第１問

解答解説のページへ

[1] 実数 x についての不等式 $|x+6| \leqq 2$ の解は，$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$ である。

よって，実数 a，b，c，d が，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

特に，$(a-b)(c-d) = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$ ……①であるとき，さらに，$(a-c)(b-d) = -3+\sqrt{3}$ ……②が成り立つならば

$$(a-d)(c-b) = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \text{ ………③}$$

であることが，等式①，②，③の左辺を展開して比較することによりわかる。

[2] (1) 点 O を中心とし，半径が 5 である円 O がある。この円周上に 2 点 A，B を AB $=6$ となるようにとる。また，円 O の円周上に，2 点 A，B とは異なる点 C をとる。

(i) $\sin\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{サ}}$ である。また，点 C を $\angle\mathrm{ACB}$ が鈍角となるようにとるとき，$\cos\angle\mathrm{ACB} = \boxed{\text{シ}}$ である。

(ii) 点 C を△ABC の面積が最大となるようにとる。点 C から直線 AB に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を D とするとき，$\tan\angle\mathrm{OAD} = \boxed{\text{ス}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{\text{セソ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(2) 半径が 5 である球 S がある。この球面上に 3 点 P，Q，R をとったとき，これらの 3 点を通る平面 α 上で PQ $=8$，QR $=5$，RP $=9$ であったとする。

球 S の球面上に点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。

まず，$\cos\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であることから，△PQR の面積は $\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テト}}}$ である。

次に，点 T から平面 α に垂直な直線を引き，平面 α との交点を H とする。このとき，PH，QH，RH の長さについて，$\boxed{\text{ナ}}$ が成り立つ。

以上より，三角錐 TPQR の体積は $\boxed{\text{ニヌ}}\left(\sqrt{\boxed{\text{ネノ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}\right)$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

⓪ PH $<$ QH $<$ RH	① PH $<$ RH $<$ QH
② QH $<$ PH $<$ RH	③ QH $<$ RH $<$ PH
④ RH $<$ PH $<$ QH	⑤ RH $<$ QH $<$ PH
⑥ PH $=$ QH $=$ RH	

第２問

解答解説のページへ

[1] 太郎さんは，総務省が公表している 2020 年の家計調査の結果を用いて，地域による食文化の違いについて考えている。家計調査における調査地点は，都道府県庁所在市および政令指定都市 (都道府県庁所在市を除く) であり，合計 52 市である。家計調査の結果の中でも，スーパーマーケットなどで販売されている調理食品の「二人以上の世帯の 1 世帯当たり年間支出金額 (以下，支出金額，単位は円)」を分析することにした。以下においては，52 市の調理食品の支出金額をデータとして用いる。

太郎さんは調理食品として，最初にうなぎのかば焼き (以下，かば焼き) に着目し，図 1 のように 52 市におけるかば焼きの支出金額のヒストグラムを作成した。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

なお，以下の図や表については，総務省の Web ページをもとに作成している。

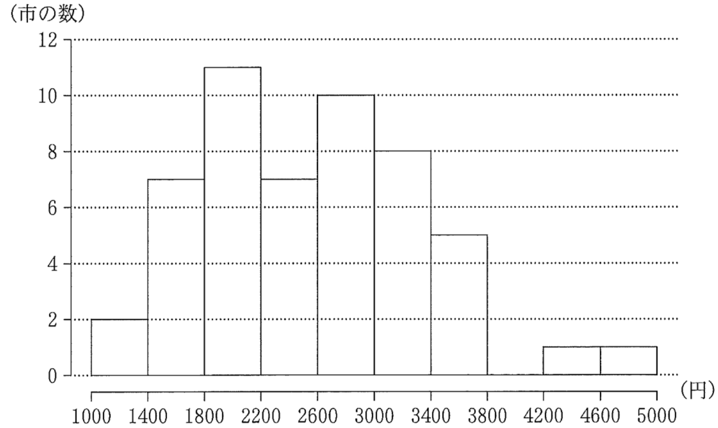


図 1　かば焼きの支出金額のヒストグラム

(1) 図 1 から次のことが読み取れる。

・第 1 四分位数が含まれる階級は $\boxed{\text{ア}}$ である。

・第 3 四分位数が含まれる階級は $\boxed{\text{イ}}$ である。

・四分位範囲は $\boxed{\text{ウ}}$。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 1000 以上 1400 未満	① 1400 以上 1800 未満
② 1800 以上 2200 未満	③ 2200 以上 2600 未満
④ 2600 以上 3000 未満	⑤ 3000 以上 3400 未満
⑥ 3400 以上 3800 未満	⑦ 3800 以上 4200 未満
⑧ 4200 以上 4600 未満	⑨ 4600 以上 5000 未満

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪	800 より小さい
①	800 より大きく 1600 より小さい
②	1600 より大きく 2400 より小さい
③	2400 より大きく 3200 より小さい
④	3200 より大きく 4000 より小さい
⑤	4000 より大きい

(2) 太郎さんは，東西での地域による食文化の違いを調べるために，52 市を東側の地域 E(19 市)と西側の地域 W(33 市)の 2 つに分けて考えることにした。

