1 個のさいころを繰り返し投げるとき，このさいころの目の出方に応じて，数直線上の点 Q が次の**規則 2** に従って移動するものとする。

規則 2

・点 Q は原点 O を出発点とする。

・点 Q の座標は，さいころを投げるごとに，3 の倍数の目が出たら 1 だけ増加し，それ以外の目が出たら 1 だけ減少する。

(i) さいころを 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ となる。

(ii) さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテトナ}}}$ となる。

(iii) さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であったとき，3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる。

第４問

解答解説のページへ

x, y, z についての 2 つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在するかどうかを考えてみよう。

(1)　2 つの式が

$$7x+13y+17z=8 \cdots\cdots\cdots ①\quad と\quad 35x+39y+34z=37 \cdots\cdots\cdots ②$$

の場合を考える。①，②から x を消去すると，$\boxed{\text{アイ}}\,y+\boxed{\text{ウエ}}\,z=3 \cdots\cdots ③$を得る。③を y, z についての不定方程式とみると，その整数解のうち，y が正の整数で最小になるのは，$y=\boxed{\text{オ}}$，$z=\boxed{\text{カキ}}$である。よって，③のすべての整数解は，k を整数として，$y=\boxed{\text{オ}}-\boxed{\text{クケ}}\,k$，$z=\boxed{\text{カキ}}+\boxed{\text{コサ}}\,k$ と表される。これらを①に代入して x を求めると，$x=31k-3+\dfrac{\boxed{\text{シ}}\,k+2}{7}$ となるので，x が整数になるのは，k を 7 で割ったときの余りが$\boxed{\text{ス}}$のときである。

以上のことから，この場合は，2 つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在することがわかる。

(2)　a を整数とする。2 つの式が

$$2x+5y+7z=a \cdots\cdots\cdots ④\quad と\quad 3x+25y+21z=-1 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

の場合を考える。⑤－④から，$x=-20y-14z-1-a \cdots\cdots ⑥$を得る。また，⑤×2－④×3 から，$35y+21z=-2-3a \cdots\cdots ⑦$を得る。このとき「$a$ を$\boxed{\text{セ}}$で割ったときの余りが$\boxed{\text{ソ}}$である」ことは，⑦を満たす整数 y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる。そのときの整数 y, z を⑥に代入すると，x も整数になる。また，そのときの x, y, z は④と⑤をともに満たす。

以上のことから，この場合は，a の値によって，2 つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在する場合と存在しない場合があることがわかる。

(3)　b を整数とする。2 つの式が

$$x+2y+bz=1 \cdots\cdots\cdots ⑧\quad と\quad 5x+6y+3z=5+b \cdots\cdots\cdots ⑨$$

の場合を考える。⑨－⑧×5 から，$-4y+(3-5b)z=b \cdots\cdots ⑩$を得る。⑩の左辺の y の係数に着目することにより，「b を 4 で割ったときの余りが$\boxed{\text{タ}}$または$\boxed{\text{チ}}$である」ことは，⑩を満たす整数 y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる。ただし，$\boxed{\text{タ}}<\boxed{\text{チ}}$とする。

そのときの整数 y, z を⑧に代入すると，x も整数になる。また，そのときの x, y, z は⑧と⑨をともに満たす。

以上のことから，この場合も，b の値によって，2 つの式をともに満たす整数 x, y, z が存在する場合と存在しない場合があることがわかる。

(4)　c を整数とする。2 つの式が

$$x+3y+5z=1 \cdots\cdots\cdots ⑪ \quad \text{と} \quad cx+3(c+5)y+10z=3 \cdots\cdots\cdots ⑫$$

の場合を考える。これまでと同様に，y，z についての不定方程式を考察することにより，「c を $\boxed{\text{ツテ}}$ で割ったときの余りが $\boxed{\text{ト}}$ または $\boxed{\text{ナニ}}$ である」ことは，⑪と⑫をともに満たす整数 x, y, z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

第５問

解答解説のページへ

△ABC において辺 AB を $2:3$ に内分する点を P とする。辺 AC 上に 2 点 A, C のいずれとも異なる点 Q をとる。線分 BQ と線分 CP との交点を R とし，直線 AR と辺 BC との交点を S とする。

以下の問題において比を解答する場合は，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1) 点 Q は辺 AC を $1:2$ に内分する点とする。このとき，点 S は辺 BC を

