第１問

解答解説のページへ

[1]　座標平面上で，直線 $3x+2y-39=0$ を l_1 とする。また，k を実数とし，直線 $kx-y-5k+12=0$ を l_2 とする。

(1)　直線 l_1 と x 軸は，点($\boxed{\text{アイ}}$ ，0) で交わる。また，直線 l_2 は k の値に関係なく点 ($\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エオ}}$) を通り，直線 l_1 もこの点を通る。

(2)　2 直線 l_1，l_2 および x 軸によって囲まれた三角形が**できないような** k の値は，

$k=\boxed{\text{カ}}$, $\dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(3)　2 直線 l_1，l_2 および x 軸によって囲まれた三角形ができるとき，この三角形の周および内部からなる領域を D とする。さらに，r を正の実数とし，不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とする。

直線 l_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通る場合を考える。このとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。さらに，D が E に含まれるような r の値の範囲は，$r \geqq \boxed{\text{シス}}$ である。

次に，$r=\boxed{\text{シス}}$ の場合を考える。このとき，D が E に含まれるような k の値の範囲は，$k \geqq \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ または $k<\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

[2]　θ は $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。

(1)　$\tan\theta = -\sqrt{3}$ のとき，$\theta =$ $\boxed{\text{ア}}$ であり，$\cos\theta =$ $\boxed{\text{イ}}$，$\sin\theta =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

一般に，$\tan\theta = k$ のとき，$\cos\theta =$ $\boxed{\text{エ}}$，$\sin\theta =$ $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $-\frac{\pi}{3}$	① $-\frac{\pi}{4}$	② $-\frac{\pi}{6}$	③ $\frac{\pi}{6}$	④ $\frac{\pi}{4}$	⑤ $\frac{\pi}{3}$

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① 1	② -1
③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
⑥ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$	⑦ $\frac{1}{2}$	⑧ $-\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\frac{1}{1+k^2}$	① $-\frac{1}{1+k^2}$	② $\frac{k}{1+k^2}$	③ $-\frac{k}{1+k^2}$
④ $\frac{2}{1+k^2}$	⑤ $-\frac{2}{1+k^2}$	⑥ $\frac{2k}{1+k^2}$	⑦ $-\frac{2k}{1+k^2}$
⑧ $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	⑨ $-\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓐ $\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$	ⓑ $-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(2)　花子さんと太郎さんは，関数のとり得る値の範囲について話している。

花子：$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，$\tan\theta$ のとり得る値の範囲は実数全体だよね。

太郎：$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ だけど，分子を少し変えるとどうなるかな。

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta} = p$，$\frac{\sin\left(\theta + \frac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta} = q$ とおく。

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で θ を動かすとき，p のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ であり，q のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $-1 < p < 1$	① $0 < p < 1$
② $-2 < p < 2$	③ $0 < p < 2$
④ 実数全体	⑤ 正の実数全体

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ $-1<q<1$	① $0<q<1$
② $-2<q<2$	③ $0<q<2$
④ 実数全体	⑤ 正の実数全体
⑥ $-\sin\dfrac{\pi}{7}<q<\sin\dfrac{\pi}{7}$	⑦ $0<q<\sin\dfrac{\pi}{7}$
⑧ $-\cos\dfrac{\pi}{7}<q<\cos\dfrac{\pi}{7}$	⑨ $0<q<\cos\dfrac{\pi}{7}$

(3)　α は $0 \leqq \alpha < 2\pi$ を満たすとし，$\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}=r$ とおく。$\alpha=\dfrac{\pi}{7}$ の場合，r は(2)で定めた q と等しい。

α の値を 1 つ定め，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で θ のみを動かすとき，r のとり得る値の範囲を考える。r のとり得る値の範囲が q のとり得る値の範囲と異なるような α $(0 \leqq \alpha < 2\pi)$ は $\boxed{\text{ク}}$。

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ 存在しない	① ちょうど 1 個存在する
② ちょうど 2 個存在する	③ ちょうど 3 個存在する
④ ちょうど 4 個存在する	⑤ 5 個以上存在する

第２問

解答解説のページへ

k を実数とし，$f(x)=x^3-kx$ とおく。また，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C とする。必要に応じて，次のことを用いてもよい。

曲線 C の平行移動

曲線 C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y=(x-p)^3-k(x-p)+q$$

である。

(1) t を実数とし，$g(x)=(x-t)^3-k(x-t)$ とおく。また，座標平面上の曲線 $y=g(x)$ を C_1 とする。

(i) 関数 $f(x)$ は $x=2$ で極値をとるとする。このとき，$f'(2)=$ $\boxed{\text{ア}}$ であるから，$k=$ $\boxed{\text{イウ}}$ であり，$f(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{エオ}}$ で極大値をとる。また，$g(x)$ が $x=3$ で極大値をとるとき，$t=$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(ii) $t=1$ とする。また，曲線 C と C_1 は 2 点で交わるとし，1 つの交点の x 座標は -2 であるとする。このとき，$k=$ $\boxed{\text{キク}}$ であり，もう一方の交点の x 座標は $\boxed{\text{ケ}}$ である。また，C と C_1 で囲まれた図形のうち，$x \geqq 0$ の範囲にある部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。