(i) 地域 E と地域 W について，かば焼きの支出金額の箱ひげ図を，図 2，図 3 のようにそれぞれ作成した。

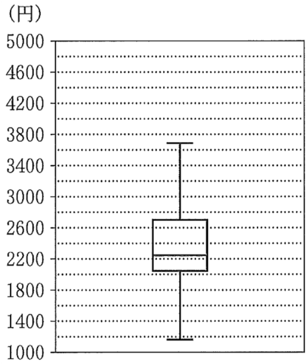


図 2 地域 E におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

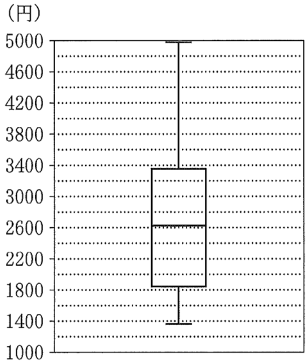


図 3 地域 W におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

かば焼きの支出金額について，図 2 と図 3 から読み取れることとして，次の ⓪〜③のうち，正しいものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪	地域 E において，小さい方から 5 番目は 2000 以下である。
①	地域 E と地域 W の範囲は等しい。
②	中央値は，地域 E より地域 W の方が大きい。
③	2600 未満の市の割合は，地域 E より地域 W の方が大きい。

(ii) 太郎さんは，地域 E と地域 W のデータの散らばりの度合いを数値でとらえようと思い，それぞれの分散を考えることにした。地域 E におけるかば焼きの支出金額の分散は，地域 E のそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 2 乗を合計した値

① 絶対値を合計した値

② 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値

③ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値

④ 2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち正のもの

⑤ 絶対値を合計して地域 E の市の数で割った値の平方根のうち正のもの

(3) 太郎さんは，(2)で考えた地域 E における，やきとりの支出金額についても調べることにした。

ここでは地域 E において，やきとりの支出金額が増加すれば，かば焼きの支出金額も増加する傾向があるのではないかと考え，まず図 4 のように，地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図を作成した。そして，相関係数を計算するために，表 1 のように平均値，分散，標準偏差および共分散を算出した。ただし，共分散は地域 E のそれぞれの市における，やきとりの支出金額の偏差とかば焼きの支出金額の偏差との積の平均値である。

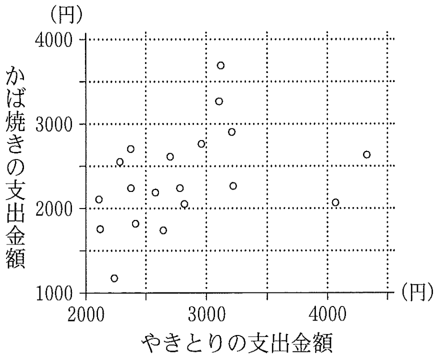


図 4 地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図

表 1 地域 E における，やきとりとかば焼きの支出金額の平均値，分散，標準偏差および共分散

	平均値	分 散	標準偏差	共分散
やきとりの支出金額	2810	348100	590	124000
かば焼きの支出金額	2350	324900	570	

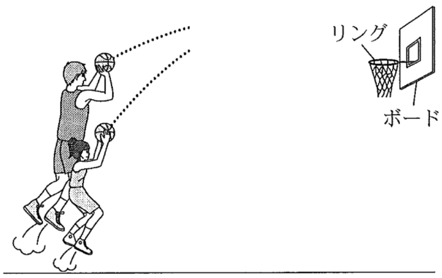
表 1 を用いると，地域 E における，やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑨ のうちから１つ選べ。

⓪ -0.62	① -0.50	② -0.37	③ -0.19
④ -0.02	⑤ 0.02	⑥ 0.19	⑦ 0.37
⑧ 0.50	⑨ 0.62		

〔2〕 太郎さんと花子さんは，バスケットボールのプロ選手の中には，リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り，シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

二人は，図 1 のように座標軸が定められた平面上に，プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき，ボールがリングに入った場合について，後の**仮定**を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。



参考図

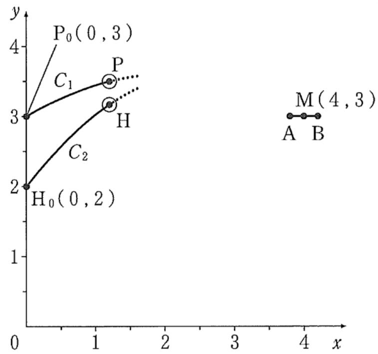


図 1

仮定

- 平面上では，ボールを直径 0.2 の円とする。
- リングを真横から見たときの左端を点 A(3.8, 3)，右端を点 B(4.2, 3) とし，リングの太さは無視する。
- ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り，かつ，ボールの中心が AB の中点 M(4, 3) を通る場合を考える。ただし，ボールがリングに当たるとは，ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
- プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし，P は，はじめに点 $\mathrm{P}_0(0,\ 3)$ にあるものとする。また，P_0，M を通る，上に凸の放物線を C_1 とし，P は C_1 上を動くものとする。
- 花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし，H は，はじめに点 $\mathrm{H}_0(0,\ 2)$ にあるものとする。また，H_0，M を通る，上に凸の放物線を C_2 とし，H は C_2 上を動くものとする。
- 放物線 C_1 や C_2 に対して，頂点の y 座標を「**シュートの高さ**」とし，頂点の x 座標を「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」とする。