$\boxed{\text{ア}}:\boxed{\text{イ}}$ に内分する点である。

AB＝5 とし，△ABC の内接円が辺 AB, 辺 AC とそれぞれ点 P, 点 Q で接しているとする。AQ＝$\boxed{\text{ウ}}$ であることに注意すると，BC＝$\boxed{\text{エ}}$ であり，$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$ であることがわかる。

$\boxed{\boxed{\text{オ}}}$ の解答群

⓪ 点 R は△ABC の内心
① 点 R は△ABC の重心
② 点 S は△ABC の内接円と辺 BC との接点
③ 点 S は点 A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点

(2) △BPR と△CQR の面積比について考察する。

(i) 点 Q は辺 AC を $1:4$ に内分する点とする。このとき，点 R は，線分 BQ を

$\boxed{\text{カキ}}:\boxed{\text{ク}}$ に内分し，線分 CP を $\boxed{\text{ケコ}}:\boxed{\text{サ}}$ に内分する。したがって，

$$\frac{\triangle\text{CQR}の面積}{\triangle\text{BPR}の面積}=\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$ である。

(ii) $\dfrac{\triangle\text{CQR}の面積}{\triangle\text{BPR}の面積}=\dfrac{1}{4}$ のとき，点 Q は辺 AC を $\boxed{\text{ソ}}:\boxed{\text{タ}}$ に内分する点である。

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　不等式$\sqrt{5}x<k-x<2x+1$……①に対して，$k-x<2x+1$の解は,

$$3x>k-1,\quad x>\frac{k-1}{3}$$

また，$\sqrt{5}x<k-x$の解は，$(\sqrt{5}+1)x<k$より，$x<\dfrac{k}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$

すると，①を満たすxが存在するkの値の範囲は，$\dfrac{k-1}{3}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$から,

$$4k-4<(-3+3\sqrt{5})k,\quad (-7+3\sqrt{5})k>-4$$

よって，$k<\dfrac{-4}{-7+3\sqrt{5}}=7+3\sqrt{5}$……②である。

(2)　②のとき，①の解は$\dfrac{k-1}{3}<x<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$なので，$x$の値の範囲の幅が$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$より大きくなるのは，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k-\dfrac{k-1}{3}>\dfrac{\sqrt{5}}{3}$より,

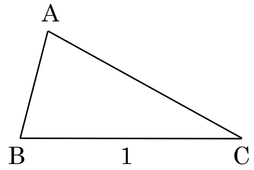
$$(-3+3\sqrt{5})k-(4k-4)>4\sqrt{5},\quad (-7+3\sqrt{5})k>-4(1-\sqrt{5})$$

よって，$k<\dfrac{-4(1-\sqrt{5})}{-7+3\sqrt{5}}=(7+3\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=-8-4\sqrt{5}$

［解　説］

不等式を解く問題です。(2)の計算に(1)のプロセスが利用できます。

[2]　$BC=1$ である$\triangle ABC$ において，



(1)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ のとき，

$$\cos\angle ABC=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\pm\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ のとき，

(i)　正弦定理より，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$ となり $AC\sin\angle ACB=AB\sin\angle ABC$ から，

$$\frac{\sqrt{15}}{8}AC=\frac{\sqrt{15}}{4}AB,\ \ AC=2AB$$

(ii)　ここで，$AB=c$ とおくと，$AC=2c$ となり，余弦定理から，

$$\cos\angle ABC=\frac{c^2+1^2-(2c)^2}{2\cdot c\cdot 1}=\frac{1-3c^2}{2c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1-3c^2}{2c}=\pm\dfrac{1}{4}$ となり，$2-6c^2=\pm c$ から $6c^2\pm c-2=0$

・$6c^2+c-2=0$ のとき　$(2c-1)(3c+2)=0$ から $c=\dfrac{1}{2}$

・$6c^2-c-2=0$ のとき　$(2c+1)(3c-2)=0$ から $c=\dfrac{2}{3}$

さて，$\triangle ABC$ の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot c\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}c$ なので，S が大きい方は，

$$AB=c=\frac{2}{3}$$

(3)　$\sin\angle ABC=2\sin\angle ACB$ のとき，(2)と同様にすると $AC=2AB$ となり，

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+1^2-(2AB)^2}{2\cdot AB\cdot 1}=\frac{1-3AB^2}{2AB}$$