(2) a，b，c を実数とし，$h(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ とおく。また，座標平面上の曲線 $y=h(x)$ を C_2 とする。

(i) 曲線 C を平行移動して，C_2 と一致させることができるかどうかを考察しよう。C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線が C_2 と一致するとき

$$h(x)=(x-p)^3-k(x-p)+q \cdots\cdots\cdots ①$$

である。よって，$p=$ $\boxed{\text{スセ}}$，$b=$ $\boxed{\text{ソ}}$ p^2-k であり

$$k=\boxed{\text{タ}}\,a^2-b \cdots\cdots\cdots ②$$

である。また，①において，$x=p$ を代入すると，$q=h(p)=h(\boxed{\text{スセ}})$ となる。

逆に，k が②を満たすとき，C を x 軸方向に $\boxed{\text{スセ}}$，y 軸方向に $h(\boxed{\text{スセ}})$ だけ平行移動させると C_2 と一致することが確かめられる。

(ii) $b=3a^2-3$ とする。このとき，曲線 C_2 は曲線 $y=x^3-$ $\boxed{\text{チ}}$ x を平行移動したものと一致する。よって，$h(x)$ が $x=4$ で極大値 3 をとるとき，$h(x)$ は $x=$ $\boxed{\text{ツ}}$ で極小値 $\boxed{\text{テト}}$ をとることがわかる。

(iii) 次の ⓪～③のうち，平行移動によって一致させることができる 2 つの異なる曲線は $\boxed{\text{ナ}}$ と $\boxed{\text{ニ}}$ である。

$\boxed{\text{ナ}}$, $\boxed{\text{ニ}}$ の解答群（解答の順序は問わない）

⓪	$y = x^3 - x - 5$
①	$y = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$
②	$y = x^3 - 6x^2 - x - 4$
③	$y = x^3 - 6x^2 + 7x - 5$

第３問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 9 ページの正規分布表を用いてもよい。

太郎さんのクラスでは，確率分布の問題として，2 個のさいころを同時に投げることを 72 回繰り返す試行を行い，2 個とも 1 の目が出た回数を表す確率変数 X の分布を考えることとなった。そこで，21 名の生徒がこの試行を行った。

(1)　X は二項分布 $B\left(\boxed{アイ},\ \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}\right)$ に従う。このとき，$k=\boxed{アイ}$，

$p=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ とおくと，$X=r$ である確率は

$$P(X=r)={}_k\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{\boxed{カ}}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k)\cdots\cdots\cdots①$$

である。また，X の平均(期待値)は $E(X)=\boxed{キ}$，標準偏差は $\sigma(X)=\dfrac{\sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コ}}$

である。

$\boxed{カ}$ の解答群

⓪　k	①　$k+r$	②　$k-r$	③　r

(2)　21 名全員の試行結果について，2 個とも 1 の目が出た回数を調べたところ，右の表のような結果になった。なお，5 回以上出た生徒はいなかった。

回数	0	1	2	3	4	計
人数	2	7	7	3	2	21

この表をもとに，確率変数 Y を考える。

Y のとり得る値を 0, 1, 2, 3, 4 とし，各値の相対度数を確率として，Y の確率分布を次の表のとおりとする。

Y	0	1	2	3	4	計
P	$\dfrac{2}{21}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$	$\dfrac{2}{21}$	$\boxed{ス}$

このとき，Y の平均は $E(Y)=\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}$，標準偏差は $\sigma(Y)=\dfrac{\sqrt{530}}{21}$ である。

(3)　太郎さんは，(2)の実際の試行結果から作成した確率変数 Y の分布について，二項分布の①のように，その確率の値を数式で表したいと考えた。

そこで，$Y=1$，$Y=2$ である確率が最大であり，かつ，それら 2 つの確率が等しくなっている確率分布について先生に相談したところ，Y の代わりとして，新しく次のような確率変数 Z を提案された。

先生の提案

Z のとり得る値は $0, 1, 2, 3, 4$ であり，$Z=r$ である確率を

$$P(Z=r)=\alpha\cdot\frac{2^r}{r!}\quad (r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

とする。ただし，α を正の定数とする。また，$r!=r(r-1)\cdots 2\cdot 1$ であり，$0!=1$，$1!=1$，$2!=2$，$3!=6$，$4!=24$ である。

このとき，(2)と同様に Z の確率分布の表を作成することにより，$\alpha=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ であることがわかる。