(1) 放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a とする。放物線 C_1 の方程式は，$y=ax^2-\boxed{\text{キ}}\,ax+\boxed{\text{ク}}$ と表すことができる。また，プロ選手の「**シュートの高さ**」は，$-\boxed{\text{ケ}}\,a+\boxed{\text{コ}}$ である。

放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式は

$$y=p\left\{x-\left(2-\frac{1}{8p}\right)\right\}^2-\frac{(16p-1)^2}{64p}+2$$

と表すことができる。

プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の比較の記述として，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{サ}}$ である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」は，つねに一致する。
① プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。
② 花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。
③ プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもあれば，花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもある。

(2) 二人は，ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」について次のように話している。

太郎：例えば，プロ選手のボールがリングに当たらないようにするには，P がリングの左端 A のどのくらい上を通れば良いのかな。

花子：A の真上の点で P が通る点 D を，線分 DM が A を中心とする半径 0.1 の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。

太郎：なるほど。P の軌道は上に凸の放物線で山なりだから，その場合，図 2 のように，P は D を通った後で線分 DM より上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も，H がこの D を通れば，ボールはリングに当たらないね。

花子：放物線 C_1 と C_2 が D を通る場合でプロ選手と私の「**シュートの高さ**」を比べてみようよ。

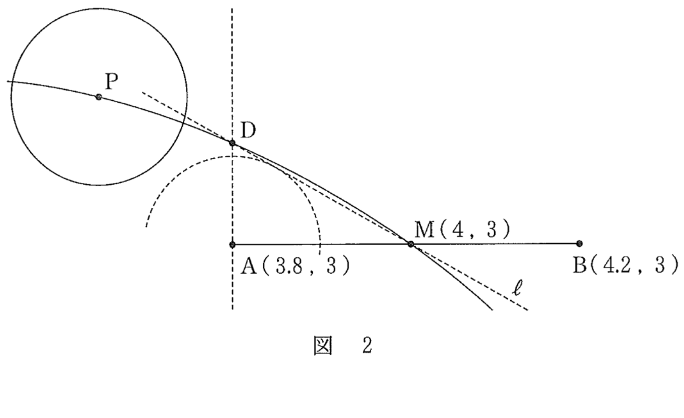


図 2

図 2 のように, M を通る直線 l が, A を中心とする半径 0.1 の円に直線 AB の上側で接しているとする。また, A を通り直線 AB に垂直な直線を引き, l との交点を D とする。このとき, $\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ である。

よって, 放物線 C_1 が D を通るとき, C_1 の方程式は

$$y=-\frac{\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セソ}}}\left(x^2-\boxed{\text{キ}}\,x\right)+\boxed{\text{ク}}$$

となる。

また, 放物線 C_2 が D を通るとき, (1)で与えられた C_2 の方程式を用いると, 花子さんの「**シュートの高さ**」は約 3.4 と求められる。

以上のことから, 放物線 C_1 と C_2 が D を通るとき, プロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」を比べると, $\boxed{\text{タ}}$ の「**シュートの高さ**」の方が大きく, その差はボール $\boxed{\text{チ}}$ である。なお, $\sqrt{3}=1.732058\cdots$ である。

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ プロ選手	① 花子さん

$\boxed{\text{チ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 約 1 個分	① 約 2 個分	② 約 3 個分	③ 約 41 個分

第３問

解答解説のページへ

番号によって区別された複数の球が，何本かのひもでつながれている。ただし，各ひもはその両端で 2 つの球をつなぐものとする。次の**条件**を満たす球の塗り分け方 (以下，球の塗り方) を考える。

条件

・それぞれの球を，用意した 5 色 (赤，青，黄，緑，紫) のうちのいずれか 1 色で塗る。

・1 本のひもでつながれた 2 つの球は異なる色になるようにする。

・同じ色を何回使ってもよく，また使わない色があってもよい。

例えば図 A では，3 つの球が 2 本のひもでつながれている。この 3 つの球を塗るとき，球 1 の塗り方が 5 通りあり，球 1 を塗った後，球 2 の塗り方は 4 通りあり，さらに球 3 の塗り方は 4 通りある。したがって，球の塗り方の総数は 80 である。

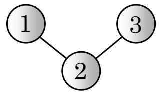


図 A

(1)　図 B において，球の塗り方は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。

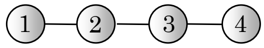


図 B

(2)　図 C において，球の塗り方は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りある。

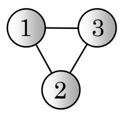


図 C

(3)　図 D における球の塗り方のうち，赤をちょうど 2 回使う塗り方は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りある。

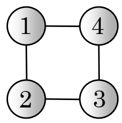


図 D

(4)　図 E における球の塗り方のうち，赤をちょうど 3 回使い，かつ青をちょうど 2 回使う塗り方は $\boxed{\text{クケ}}$ 通りある。

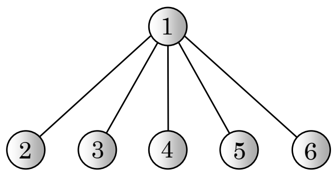
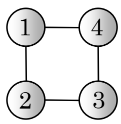