$\triangle ABC$ の面積 S として，$AB^2=x$ とおくと，

$$S^2=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot 1^2\cdot\sin^2\angle ABC=\frac{1}{4}AB^2\left\{1-\left(\frac{1-3AB^2}{2AB}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}x\left\{1-\left(\frac{1-3x}{2\sqrt{x}}\right)^2\right\}=\frac{1}{4}x\cdot\frac{4x-(1-6x+9x^2)}{4x}=\frac{1}{16}(-9x^2+10x-1)$$

$$=-\frac{9}{16}x^2+\frac{5}{8}x-\frac{1}{16}=-\frac{9}{16}\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{81}-\frac{1}{16}$$

S^2 が最大となるのは，$x=\dfrac{5}{9}$ すなわち $AB=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のときである。

そして，S^2 が最大すなわち S が最大となる$\triangle ABC$ に対して，

$$\cos\angle ABC=\frac{1-3\cdot\frac{5}{9}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}<0$$

よって，$\angle ABC$ は鈍角となり，これより$\angle ACB$ は鋭角である。

［解　説］

三角比の標準的な問題です。注目すべきは，設問が進むにつれ，与えられた条件が緩くなっている点です。

第２問

問題のページへ

[1]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……①のグラフが，3 点 $(100,\ 1250)$，$(200,\ 450)$，$(300,\ 50)$ を通るとき，

$$10000a+100b+c=1250,\ 40000a+200b+c=450,\ 90000a+300b+c=50$$

c を消去すると，$-8=300a+b$，$-4=500a+b$ となり，$a=\dfrac{1}{50}$，$b=-14$ である。

さて, 1 皿あたりの価格が x で, 売り上げ数が y のとき, 利益 z は,

$$z=(x-80)y-5000\cdots\cdots\cdots(*)$$

そして, ①のとき, $100 \leqq x \leqq 300$ における z の最大値を M とおく。

ここで, y が x の 2 次式ならば z は x の 3 次式となる。また, z が x の 2 次式となるのは y が x の 1 次式の場合である。

次に，$y=-4x+1160$ ……②の場合, $(*)$から,

$$z=(x-80)(-4x+1160)-5000=-4x^2+1480x-97800$$
$$=-4(x-185)^2+39100$$

これより, z が最大となる x を p とおくと $p=185$ で, 最大値は 39100 である。

また，$y=-8x+1968$ ……③の場合, $(*)$から z は $x=163$ のとき最大となり，最大値は 50112 となる。

すると, 図 3 のグラフの位置関係（$100 \leqq x \leqq 300$ において, ①は③および②の上側）から, 正しいものは, ③「$x=163$ とすれば, 利益は少なくとも 50112 以上となる」, および ④「$x=p$ とすれば, 利益は少なくとも 39100 以上となる」である。

さらに，$y=-6x+1860$ ……④の場合, $(*)$から z は $x=195$ のとき最大となり，最大値は 74350 となる。

すると, 図 4 のグラフの位置関係（$100 \leqq x \leqq 300$ において, ①は③の上側かつ④の下側）から, 正しいものは, ②「利益の最大値 M は 50112 より大きく 74350 より小さい」である。

［解 説］

関数の応用問題ですが, 問題文中に結果が記されているので, 計算はほとんど不要です。

[2]　(1)　各回答が賛成ならば 1, 反対ならば 0 と表して作成される n 人分のデータを x_1, x_2, …, x_n とおくと, $x_1+x_2+\cdots+x_n$ は賛成の人の数, $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ は n 人中における賛成の人の割合と一致する。

(2)　$m=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおくと $\overline{x}=\dfrac{m}{n}$ となり, 分散 s^2 は,

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{m\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+(n-m)\left(0-\frac{m}{n}\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\left(m-\frac{2m^2}{n}+\frac{m^3}{n^2}+\frac{m^2}{n}-\frac{m^3}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(m-\frac{m^2}{n}\right)=\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)=\frac{m(n-m)}{n^2}$$

［解　説］

分散の計算についての基本題です。

[3]　変量 x, y の値の組 $(-1,\ -1)$，$(-1,\ 1)$，$(1,\ -1)$，$(1,\ 1)$ をデータ W とし, a を実数とするとき, データ W に $(5a,\ 5a)$ を加えたデータを W' とする。