Z の平均は $E(Z)=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$，標準偏差は $\sigma(Z)=\dfrac{\sqrt{614}}{21}$ であり，$E(Z)=E(Y)$ が成り立つ。また，$Z=1$，$Z=2$ である確率が最大であり，かつ，それら 2 つの確率は等しい。これらのことから，太郎さんは提案されたこの Z の確率分布を利用することを考えた。

(4)　(3)で考えた確率変数 Z の確率分布をもつ母集団を考え，この母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 W_1，W_2，$\cdots$，W_n とし，標本平均を $\overline{W}=\dfrac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots+W_n)$ とする。

$\overline{W}$ の平均を $E(\overline{W})=m$，標準偏差を $\sigma(\overline{W})=s$ とおくと，$m=\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$，$s=\sigma(Z)\cdot\boxed{\text{ネ}}$ である。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{1}{n}$	① 1	② $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$
③ $\sqrt{n}$	④ n	⑤ n^2

また，標本の大きさ n が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N(m,\ s^2)$ に従う。さらに，n が増加すると s^2 は $\boxed{\text{ノ}}$ ので，$\overline{W}$ の分布曲線と，m と $E(X)=\boxed{\text{キ}}$ の大小関係に注意すれば，n が増加すると $P(\overline{W}\geqq\boxed{\text{キ}})$ は $\boxed{\text{ハ}}$ ことがわかる。

ここで，$U=$ ヒ とおくと，n が十分に大きいとき，確率変数 U は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。このことを利用すると，$n=100$ のとき，標本の大きさは十分に大きいので，$P(\overline{W} \geqq$ キ $)=0.$ フヘホ である。ただし，$0.$ フヘホ の計算においては $\dfrac{1}{\sqrt{614}}=\dfrac{\sqrt{614}}{614}=0.040$ とする。

$\overline{W}$ の確率分布において $E(X)$ は極端に大きな値をとっていることがわかり，$E(X)$ と $E(\overline{W})$ は等しいとはみなせない。

ノ，ハ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

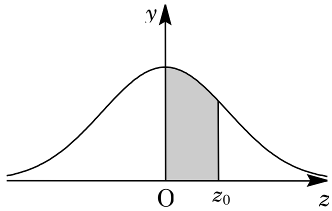
⓪ 小さくなる	① 変化しない	② 大きくなる

ヒ の解答群

⓪ $\dfrac{\overline{W}-m}{\sqrt{n}}$	① $\dfrac{\overline{W}-m}{n}$	② $\dfrac{\overline{W}-m}{n^2}$
③ $\dfrac{\overline{W}-m}{\sqrt{s}}$	④ $\dfrac{\overline{W}-m}{s}$	⑤ $\dfrac{\overline{W}-m}{s^2}$

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第４問

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，初項が１で

$$a_{n+1}=a_n+4n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。また，数列$\{b_n\}$は，初項が１で

$$b_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。さらに，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。

(1)　$a_2=\boxed{\text{ア}}$である。また，階差数列を考えることにより

$$a_n=\boxed{\text{イ}}n^2-\boxed{\text{ウ}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

であることがわかる。さらに

$$S_n=\frac{\boxed{\text{エ}}n^3+\boxed{\text{オ}}n^2-\boxed{\text{カ}}n}{\boxed{\text{キ}}} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を得る。

(2)　$b_2=\boxed{\text{ク}}$である。また，すべての自然数 n に対して，$a_n-b_n=\boxed{\text{ケ}}$が成り立つ。

$\boxed{\text{ケ}}$の解答群

⓪　0	①　$2n$	②　$2n-2$
③　n^2-1	④　n^2-n	⑤　$1+(-1)^n$
⑥　$1-(-1)^n$	⑦　$-1+(-1)^n$	⑧　$-1-(-1)^n$

(3)　(2)から，$a_{2021}\boxed{\text{コ}}b_{2021}$，$a_{2022}\boxed{\text{サ}}b_{2022}$ が成り立つことがわかる。また，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおくと，$S_{2021}\boxed{\text{シ}}T_{2021}$，$S_{2022}\boxed{\text{ス}}T_{2022}$ が成り立つこともわかる。

$\boxed{\text{コ}}$～$\boxed{\text{ス}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　<	①　=	②　>

(4)　数列$\{b_n\}$の初項を変えたらどうなるかを考えてみよう。つまり，初項が c で

$$c_{n+1}=c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たす数列$\{c_n\}$を考える。

すべての自然数 n に対して，$b_n-c_n=\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}$が成り立つ。

また，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ とおく。$S_4=U_4$ が成り立つとき，$c=\boxed{\text{タ}}$である。このとき，$S_{2021}\boxed{\text{チ}}U_{2021}$，$S_{2022}\boxed{\text{ツ}}U_{2022}$ も成り立つ。