図 E

(5)　図 D において，球の塗り方の総数を求める。



図D(再掲)

そのために，次の**構想**を立てる。

構想

図 D と図 F を比較する。

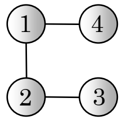


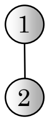
図　F

図 F では球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方が可能であるため，図 D よりも図 F の球の塗り方の総数の方が大きい。

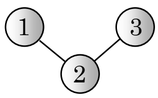
図 F における球の塗り方は，図 B における球の塗り方と同じであるため，全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りある。そのうち球 3 と球 4 が同色になる球の塗り方の総数と一致する図として，後の ⓪～④ のうち，正しいものは $\boxed{\text{コ}}$ である。したがって，図 D における球の塗り方は $\boxed{\text{サシス}}$ 通りある。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

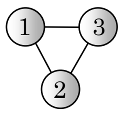
⓪



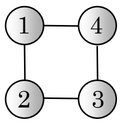
①



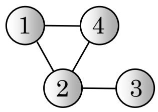
②



③



④



(6)　図 G において，球の塗り方は $\boxed{\text{セソタチ}}$ 通りある。

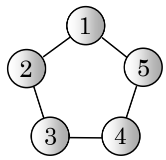


図　G

第４問

解答解説のページへ

色のついた長方形を並べて正方形や長方形を作ることを考える。色のついた長方形は，向きを変えずにすき間なく並べることとし，色のついた長方形は十分あるものとする。

(1) 横の長さが 462 で縦の長さが 110 である赤い長方形を，図 1 のように並べて正方形や長方形を作ることを考える。

462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは $\boxed{\text{アイ}}$ である。

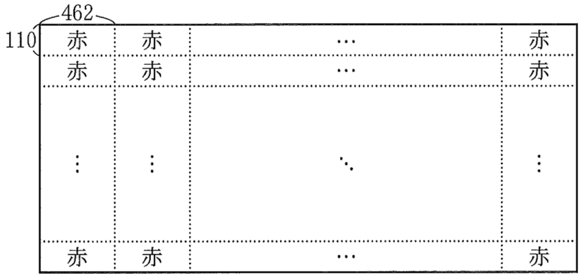


図 1

赤い長方形を並べて作ることができる正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが $\boxed{\text{ウエオカ}}$ のものである。

また，赤い長方形を並べて正方形ではない長方形を作るとき，横の長さと縦の長さの差の絶対値が最小になるのは，462 の約数と 110 の約数を考えると，差の絶対値が $\boxed{\text{キク}}$ になるときであることがわかる。

縦の長さが横の長さより $\boxed{\text{キク}}$ 長い長方形のうち，横の長さが最小であるものは，横の長さが $\boxed{\text{ケコサシ}}$ のものである。

(2) 花子さんと太郎さんは，(1)で用いた赤い長方形を 1 枚以上並べて長方形を作り，その右側の横の長さが 363 で縦の長さが 154 である青い長方形を 1 枚以上並べて，図 2 のような正方形や長方形を作ることを考えている。

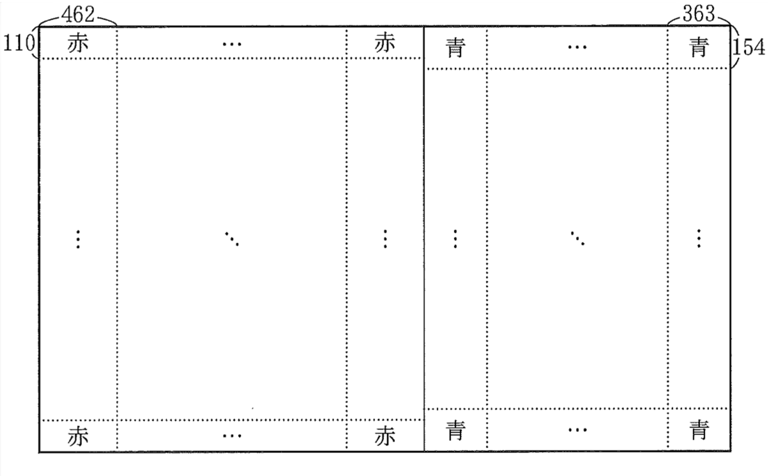


図 2

このとき，赤い長方形を並べてできる長方形の縦の長さと，青い長方形を並べてできる長方形の縦の長さは等しい。よって，図 2 のような長方形のうち，縦の長さが最小のものは，縦の長さが $\boxed{\text{スセソ}}$ のものであり，図 2 のような長方形は縦の長さが $\boxed{\text{スセソ}}$ の倍数である。

二人は，次のように話している。

花子：赤い長方形と青い長方形を図 2 のように並べて正方形を作ってみようよ。

太郎：赤い長方形の横の長さが 462 で青い長方形の横の長さが 363 だから，図 2 のような正方形の横の長さは 462 と 363 を組み合わせて作ることができる長さでないといけないね。

花子：正方形だから，横の長さは $\boxed{\text{スセソ}}$ の倍数でもないといけないね。

462 と 363 の最大公約数は $\boxed{\text{タチ}}$ であり，$\boxed{\text{タチ}}$ の倍数のうちで $\boxed{\text{スセソ}}$ の倍数でもある最小の正の整数は $\boxed{\text{ツテトナ}}$ である。