データ W' について, 右表の x の列の和, y の列の和が, それぞれ $5a$ ずつより,

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	-1	$-1-a$	$-1-a$	$1+2a+a^2$
-1	1	$-1-a$	$1-a$	$-1+a^2$
1	-1	$1-a$	$-1-a$	$-1+a^2$
1	1	$1-a$	$1-a$	$1-2a+a^2$
$5a$	$5a$	$4a$	$4a$	$16a^2$

$$\overline{x}=\frac{5a}{5}=a\,,\ \overline{y}=\frac{5a}{5}=a$$

また，$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$ の列の和が $20a^2$ より，共分散 s_{xy} は,

$$s_{xy}=\frac{20a^2}{5}=4a^2$$

さらに, x と y の標準偏差を, それぞれ s_x，s_y とすると,

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{5}\{(-1-a)^2+(-1-a)^2+(1-a)^2+(1-a)^2+(4a)^2\}}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{5}}$$

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{5}\{(-1-a)^2+(1-a)^2+(-1-a)^2+(1-a)^2+(4a)^2\}}=\sqrt{4a^2+\frac{4}{5}}$$

これより，$s_xs_y=4a^2+\dfrac{4}{5}$ となる。

すると, 相関係数が 0.95 以上, すなわち $s_{xy}\geqq 0.95s_xs_y$ のとき,

$$4a^2\geqq\frac{19}{20}\left(4a^2+\frac{4}{5}\right),\ 4a^2\geqq\frac{19}{5}a^2+\frac{19}{25},\ a^2\geqq\frac{19}{5}$$

よって，$a\leqq-\sqrt{\dfrac{19}{5}}$, $\sqrt{\dfrac{19}{5}}\leqq a$，すなわち $a\leqq-\dfrac{\sqrt{95}}{5}$, $\dfrac{\sqrt{95}}{5}\leqq a$ である。

［解 説］

相関係数についての基本題です。問題文中に計算のための表が書かれています。

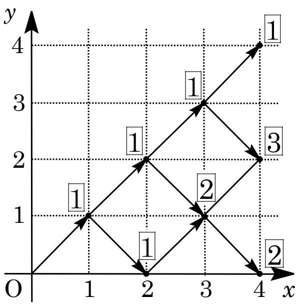
第３問

問題のページへ

(1) (i)　硬貨を 3 回投げたとき，点 P の移動の仕方が $y_1 \geqq -1$ かつ $y_2 \geqq -1$ かつ $y_3 \geqq -1$ を満たすとき，図 2 より，点$(3,\ 3)$に至るのは 1 通り，点$(3,\ 1)$に至るのは$1+2=3$通り，点$(3,\ -1)$に至るのは 2 通りある。すると，この場合の確率は，

$$\frac{1+3+2}{2^3}=\frac{3}{4}$$

(ii) 硬貨を 4 回投げたとき，右図より，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は $\frac{1+3+2}{2^4}=\frac{3}{8}$ であり，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3=1$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は $\frac{2+2}{2^4}=\frac{1}{4}$ である。これより，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ であったとき，$y_3=1$ である条件付き確率は，$\frac{1}{4}\div\frac{3}{8}=\frac{2}{3}$ となる。

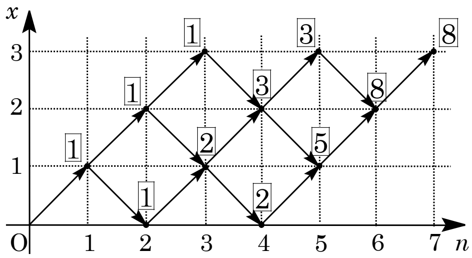


(iii) 硬貨を 4 回投げたとき，点 P の座標が$(4,\ 2)$であるのは，表が a 回，裏が b 回出たとすると，$a+b=4$ かつ $a-b=2$ より，$a=3$，$b=1$ である。

(2) (i)　さいころを 7 回投げたとき，点 Q の座標が 3 であるのは，3 の倍数の目が c 回，それ以外の目が d 回出たとすると，$c+d=7$ かつ $c-d=3$ より，$c=5$，$d=2$ である。その確率は，${}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=21\cdot\frac{4}{3^7}=\frac{28}{729}$ となる。

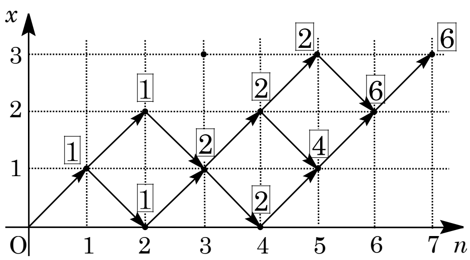
(ii)　さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であるのは，さいころを投げる回数を n，点 Q の座標を x として図示すると，右図のようになる。