ただし，$\boxed{\text{タ}}$は，文字(a～d)を用いない形で答えること。

$\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ ＜	① ＝	② ＞

第５問

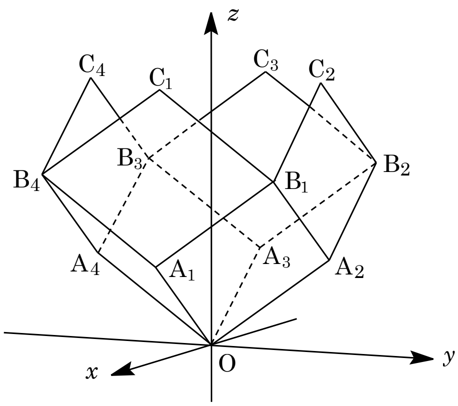
解答解説のページへ

a を正の実数とする。O を原点とする座標空間に 4 点

$$A_1(1,\ 0,\ a),\ A_2(0,\ 1,\ a),\ A_3(-1,\ 0,\ a),\ A_4(0,\ -1,\ a)$$

がある。また，右の図のように，4 点 B_1，B_2，B_3，B_4 を四角形 $A_1OA_2B_1$，$A_2OA_3B_2$，$A_3OA_4B_3$，$A_4OA_1B_4$ がそれぞれひし形になるようにとる。さらに，4 点 C_1，C_2，C_3，C_4 を四角形 $A_1B_1C_1B_4$，$A_2B_2C_2B_1$，$A_3B_3C_3B_2$，$A_4B_4C_4B_3$ がそれぞれひし形になるようにとる。

ただし，座標空間における四角形を考える際には，その 4 つの頂点が同一平面上にあるものとする。



(1) 点 B_2，C_3 の座標は，$B_2(-1,\ \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}})$，$C_3(-1,\ \boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オカ}})$ である。

また，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\boxed{\text{キ}}$，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{B_2C_3}=\boxed{\text{ク}}$ となる。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ 0	① 1	② -1
③ a^2	④ a^2+1	⑤ a^2-1
⑥ $2a^2$	⑦ $2a^2+1$	⑧ $2a^2-1$

(2) ひし形 $A_1OA_2B_1$ と $A_1B_1C_1B_4$ が合同であるとする。

対応する対角線の長さが等しいことから，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ であることがわかる。

直線 OA_1 上に点 P を $\angle OPA_2$ が直角となるようにとる。

実数 s を用いて $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA_1}$ と表せる。$\overrightarrow{PA_2}$ と $\overrightarrow{OA_1}$ が垂直であること，および

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ であることにより，$s=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であることがわかる。

(3) 実数 a および点 P を(2)のようにとり，3 点 P，A_2，A_4 を通る平面を α とするとき，次のことについて考察しよう。

考察すること

平面 α と 2 点 B_2，C_3 の位置関係

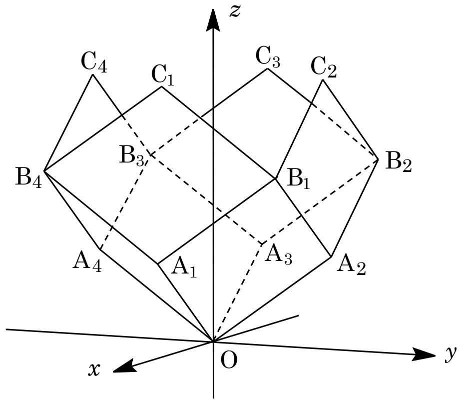
$\angle \mathrm{OPA_4}$ も直角であるので，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と平面 α は垂直であることに注意する。

直線 $\mathrm{B_2C_3}$ と平面 α の交点を Q とする。

実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB_2}} + t\overrightarrow{\mathrm{B_2C_3}}$ と表せる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と垂直であることより

$t =$ $\boxed{チ}$

であることがわかる。



座標空間から平面 α を除いた部分は，α を境に，原点 O を含む側と含まない側に分けられる。このとき，点 $\mathrm{B_2}$ は $\boxed{ツ}$ にあり，点 $\mathrm{C_3}$ は $\boxed{テ}$ にある。

$\boxed{チ}$ の解答群

⓪ 0	① 1	② -1	③ $\frac{1}{2}$
④ $-\frac{1}{2}$	⑤ $\frac{1}{3}$	⑥ $-\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{2}{3}$

$\boxed{ツ}$，$\boxed{テ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ α 上

① O を含む側

② O を含まない側

第１問

問題のページへ

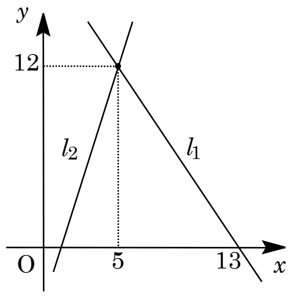
[1]　直線 $l_1 : 3x+2y-39=0$ ……①，$l_2 : kx-y-5k+12=0$ ……②に対して，