これらのことと，使う長方形の枚数が赤い長方形も青い長方形も 1 枚以上であることから，図 2 のような正方形のうち，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが $\boxed{\text{ニヌネノ}}$ のものであることがわかる。

第５問

解答解説のページへ

(1) 円 O に対して，次の**手順１**で作図を行う。

手順１

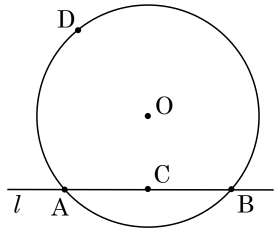
(Step1) 円 O と異なる 2 点で交わり，中心 O を通らない直線 l を引く。円 O と直線 l との交点を A, B とし，線分 AB の中点 C をとる。

(Step2) 円 O の周上に，点 D を∠COD が鈍角となるようにとる。直線 CD を引き，円 O との交点で D とは異なる点を E とする。

(Step3) 点 D を通り直線 OC に垂直な直線を引き，直線 OC との交点を F とし，円 O との交点で D とは異なる点を G とする。

(Step4) 点 G における円 O の接線を引き，直線 l との交点を H とする。

このとき直線 l と点 D の位置によらず，直線 EH は円 O の接線である。このことは，次の**構想**に基づいて，後のように説明できる。



参考図

構想

直線 EH が円 O の接線であることを証明するためには，∠OEH＝ $\boxed{\text{アイ}}$ °であることを示せばよい。

手順１の(Step1)と(Step4)により，4 点 C, G, H, $\boxed{\text{ウ}}$ は同一円周上にあることがわかる。よって，∠CHG＝ $\boxed{\text{エ}}$ である。一方，点 E は円 O の周上にあることから，$\boxed{\text{エ}}$ ＝ $\boxed{\text{オ}}$ がわかる。よって，∠CHG＝ $\boxed{\text{オ}}$ であるので，4 点 C, G, H, $\boxed{\text{カ}}$ は同一円周上にある。この円が点 $\boxed{\text{ウ}}$ を通ることにより，
∠OEH＝ $\boxed{\text{アイ}}$ °を示すことができる。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ B	① D	② F	③ O

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ ∠AFC	① ∠CDF	② ∠CGH	③ ∠CBO	④ ∠FOG

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ ∠AED	① ∠ADE	② ∠BOE	③ ∠DEG	④ ∠EOH

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ A	① D	② E	③ F

(2) 円 O に対して，(1)の**手順１**とは直線 l の引き方を変え，次の**手順２**で作図を行う。

手順２

(Step1) 円 O と共有点をもたない直線 l を引く。中心 O から直線 l に垂直な直線を引き，直線 l との交点を P とする。

(Step2) 円 O の周上に，点 Q を∠POQ が鈍角となるようにとる。直線 PQ を引き，円 O との交点で Q とは異なる点を R とする。

(Step3) 点 Q を通り直線 OP に垂直な直線を引き，円 O との交点で Q とは異なる点を S とする。

(Step4) 点 S における円 O の接線を引き，直線 l との交点を T とする。

このとき，∠PTS＝$\boxed{\text{キ}}$である。

円 O の半径が $\sqrt{5}$ で，$\text{OT}=3\sqrt{6}$ であったとすると，3 点 O，P，R を通る円の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ であり，$\text{RT}=\boxed{\text{サ}}$である。

$\boxed{\text{キ}}$の解答群

⓪ ∠PQS	① ∠PST	② ∠QPS	③ ∠QRS	④ ∠SRT

第１問

問題のページへ

[1]　$|x+6| \leqq 2$ の解は，$-2 \leqq x+6 \leqq 2$ より，$-8 \leqq x \leqq -4$ ………$(*)$

ここで，$\left|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6\right| \leqq 2$ のとき，$(*)$から，

$$-8 \leqq (1-\sqrt{3})(a-b)(c-d) \leqq -4$$

$1-\sqrt{3}<0$ なので，$-\dfrac{4}{1-\sqrt{3}} \leqq (a-b)(c-d) \leqq -\dfrac{8}{1-\sqrt{3}}$ となり，

$$\frac{4}{2}(1+\sqrt{3}) \leqq (a-b)(c-d) \leqq \frac{8}{2}(1+\sqrt{3})$$

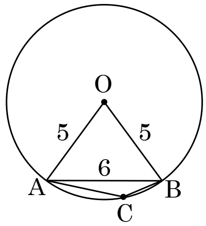
$$2+2\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq 4+4\sqrt{3}$$

さて，$(a-b)(c-d)=4+4\sqrt{3}$ ……①，$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3}$ ……②のとき，

①より $ac-ad-bc+bd=4+4\sqrt{3}$，②より $ab-ad-bc+cd=-3+\sqrt{3}$ となり，

$$(a-d)(c-b)=ac-ab-cd+bd=(4+4\sqrt{3})-(-3+3\sqrt{3})=7+3\sqrt{3}$$

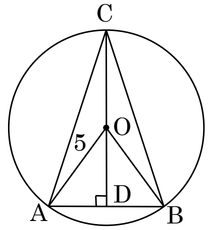
[2]　(1)　(i)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=5$，$\mathrm{AB}=6$ である△ABC に正弦定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}=2\cdot5,\quad \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$$

