第１問

解答解説のページへ

[1] 座標平面上に点 A$(-8,\ 0)$ をとる。また，不等式 $x^2+y^2-4x-10y+4 \leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) 領域 D は，中心が点($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$)，半径が $\boxed{\text{ウ}}$ の円の $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 周	① 内部	② 外部
③ 周および内部	④ 周および外部	

以下，点($\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$) を Q とし，方程式 $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ の表す図形を C とする。

(2) 点 A を通る直線と領域 D が共有点をもつのはどのようなときかを考えよう。

(i) (1)により，直線 $y=\boxed{\text{オ}}$ は点 A を通る C の接線の 1 つとなることがわかる。

太郎さんと花子さんは点 A を通る C のもう 1 つの接線について話している。

点 A を通り，傾きが k の直線を l とする。

太郎：直線 l の方程式は $y=k(x+8)$ と表すことができるから，これを $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ に代入することで接線を求められそうだね。

花子：x 軸と直線 AQ のなす角のタンジェントに着目することでも求められそうだよ。

(ii) 太郎さんの求め方について考えてみよう。

$y=k(x+8)$ を $x^2+y^2-4x-10y+4=0$ に代入すると，x についての 2 次方程式 $(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ が得られる。この方程式が $\boxed{\text{カ}}$ のときの k の値が接線の傾きとなる。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 重解をもつ

① 異なる 2 つの実数解をもち，1 つは 0 である

② 異なる 2 つの正の実数解をもつ

③ 正の実数解と負の実数解をもつ

④ 異なる 2 つの負の実数解をもつ

⑤ 異なる 2 つの虚数解をもつ

(iii) 花子さんの求め方について考えてみよう。

x 軸と直線 AQ のなす角を $\theta \left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$\tan\theta = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，

直線 $y=\boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きは $\tan\boxed{\text{ケ}}$ と表すことができる。

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ θ	① 2θ	② $\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$
③ $\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$	④ $(\theta+\pi)$	⑤ $(\theta-\pi)$
⑥ $\left(2\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$	⑦ $\left(2\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$	

(iv)　点 A を通る C の接線のうち，直線 $y=\boxed{\text{オ}}$ と異なる接線の傾きを k_0 とする。

このとき，(ii)または(iii)の考え方を用いることにより，$k_0=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であることがわかる。

直線 l と領域 D が共有点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{シ}}$ の解答群

⓪ $k>k_0$	① $k\geqq k_0$
② $k<k_0$	③ $k\leqq k_0$
④ $0<k<k_0$	⑤ $0\leqq k\leqq k_0$

[2]　a，b は正の実数であり，$a\neq 1$，$b\neq 1$ を満たすとする。太郎さんは $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小関係を調べることにした。

(1)　太郎さんは次のような考察をした。

まず，$\log_3 9=\boxed{\text{ス}}$，$\log_9 3=\dfrac{1}{\boxed{\text{ス}}}$ である。この場合，$\log_3 9>\log_9 3$ が成り立つ。一方，$\log_{\frac{1}{4}}\boxed{\text{セ}}=-\dfrac{3}{2}$，$\log_{\boxed{\text{セ}}}\dfrac{1}{4}=-\dfrac{2}{3}$ である。この場合，$\log_{\frac{1}{4}}\boxed{\text{セ}}<\log_{\boxed{\text{セ}}}\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

(2)　ここで，$\log_a b=t$ ……①とおく。(1)の考察をもとにして，太郎さんは次の式が成り立つと推測し，それが正しいことを確かめることにした。

$$\log_b a=\frac{1}{t}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①により，$\boxed{\text{ソ}}$ である。このことにより $\boxed{\text{タ}}$ が得られ，②が成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $a^b=t$	① $a^t=b$	② $b^a=t$
③ $b^t=a$	④ $t^a=b$	⑤ $t^b=a$

$\boxed{\text{タ}}$の解答群

⓪ $a=t^{\frac{1}{b}}$	① $a=b^{\frac{1}{t}}$	② $b=t^{\frac{1}{a}}$
③ $b=a^{\frac{1}{t}}$	④ $t=b^{\frac{1}{a}}$	⑤ $t=a^{\frac{1}{b}}$

(3) 次に，太郎さんは(2)の考察をもとにして，$t>\dfrac{1}{t}$ ……③を満たす実数 t $(t \neq 0)$ の値の範囲を求めた。

太郎さんの考察

$t>0$ ならば，③の両辺に t を掛けることにより，$t^2>1$ を得る。このような t $(t>0)$ の値の範囲は $1<t$ である。

$t<0$ ならば，③の両辺に t を掛けることにより，$t^2<1$ を得る。このような t $(t<0)$ の値の範囲は $-1<t<0$ である。

この考察により，③を満たす t $(t \neq 0)$ の値の範囲は，$-1<t<0$，$1<t$ であることがわかる。

ここで，a の値を 1 つ定めたとき，不等式 $\log_a b > \log_b a$ ……④を満たす実数 b $(b>0,\ b \neq 1)$ の値の範囲について考える。

④を満たす b の値の範囲は，$a>1$ のときは$\boxed{\text{チ}}$であり，$0<a<1$ のときは$\boxed{\text{ツ}}$である。

$\boxed{\text{チ}}$の解答群

⓪ $0<b<\dfrac{1}{a}$，$1<b<a$	① $0<b<\dfrac{1}{a}$，$a<b$
② $\dfrac{1}{a}<b<1$，$1<b<a$	③ $\dfrac{1}{a}<b<1$，$a<b$