(1)　直線 l_1 と x 軸の交点は，①と $y=0$ を連立して，$3x-39=0$ から $x=13$ となり，その座標は $(13,\ 0)$ である。また，直線 l_2 は，②から，

$$y=k(x-5)+12,\ \ y-12=k(x-5)$$

これより，l_2 は点 $(5,\ 12)$ を通る傾き k の直線である。

なお，l_1 も点 $(5,\ 12)$ を通っている。



(2)　l_1，l_2 と x 軸によって囲まれた三角形ができないのは，l_2 と x 軸が平行な場合，または l_2 と l_1 が平行な場合より，

$$k=0,\ \ k=-\frac{3}{2}$$

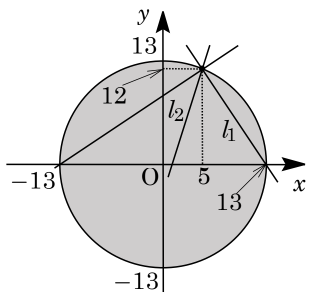
(3)　l_1，l_2 と x 軸によって囲まれた三角形の周および内部の領域を D，不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とする。

まず，l_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通るとき，②より $-13k-5k+12=0$ から $k=\dfrac{2}{3}$ である。

このとき，D が E に含まれるような r の値は，原点と三角形の 3 つの頂点 $(\pm 13,\ 0)$，$(5,\ 12)$ との距離がすべて 13 であることより，$r \geqq 13$ となる。

次に，$r=13$ のとき $E : x^2+y^2 \leqq 13^2$ となり，l_2 が点 $(-13,\ 0)$ を通るとき $k=\dfrac{2}{3}$，l_2 が l_1 と一致するとき $k=-\dfrac{3}{2}$ なので，D が E に含まれる k の値の範囲は，右図より，

$$k \geqq \frac{2}{3} \text{ または } k<-\frac{3}{2}$$



［解　説］

円と直線の関係についての基本題です。計算も容易です。

[2]　(1)　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$において，$\tan\theta=-\sqrt{3}$のとき$\theta=-\dfrac{\pi}{3}$であり，このとき，

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\theta=k$のとき，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+k^2$から$\cos^2\theta=\dfrac{1}{1+k^2}$となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より，

$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$

(2)　$p=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$なので，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，$p$のとり得る値の範囲は$-2<p<2$である。

また，$q=\dfrac{\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{7}\right)}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{7}}{\cos\theta}=\cos\dfrac{\pi}{7}\tan\theta+\sin\dfrac{\pi}{7}$なので，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，$q$のとり得る値の範囲は実数全体である。

(3)　$r=\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta}=\cos\alpha\tan\theta+\sin\alpha$

ここで，$0\leqq\alpha<2\pi$より，

(i)　$\cos\alpha\neq 0\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2},\ \alpha\neq\dfrac{3}{2}\pi\right)$のとき　rのとり得る値の範囲は実数全体である。

(ii)　$\cos\alpha=0\left(\alpha=\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき　rのとり得る値は$\sin\alpha=1$だけである。

(iii)　$\cos\alpha=0\left(\alpha=\dfrac{3}{2}\pi\right)$のとき　rのとり得る値は$\sin\alpha=-1$である。

(i)～(iii)より，rのとり得る値の範囲が実数全体でないαは2個存在する。

［解 説］

三角関数について，公式の確認程度の基本的な問題です。

第２問

問題のページへ

$f(x)=x^3-kx$ (k は実数)に対して，曲線 $C: y=f(x)$ とおく。

(1)　$g(x)=(x-t)^3-k(x-t)$ に対して，曲線 $C_1: y=g(x)$ とおくと，C_1 は C を x 軸方向に t だけ移動した曲線である。

(i)　$f(x)$ は $x=2$ で極値をとるので，$f'(2)=0$ が必要である。

すると，$f'(x)=3x^2-k$ から $12-k=0$ となり，$k=12$ から，

$$f(x)=x^3-12x$$

$$f'(x)=3(x+2)(x-2)$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

このとき，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-2$ で極大値をとる。

これより，$g(x)$ が $x=3$ で極大値をとるとき，$t=3-(-2)=5$ である。

(ii)　$t=1$ のとき $g(x)=(x-1)^3-k(x-1)$ となり，C と C_1 の交点は,

$$x^3-kx=(x-1)^3-k(x-1),\ -3x^2+3x-1+k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の 1 つの解が $x=-2$ なので，$-12-6-1+k=0$ より，$k=19$ となる。

このとき，$(*)$は $-3x^2+3x+18=0$ から $-3(x+2)(x-3)=0$ となり，もう一方の交点の x 座標は $x=3$ である。

そして，$-2\leqq x\leqq 3$ において $f(x)\leqq g(x)$ なので，$0\leqq x\leqq 3$ における C と C_1 ではさまれた図形の面積 S は,

$$S=\int_0^3(-3x^2+3x+18)\,dx=\Big[-x^3+\frac{3}{2}x^2+18x\Big]_0^3=-27+\frac{27}{2}+54=\frac{81}{2}$$