$\angle\mathrm{ACB}>\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\angle\mathrm{ACB}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

(ii)　点 C を△ABC の面積が最大となるようにとるとき，点 C から直線 AB への垂直な直線と直線 AB との交点 D は，線分 AB の中点である。

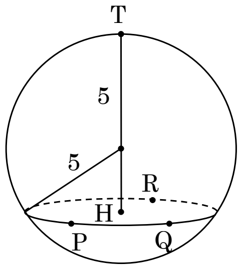


すると，$\mathrm{AD}=\dfrac{6}{2}=3$ から，$\mathrm{OD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ となり，

$$\tan\angle\mathrm{OAD}=\frac{4}{3}$$

このとき，△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot(5+4)=27$ である。

(2)　半径が 5 である球 S 上に 3 点 P, Q, R をとり，これらの 3 点を通る平面 α 上で，$\mathrm{PQ}=8$，$\mathrm{QR}=5$，$\mathrm{RP}=9$ である。

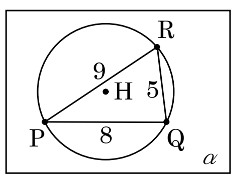


このとき，△PQR に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{QPR}=\frac{9^2+8^2-5^2}{2\cdot9\cdot8}=\frac{5}{6}$$

△PQR の面積は，$\dfrac{1}{2}\cdot9\cdot8\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=36\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{6}=6\sqrt{11}$

ここで，球 S 上の点 T を三角錐 TPQR の体積が最大となるようにとるとき，点 T から平面 α への垂直な直線と平面 α との交点 H は，△PQR の外心となり，



$$\mathrm{PH}=\mathrm{QH}=\mathrm{RH}$$

そして，$\sin\angle\mathrm{QPR}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{6}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{QR}}{\sin\angle\mathrm{QPR}}=2\mathrm{PH}，\ \mathrm{PH}=\frac{5}{2\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}}=\frac{15}{\sqrt{11}}$$

したがって，三角錐 TPQR の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot6\sqrt{11}\cdot\left\{5+\sqrt{5^2-\left(\frac{15}{\sqrt{11}}\right)^2}\right\}=2\sqrt{11}\left(5+5\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=10(\sqrt{11}+\sqrt{2})$$

［解 説］

[1]は，不等式と式計算についての基本題です。[2]は，(1)(2)とも，図形の計量についての頻出タイプの問題です。

第２問

問題のページへ

[1] (1) 52 市の支出金額について，中央値は小さい方から 26 番目と 27 番目の平均値となるので，第 1 四分位数は小さい方から 13 番目と 14 番目の平均値，第 3 四分位数は大きい方から 13 番目と 14 番目の平均値である。

これより，第 1 四分位数が含まれる階級は 1800 以上 2200 未満，第 3 四分位数が含まれる階級は 3000 以上 3400 未満である。四分位範囲は $3000-2200=800$ より大きく，$3400-1800=1600$ より小さい。

(2) (i) 地域 E(19 市) の第 1 四分位数は小さい方から 5 番目の値なので，0は誤り。

範囲は，地域 E より地域 W の方が大きいので，1は誤り。

中央値は，地域 E より地域 W の方が大きいので，2は正しい。

地域 E の中央値は 2600 より小で，地域 W の中央値は 2600 以上なので，2600 未満の市の割合は，地域 W より地域 E の方が大きい。これより 3は誤り。

(ii) 地域 E における支出金額の分散は，地域 E のそれぞれの市における支出金額の偏差の 2「2 乗を合計して地域 E の市の数で割った値」である。

(3) やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は，

$$\frac{124000}{590\times 570}=\frac{1240}{59\times 57}\fallingdotseq 0.37$$

[2] (1) プロ選手の放物線 C_1 の方程式を $y=ax^2+bx+c$ とおくと，2 点 $\mathrm{P_0}(0,\ 3)$，$\mathrm{M}(4,\ 3)$ を通ることより，$c=3$，$16a+4b+c=3$ となり，$b=-4a$ から，

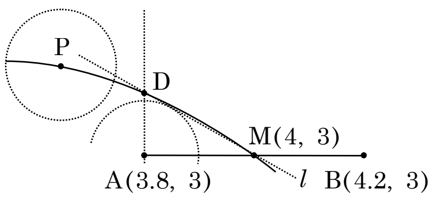
$$y=ax^2-4ax+3=a(x-2)^2-4a+3 \cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は $x=2$，「シュートの高さ」は $-4a+3$ である。

また，花子の放物線 C_2 の方程式から，「ボールが最も高くなるときの地上の位置」は $x=2-\dfrac{1}{8p}$，「シュートの高さ」は $-\dfrac{(16p-1)^2}{64p}+2$ である。

すると，$p<0$ なので $2-\dfrac{1}{8p}>2$ となり，2「花子さんの方が，つねに M の x 座標に近い」が正しい。

(2) M を通る直線 l が，A を中心とする半径 0.1 の円に接している。A を通り直線 AB に垂直な直線と l との交点を D とすると，$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$ となるので，$\mathrm{D}\left(\dfrac{19}{5},\ 3+\dfrac{\sqrt{3}}{15}\right)$ である。