その確率は $8\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{32}{2187}$ である。



(iii) さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であり，しかも 3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 であるのを図示すると，右図のようになる。

その確率は $6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{2187}$ である。



よって，求める条件付き確率は，$\frac{24}{2187}\div\frac{32}{2187}=\frac{3}{4}$ となる。

［解 説］

ランダムウォークを題材にした 2 次試験での頻出題です。(1)の(iii)の設問が(1)と(2)を結ぶ懸け橋になっています。ただ，参考図が利用できるものの，量的にはかなり多めです。

第４問

問題のページへ

(1)　$7x+13y+17z=8$ ……①，$35x+39y+34z=37$ ……②に対し，①×5－②から，

$$26y+51z=3 \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$26\times2+51\times(-1)=1$ より $26\times6+51\times(-3)=3$ となり，③を満たす整数解のうち y が最小の正の整数なのは，$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ では成立しないことより，$y=6$，$z=-3$ である。そして，③から，

$$26(y-6)+51(z+3)=0\ ,\ 26(y-6)=-51(z+3)$$

26 と 51 は互いに素なので，k を整数として，$y-6=-51k$，$z+3=26k$ となり，

$$y=6-51k\ ,\ z=-3+26k$$

①に代入すると，$7x+13(6-51k)+17(-3+26k)=8$ となり，

$$7x-221k=-19\ ,\ x=\frac{221k-19}{7}=\frac{7(31k-3)+4k+2}{7}=31k-3+\frac{4k+2}{7}$$

これより，x が整数になるのは，k を 7 で割ったときの余りが 3 のときである。

(2)　$2x+5y+7z=a$ ……④，$3x+25y+21z=-1$ ……⑤に対し，⑤－④から，

$$x=-20y-14z-1-a \cdots\cdots\cdots ⑥$$

また，⑤×2－④×3 から，$35y+21z=-2-3a$ ………⑦

⑦から，$7(5y+3z)=-2-3a$，$5y+3z=-\dfrac{2+3a}{7}$ ………⑦′

すると，⑦′を満たす整数 $y,\ z$ が存在するには $\dfrac{2+3a}{7}$ が整数，すなわち a を 7 で割ったときの余りが 4 であることが必要となる。そして，このとき 5 と 3 は互いに素から，⑦′すなわち⑦を満たす整数 $y,\ z$ はつねに存在する。

さらに，そのときの整数 $y,\ z$ を⑥に代入すると，x も整数になる。

(3)　$x+2y+bz=1$ ……⑧，$5x+6y+3z=5+b$ ……⑨に対し，⑨－⑧×5 から，

$$-4y+(3-5b)z=b \cdots\cdots\cdots ⑩$$

ここで，4 と $3-5b$ が互いに素，すなわち b を 4 で割ったときの余りが 0 または 2 のときは，⑩を満たす整数 $y,\ z$ はつねに存在する。また，b を 4 で割ったときの余りが 1 または 3 のときは，⑩は左辺が偶数で右辺が奇数となるので成立しない。

これより，⑩を満たす整数 $y,\ z$ が存在するには条件は，b を 4 で割ったときの余りが 0 または 2 である。

そして，そのときの整数 $y,\ z$ を⑧に代入すると，x も整数になる。

(4)　$x+3y+5z=1$ ……⑪，$cx+3(c+5)y+10z=3$ ……⑫に対し，⑪×c－⑫から，

$$-15y+(5c-10)z=c-3 \cdots\cdots\cdots ⑬$$

⑬から，$5\{-3y+(c-2)z\}=c-3$，$-3y+(c-2)z=\dfrac{c-3}{5}$ ………⑬′

すると，⑬′を満たす整数 y, z が存在するには $\dfrac{c-3}{5}$ が整数，すなわち c を 5 で割ったときの余りが 3 であることが必要となる。すると，l を整数として，$c=5l+3$ と表すことができるので，このとき $c-2=5l+1$ から，⑬′は，

$-3y+(5l+1)z=l$ ………⑭

ここで，3 と $5l+1$ が互いに素，すなわち l を 3 で割った余りが 0 または 2 のときは，⑭を満たす整数 y, z はつねに存在する。また，l を 3 で割った余りが 1 のときは，⑭は左辺が 3 の倍数で右辺が 3 の倍数でないので成立しない。