(2)　$h(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ (a, b, c は実数)に対して，曲線 $C_2: y=h(x)$ とおく。

(i)　C を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動した曲線が C_2 と一致するとき,

$$h(x)=(x-p)^3-k(x-p)+q\cdots\cdots\cdots①$$

①の係数を比べて，$3a=-3p$ から $p=-a$，$b=3p^2-k$ から $b=3a^2-k$ となり,

$$k=3a^2-b\cdots\cdots\cdots②$$

また，$q=h(p)=h(-a)$ である。

逆に, k が②を満たすとき，C を x 軸方向に $-a$，y 軸方向に $h(-a)$ だけ平行移動させると C_2 に一致する。

(ii)　$b=3a^2-3$ のとき, ②より $k=3$ となり，曲線 C_2 は曲線 $y=x^3-3x$ を平行移動したものと一致する。

ここで，$y=x^3-3x$ に対して,

$$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

すると，y の増減は右表のようになり，$x=-1$ で極大値 2，$x=1$ で極小値 -2 をとる。

さて，$h(x)$ が $x=4$ で極大値 3 をとるとき，C_2 は曲線 $y=x^3-3x$ を x 軸方向に $4-(-1)=5$，y 軸方向に $3-2=1$ だけ平行移動した曲線である。

よって，$h(x)$ は $x=1+5=6$ で極小値 $-2+1=-1$ をとる。

(iii) 曲線 $y=x^3-x-5$ は，$y=x^3-x$ を平行移動した曲線である。

曲線 $y=x^3+3x^2-2x-4$ は，②から $k=3\cdot1^2-(-2)=5$ より，$y=x^3-5x$ を平行移動した曲線である。

曲線 $y=x^3-6x^2-x-4$ は，②から $k=3\cdot(-2)^2-(-1)=13$ より，$y=x^3-13x$ を平行移動した曲線である。

曲線 $y=x^3-6x^2+7x-5$ は，②から $k=3\cdot(-2)^2-7=5$ より，$y=x^3-5x$ を平行移動した曲線である。

したがって，平行移動によって一致させることができる 2 つの異なる曲線は，

①「$y=x^3+3x^2-2x-4$」と ③「$y=x^3-6x^2+7x-5$」

［解 説］

3 次曲線の平行移動を題材にした微積分の総合問題です。最後の設問まで，うまく誘導がつけられています。

第３問

問題のページへ

2 個のさいころを同時に投げることを 72 回繰り返し, 2 個とも 1 の目が出た回数を表す確率変数 X とする。そして, この試行を 21 名が行った。

(1) 2 個とも 1 の目が出る確率は $\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$ なので, X は二項分布 $B\left(72,\ \dfrac{1}{36}\right)$ に従う。

ここで, $k=72$, $p=\dfrac{1}{36}$ とおくと, $X=r$ である確率は

$$P(X=r)={}_k\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{k-r}={}_{72}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{36}\right)^r\left(\frac{35}{36}\right)^{72-r}$$

すると, $E(X)=72\cdot\dfrac{1}{36}=2$, $V(X)=72\cdot\dfrac{1}{36}\cdot\dfrac{35}{36}=\dfrac{70}{36}$, $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{70}{36}}=\dfrac{\sqrt{70}}{6}$

(2) 21 名の試行結果について, 確率変数 Y のとり得る値を 0, 1, 2, 3, 4 とし, 各値の相対度数を確率とすると, 確率分布は右表のようになり,

Y	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{21}$	1

$$E(Y)=0\times\frac{2}{21}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{2}{21}=\frac{38}{21},\ \sigma(Y)=\frac{\sqrt{530}}{21}$$

(3) 確率変数 Z のとり得る値を 0, 1, 2, 3, 4 とし, $P(Z=r)=\alpha\cdot\dfrac{2^r}{r!}$ とするとき, その確率分布は右表のようになり,

Z	0	1	2	3	4	計
P	α	2α	2α	$\frac{4}{3}\alpha$	$\frac{2}{3}\alpha$	1

$$\alpha+2\alpha+2\alpha+\frac{4}{3}\alpha+\frac{2}{3}\alpha=1,\ 7\alpha=1,\ \alpha=\frac{1}{7}$$

$$E(Z)=0\cdot\alpha+1\cdot2\alpha+2\cdot2\alpha+3\cdot\frac{4}{3}\alpha+4\cdot\frac{2}{3}\alpha=\frac{38}{3}\alpha=\frac{38}{21},\ \sigma(Z)=\frac{\sqrt{614}}{21}$$

(4) 確率変数 Z の確率分布をもつ母集団から無作為に抽出した大きさ n の標本を確率変数 W_1, W_2, …, W_n とし, 標本平均を $\overline{W}=\dfrac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots+W_n)$ とおく。すると, $\overline{W}$ の平均と標準偏差は,

$$m=E(\overline{W})=E(Z)=\frac{38}{21},\ s=\sigma(\overline{W})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(Z)=\frac{\sqrt{614}}{21\sqrt{n}}$$