さて，(*)を $y=ax(x-4)+3$ と変形して，放物線 C_1 が D を通るとき，

$$3+\frac{\sqrt{3}}{15}=\frac{19}{5}a\left(\frac{19}{5}-4\right)+3,\quad -\frac{19}{25}a=\frac{\sqrt{3}}{15}$$

すると，$a=-\frac{5\sqrt{3}}{57}$ となり，C_1 の方程式は,

$$y=-\frac{5\sqrt{3}}{57}x(x-4)+3=-\frac{5\sqrt{3}}{57}(x^2-4x)+3$$

これより，プロ選手の「シュートの高さ」は，$4\cdot\frac{5\sqrt{3}}{57}+3=\frac{20\sqrt{3}}{57}+3\fallingdotseq 3.6$

また，放物線 C_2 から花子の「シュートの高さ」は約 3.4 なので，プロ選手の「シュートの高さ」の方が大きく，その差は約 0.2 よりボール約 1 個分である。

［解 説］

[1]はデータの分析からの出題ですが，選択肢で迷うことが，例年より少なくなっています。ただ，(3)は肩透かしを食らったような後味がします。[2]は 2 次関数の応用です。ただ，計算の複雑な箇所は結論が与えられており，うまく利用すると，見かけほど時間を費やすことはありません。

第３問

問題のページへ

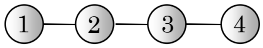


図 B

(1) 図 B の球の塗り方を①→②→③→④と数えると，①は 5 通り，②は①以外で 4 通り，③は②以外で 4 通り，④は③以外で 4 通りとなり，その総数は，

$$5\times4\times4\times4=320$$

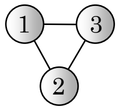


図 C

(2) 図 C の球の塗り方を①→②→③と数えると，①が 5 通り，②は①以外で 4 通り，③は①②以外で 3 通りとなり，その総数は，

$$5\times4\times3=60$$

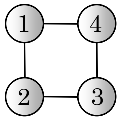


図 D

(3) 図 D において，赤を 2 回使うのは，赤を①と③に塗るとき，赤を②と④に塗るときの 2 つの場合がある。

(i) 赤を①と③に塗るとき

②，④の塗り方は，それぞれ赤以外の 4 通りずつ

(ii) 赤を②と④に塗るとき ①，③の塗り方は，それぞれ赤以外の 4 通りずつ

(i)(ii)より，塗り方の総数は，$4\times4+4\times4=32$

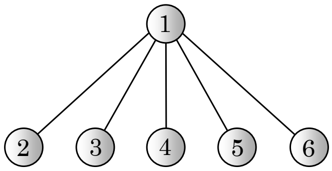


図 E

(4) 図 E において，赤を 3 回，青を 2 回使うのは，まず①の塗り方が赤と青以外の 3 通りとなる。そのとき，②，③，④，⑤，⑥の塗り方は，3 球が赤，2 球が青を塗る場合だけなので，その総数は，

$$3\times{}_5C_3\times{}_2C_2=3\times10\times1=30$$

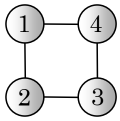


図 D

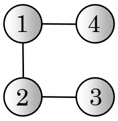


図 F

(5) 図 F における球の塗り方は，図 B における球の塗り方と同じであるため，320 通りの場合がある。

そのうち，③と④が同色になる球の塗り方の総数は，図 C すなわち ②の塗り方の総数 60 と一致する。

これより，図 D における球の塗り方の総数は，$320-60=260$ である。

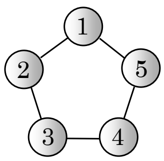


図 G

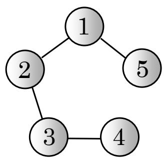


図 H

(6) 図 G における球の塗り方を(5)と同様に考える。

まず，図 H における球の塗り方は，(1)と同様に考えて，$5\times4\times4\times4\times4=1280$ 通りの場合がある。

そのうち，④と⑤が同色になる球の塗り方の総数は，図 D の塗り方の総数 260 と一致する。

これより，図 G における球の塗り方の総数は，$1280-260=1020$ である。

［解 説］

誘導がうまく付けられた場合の数の問題です。最後の(6)の考え方がポイントです。

第４問

問題のページへ

(1) 横の長さが 462 で縦の長さが 110 である赤い長方形について,

$$462=2\times3\times7\times11,\ 110=2\times5\times11$$

これより, 462 と 110 の両方を割り切る素数のうち最大のものは 11 である。

さて, 図 1 のように赤い長方形を並べ, 正方形を作るとき, 辺の長さが最小のものは, 1 辺の長さが 462 と 110 の最小公倍数より $2\times3\times5\times7\times11=2310$ である。

また, 赤い長方形を横に a 個, 縦に b 個並べて正方形ではない長方形を作るとき, 横の長さは $462a$, 縦の長さは $110b$ となり, その差の絶対値は,

$$|462a-110b|=22|21a-5b|$$

すると, この値が正の最小値をとるのは $|21a-5b|=1$ の場合で, この式を満たす解の 1 つとして $(a,\ b)=(1,\ 4)$ がある。すなわち, 横の長さと縦の長さの差の絶対値の最小値は $22\times1=22$ である。