これより，⑭を満たす整数 y, z が存在する条件は，l を 3 で割った余りが 0 または 2 である。すると，m を整数として，$l=3m$ または $l=3m+2$ と表せる。

以上より，$c=5\cdot 3m+3=15m+3$ または $c=5(3m+2)+3=15m+13$ となり，c を 15 で割ったときの余りは 3 または 13 である。そして，このとき⑬′すなわち⑬を満たす整数 y, z はつねに存在する。

さらに，そのときの整数 y, z を⑪に代入すると，x も整数になる。

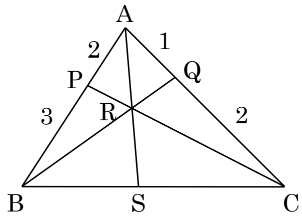
［解　説］

難度の高い不定方程式の問題です。ポイントは「a, b, c が整数で a と b が互いに素ならば，任意の c に対して $ax+by=c$ を満たす整数解 x, y が存在すること」です。なお，上記の解答例は，ボリュームの関係から省略ぎみの記述になっています。

第５問

問題のページへ

(1) $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:3$，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=1:2$ のとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ にチェバの定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1,\ \ \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{2}{1}=1,\ \ \frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}=\frac{3}{4}$$

これより，点 S は辺 BC を $3:4$ に内分する。

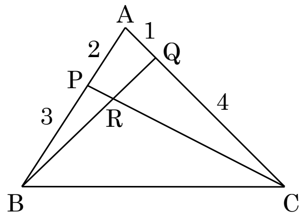
さて，$\mathrm{AB}=5$ のとき，$\mathrm{AP}=2$，$\mathrm{PB}=3$ である。

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円が辺 AB, 辺 AC とそれぞれ点 P, 点 Q で接しているとき，$\mathrm{AQ}=\mathrm{AP}=2$ となり，$\mathrm{QC}=2\mathrm{AQ}=4$ なので，

$$\mathrm{BC}=\mathrm{PB}+\mathrm{QC}=3+4=7$$

一方，$\mathrm{BS}:\mathrm{SC}=3:4$ なので，$\mathrm{BS}=3$，$\mathrm{SC}=4$ となり，$\mathrm{BS}=\mathrm{PB}$，$\mathrm{SC}=\mathrm{QC}$ であるので,「点 S は△ABC の内接円と辺 BC との接点」である。

(2) (i) $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:3$，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=1:4$ のとき，$\triangle\mathrm{ABQ}$ と直線 CP にメネラウスの定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{CA}}=1,\ \ \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\frac{4}{5}=1,\ \ \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}=\frac{15}{8}$$

これより，点 R は線分 BQ を $15:8$ に内分する。

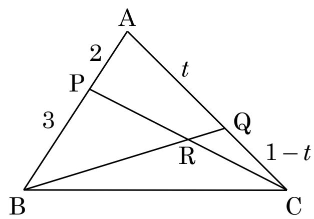
また，$\triangle\mathrm{APC}$ と直線 BQ にメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1,\ \ \frac{5}{3}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}\cdot\frac{4}{1}=1,\ \ \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}=\frac{3}{20}$$

これより，点 R は線分 CP を $20:3$ に内分する。

よって，$\dfrac{\triangle\mathrm{CQR}\text{の面積}}{\triangle\mathrm{BPR}\text{の面積}}=\dfrac{8\times20}{15\times3}=\dfrac{32}{9}$ である。

(ii) $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=2:3$，$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=t:1-t$ とおくと，(i)と同様にして，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}\cdot\dfrac{1-t}{1}=1$ より，$\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RQ}}=\dfrac{3}{2(1-t)}$



また，$\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{1-t}{t}=1$ より，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}=\dfrac{3t}{5(1-t)}$

$\dfrac{\triangle\mathrm{CQR}\text{の面積}}{\triangle\mathrm{BPR}\text{の面積}}=\dfrac{1}{4}$ から，$\dfrac{2(1-t)\cdot5(1-t)}{3\cdot3t}=\dfrac{1}{4}$

$$9t=40(1-2t+t^2),\ \ 40t^2-89t+40=0,\ \ (8t-5)(5t-8)=0$$

すると，$0<t<1$ から $t=\dfrac{5}{8}$ となり，点 Q は辺 AC を $5:3$ に内分する点である。

［解 説］

三角形にチェバの定理やメネラウスの定理を適用する基本題です。