また, 標本の大きさ n が十分に大きいとき, $\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N(m,\ s^2)$ に従う。さらに, n が増加すると s^2 は小さくなり, $m=\dfrac{38}{21}$ と $E(X)=2$ について $m<2$ であることから, n が増加すると $P(\overline{W}\geqq 2)$ も小さくなる。

ここで, $U=\dfrac{\overline{W}-m}{s}=\dfrac{21\sqrt{n}}{\sqrt{614}}\left(\overline{W}-\dfrac{38}{21}\right)$ とおくと, 確率変数 U は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

そして, $n=100$ のとき, $\dfrac{1}{\sqrt{614}}=0.040$ とすると,

$$U=\frac{21\sqrt{100}}{\sqrt{614}}\left(\overline{W}-\frac{38}{21}\right)=210\times0.040\times\left(\overline{W}-\frac{38}{21}\right)=8.4\left(\overline{W}-\frac{38}{21}\right)$$

すると，$\overline{W}\geqq 2$ のとき，$U\geqq 8.4\left(2-\frac{38}{21}\right)=8.4\times\frac{4}{21}=1.6$ から，

$$P(\overline{W}\geqq 2)=P(U\geqq 1.6)=0.5-0.4452\fallingdotseq 0.055$$

［解　説］

確率分布についての基本的な問題です。数値計算が面倒な箇所は，問題文中に結論が与えられており，計算量は例年より軽めです。

第４問

問題のページへ

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4n+2$ ……①で定義される数列$\{a_n\}$に対し，

$a_2=a_1+4\cdot1+2=7$ となり，$n\geqq2$ において，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=1+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=2n^2-1$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立し，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-n=\frac{2n^3+3n^2-2n}{3}$$

(2)　$b_1=1$，$b_{n+1}=b_n+4n+2+2\cdot(-1)^n$ ……②で定義される数列$\{b_n\}$に対し，

$$b_2=b_1+4\cdot1+2+2\cdot(-1)^1=5$$

①②から，$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n-2\cdot(-1)^n$ なので，$n\geqq2$ において，

$$a_n-b_n=a_1-b_1-2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k=1-1-2\cdot\frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^{n-1}\}}{1+1}$$

$$=1-(-1)^{n-1}=1+(-1)^n\ \cdots\cdots\cdots③$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

(3)　③より，$a_{2021}-b_{2021}=1+(-1)^{2021}=0$，$a_{2022}-b_{2022}=1+(-1)^{2022}=2>0$ より，

$$a_{2021}=b_{2021},\ a_{2022}>b_{2022}$$

ここで，$T_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$ とおくと，③より，

$$S_n-T_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}\{1+(-1)^k\}$$

$$=n+\frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^n\}}{1+1}=n-\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より，$S_{2021}-T_{2021}=2021-\frac{1}{2}\{1-(-1)^{2021}\}=2020>0$

$$S_{2022}-T_{2022}=2022-\frac{1}{2}\{1-(-1)^{2022}\}=2022>0$$

よって，$S_{2021}>T_{2021}$，$S_{2022}>T_{2022}$ である。

(4)　$c_1=c$，$c_{n+1}=c_n+4n+2+2\cdot(-1)^n$ ……⑤で定義される数列$\{c_n\}$に対し，

②⑤より，$b_{n+1}-c_{n+1}=b_n-c_n$ より，$b_n-c_n=b_1-c_1=1-c$ となり，③から，

$$c_n=b_n-1+c=a_n-1-(-1)^n-1+c=a_n-(-1)^n+c-2$$

ここで，$U_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$ とおくと，

$$U_4=S_4+\sum_{k=1}^{4}\{-(-1)^k+c-2\}=S_4-(-1+1-1+1)+4(c-2)$$

$$=S_4+4(c-2)$$

すると，$S_4=U_4$ から $4(c-2)=0$ となるので，$c=2$ である。

このとき，$c_n = a_n - (-1)^n$ となり，$a_n - c_n = (-1)^n$ から，

$$S_n - U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} c_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - c_k) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$$

$$= \frac{(-1)\cdot\{1-(-1)^n\}}{1+1} = -\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥より，$S_{2021} - U_{2021} = -\frac{1}{2}\{1-(-1)^{2021}\} = -\frac{1}{2}(1+1) = -1 < 0$

$$S_{2022} - U_{2022} = -\frac{1}{2}\{1-(-1)^{2022}\} = -\frac{1}{2}(1-1) = 0$$

よって，$S_{2021} < U_{2021}$，$S_{2022} = U_{2022}$ である。

［解　説］

漸化式についての標準的な問題です。量的には多いですが，誘導がていねいなので，途中で止まることはないでしょう。

第５問

問題のページへ

(1)　a を正の実数とし，$A_1(1,\ 0,\ a)$，$A_2(0,\ 1,\ a)$，$A_3(-1,\ 0,\ a)$，$A_4(0,\ -1,\ a)$ 対して，四角形 $A_1OA_2B_1$，$A_2OA_3B_2$，$A_3OA_4B_3$，$A_4OA_1B_4$，$A_1B_1C_1B_4$ および四角形 $A_2B_2C_2B_1$，$A_3B_3C_3B_2$，$A_4B_4C_4B_3$ はひし形なので，