さらに, 縦の長さが横の長さより 22 だけ長い長方形を作るとき,

$$110b-462a=22,\ 21a-5b=-1\cdots\cdots\cdots①$$

①を満たす解の 1 つとして $(a,\ b)=(-1,\ -4)$ があるので,

$$21\times(-1)-5\times(-4)=-1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $21(a+1)-5(b+5)=0$, $21(a+1)=5(b+5)$

21 と 5 は互いに素より, k を整数として, $a+1=5k$, $b+5=21k$ となり,

$$a=5k-1,\ b=21k-5$$

$a\geqq1$, $b\geqq1$ より $k\geqq1$ となり, $462a$ が最小なのは $k=1$ のときである。

よって, このときの横の長さは, $462\times(5\times1-1)=1848$ である。

(2) 横の長さが 363 で縦の長さが 154 である青い長方形について,

$$363=3\times11\times11,\ 154=2\times7\times11$$

そして, 図 2 のように, 赤い長方形と青い長方形を並べる。

まず, 赤い長方形を並べてできる長方形と, 青い長方形を並べてできる長方形は, 縦の長さが等しく, この長さが最小のものは, 110 と 154 の最小公倍数より,

$$2\times5\times7\times11=770$$

これより, 縦の長さは 770 の倍数となる。

さて, 462 と 363 の最大公約数は $3\times11=33$ であり, 33 の倍数のうちで 770 の倍数でもある最小の正の整数は,

$$2\times3\times5\times7\times11=2310$$

すると, 赤い長方形と青い長方形を並べて正方形を作るとき, 赤い長方形を横に a 個, 縦に b 個, 青い長方形を横に c 個, 縦に d 個並べるとすると, $462a+363c$ は 2310 の倍数であるので, l を正の整数として,

$462a+363c=2310l$，$2\times3\times7\times11a+3\times11\times11c=2\times3\times5\times7\times11l$

まとめると，$14a+11c=70l$ となり，$11c=14(5l-a)$ ………③

11 と 14 は互いに素なので，③から m を整数として，$c=14m$，$5l-a=11m$

$a=5l-11m$，$c=14m$

そして，$c\geqq1$ より $m\geqq1$ となり，$5l-a\geqq11$ から $l\geqq\dfrac{11+a}{5}$ ………④

さらに，$a\geqq1$，$l\geqq1$ から，④を満たす最小の l は $l=3$ であり，このとき，

$a=15-11m$，$c=14m$

これより，$m=1$ で，条件を満たす $(a,\ c)=(4,\ 14)$ が存在する。

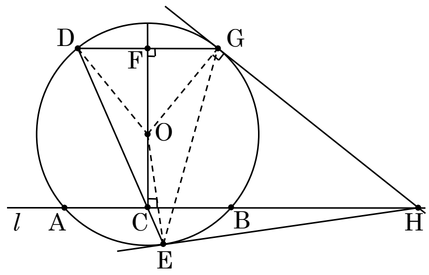
以上より，赤い長方形と青い長方形を並べて正方形を作るとき，辺の長さが最小であるものは，1 辺の長さが $2310\times3=6930$ である。

［解　説］

ときどき見かける約数と倍数についての問題です。ただ，最後の設問は，丁寧に解こうとすると面倒です。

第５問

問題のページへ



(1) 直線 EH が円 O の接線であることを証明するために，$\angle OEH = 90°$ であることを示す。

まず，$\angle OCH = \angle OGH = 90°$ から，4 点 C, G, H, O は同一円周上にあるので，

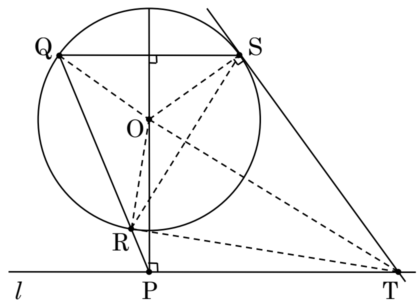
$$\angle CHG = \angle FOG \cdots\cdots\cdots ①$$

一方，点 E は円 O の周上にあることから，

$$\angle FOG = \frac{1}{2}\angle DOG = \angle DEG \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\angle CHG = \angle DEG$ すなわち $\angle CHG = \angle CEG$ となり，4 点 C, G, H, E は同一円周上にある。

すると，5 点 C, G, H, O, E は同一円周上にあり，$\angle OEH = 90°$ である。



(2) まず，$\angle OST = \angle OPT = 90°$ から，4 点 O, P, T, S は同一円周上にあるので，

$$\angle PTS = \frac{1}{2}\angle QOS = \angle QRS$$

これより，4 点 R, P, T, S は同一円周上にあるので，5 点 O, R, P, T, S は同一円周上にある。

すると，5 点 O, R, P, T, S を通る円の直径は OT であり，これより $\angle ORT = 90°$ となるので，直線 RT は円 O の接線である。

ここで，$OR = \sqrt{5}$，$OT = 3\sqrt{6}$ のとき，3 点 O, P, R を通る円の半径は $\frac{OT}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$ であり，$RT = \sqrt{OT^2 - OR^2} = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} = 7$ である。

［解 説］

作図をもとにした証明問題です。(2)の設問は，(1)のプロセスを参考にするように構成されています。