$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}=(0,\ 1,\ a)+(-1,\ 0,\ a)=(-1,\ 1,\ 2a)$$

$$\overrightarrow{OC_3}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{A_3B_2}+\overrightarrow{A_3B_3}=\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}$$

$$=(-1,\ 0,\ a)+(0,\ 1,\ a)+(0,\ -1,\ a)=(-1,\ 0,\ 3a)$$

よって，$B_2(-1,\ 1,\ 2a)$，$C_3(-1,\ 0,\ 3a)$ であり，

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=-1+0+2a^2=2a^2-1$$

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{B_2C_3}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{A_3B_3}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_4}=0+0+a^2=a^2$$

(2)　ひし形 $A_1OA_2B_1$ と $A_1B_1C_1B_4$ が合同であるとき，$|\overrightarrow{A_1A_2}|=|\overrightarrow{A_1C_1}|$ である。

ここで，$\overrightarrow{A_1A_2}=(0,\ 1,\ a)-(1,\ 0,\ a)=(-1,\ 1,\ 0)$

$$\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1B_4}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=(0,\ 1,\ a)+(0,\ -1,\ a)=(0,\ 0,\ 2a)$$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{A_1C_1}|=2a$ なので，$\sqrt{2}=2a$ から $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。

さて，直線 OA_1 上に点 P を $\angle OPA_2=90^\circ$ となるようにとり，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA_1}$ とおくと，$\overrightarrow{PA_2}\cdot\overrightarrow{OA_1}=0$ から，$(\overrightarrow{OA_2}-s\overrightarrow{OA_1})\cdot\overrightarrow{OA_1}=0$ となり，

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=1+0+a^2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\quad \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=0+0+a^2=\frac{1}{2}$$

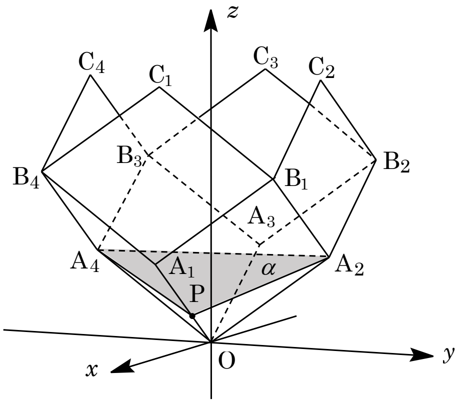
よって，$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_1}-s\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}=0$ から $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}s=0$ となり，$s=\dfrac{1}{3}$ である。

(3)　3 点 P，A_2，A_4 を通る平面を α とし，直線 B_2C_3 と平面 α の交点を Q とすると，

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB_2}+t\overrightarrow{B_2C_3}$$

$$=(-1,\ 1,\ 2a)+t(0,\ -1,\ a)$$

$$=(-1,\ 1-t,\ 2a+at)$$



ここで，$\angle OPA_2=\angle OPA_4=90^\circ$ から，$\overrightarrow{OA_1}$ と平面 α は垂直となり，$\overrightarrow{PQ}$ は $\overrightarrow{OA_1}$ と垂直である。

さて，$\overrightarrow{OA_1}=(1,\ 0,\ a)$ で，

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,\ 1-t,\ 2a+at)-\frac{1}{3}(1,\ 0,\ a)=\left(-\frac{4}{3},\ 1-t,\ \frac{5}{3}a+at\right)$$

すると，$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA_1}=0$ から，$-\dfrac{4}{3}+\dfrac{5}{3}a^2+a^2t=0$ となり，$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から，

$$-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=0,\quad -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t=0,\quad t=1$$

これより，$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{B_2C_3}=\overrightarrow{OC_3}$ となり，点 Q は点 C_3 に一致する。

したがって，点$\mathrm{C_3}$はα上にある。

また，$\overrightarrow{\mathrm{C_3B_2}}=\overrightarrow{\mathrm{B_3A_3}}=\overrightarrow{\mathrm{A_4O}}$より$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}=\overrightarrow{\mathrm{OC_3}}+\overrightarrow{\mathrm{A_4O}}$となり，点$\mathrm{B_2}$は$\alpha$を境に O を含む側にある。

［解 説］

空間図形へのベクトルの応用問題です。見慣れない図形を対象としていますが，参考図が記されており，しかも最後の領域の設問まで細かな誘導がついているため，見かけほど難しくはありません。