$\boxed{\text{ツ}}$の解答群

⓪ $0<b<a$，$1<b<\dfrac{1}{a}$	① $0<b<a$，$\dfrac{1}{a}<b$
② $a<b<1$，$1<b<\dfrac{1}{a}$	③ $a<b<1$，$\dfrac{1}{a}<b$

(4) $p=\dfrac{12}{13}$，$q=\dfrac{12}{11}$，$r=\dfrac{14}{13}$ とする。次の ⓪〜③のうち正しいものは$\boxed{\text{テ}}$である。

$\boxed{\text{テ}}$の解答群

⓪ $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
① $\log_p q > \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$
② $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r > \log_r p$
③ $\log_p q < \log_q p$ かつ $\log_p r < \log_r p$

第２問

解答解説のページへ

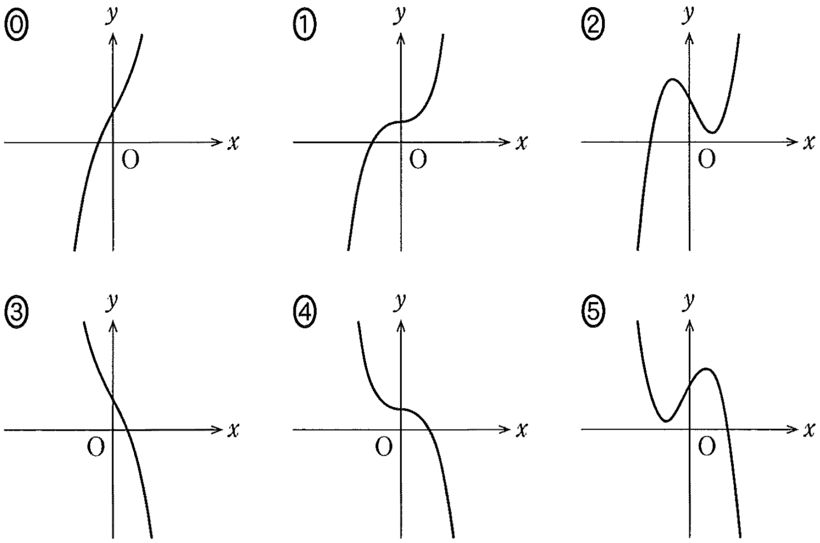
[1] a を実数とし，$f(x)=x^3-6ax+16$ とおく。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形は，

$a=0$ のとき $\boxed{\text{ア}}$，$a<0$ のとき $\boxed{\text{イ}}$

である。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。



(2) $a>0$ とし，p を実数とする。座標平面上の曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}}<p<\boxed{\text{エ}}$ である。

$p=\boxed{\text{ウ}}$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ は 2 個の共有点をもつ。それらの x 座標を q，r $(q<r)$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が点 $(r,\ p)$ で接することに注意すると，

$$q=\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\,a^{\frac{1}{2}},\quad r=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}\,a^{\frac{1}{2}}$$

と表せる。

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	① $-2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
② $4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	③ $-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$
④ $8\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$	⑤ $-8\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$

(3) 方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数を n とする。次の ⓪～⑤ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ケ}}$ と $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$の解答群（解答の順序は問わない）

⓪　$n=1$ならば$a<0$	①　$a<0$ならば$n=1$
②　$n=2$ならば$a<0$	③　$a<0$ならば$n=2$
④　$n=3$ならば$a>0$	⑤　$a>0$ならば$n=3$

[2]　$b>0$とし，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$，$h(x)=x^3-x^2+b^2$とおく。座標平面上の曲線$y=g(x)$をC_1，曲線$y=h(x)$をC_2とする。

C_1とC_2は2点で交わる。これらの交点のx座標をそれぞれα，β $(\alpha<\beta)$とすると，$\alpha=\boxed{\text{サ}}$，$\beta=\boxed{\text{シス}}$である。

$\alpha \leqq x \leqq \beta$の範囲で$C_1$と$C_2$で囲まれた図形の面積を$S$とする。また，$t>\beta$とし，$\beta \leqq x \leqq t$の範囲で$C_1$と$C_2$および直線$x=t$で囲まれた図形の面積を$T$とする。

このとき

$$S=\int_\alpha^\beta \boxed{\text{セ}}\,dx\text{，}\ T=\int_\beta^t \boxed{\text{ソ}}\,dx\text{，}\ S-T=\int_\alpha^t \boxed{\text{タ}}\,dx$$

であるので

$$S-T=\frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テ}}}\left(2t^3-\boxed{\text{ト}}\,bt^2+\boxed{\text{ナニ}}\,b^2t-\boxed{\text{ヌ}}\,b^3\right)$$

が得られる。

したがって，$S=T$となるのは$t=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}b$のときである。

$\boxed{\text{セ}}$～$\boxed{\text{タ}}$の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪　$\{g(x)+h(x)\}$	①　$\{g(x)-h(x)\}$
②　$\{h(x)-g(x)\}$	③　$\{2g(x)+2h(x)\}$
④　$\{2g(x)-2h(x)\}$	⑤　$\{2h(x)-2g(x)\}$
⑥　$2g(x)$	⑦　$2h(x)$

第３問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 8 ページの正規分布表を用いてもよい。

ジャガイモを栽培し販売している会社に勤務する花子さんは，A 地区と B 地区で収穫されるジャガイモについて調べることになった。

(1) A 地区で収穫されるジャガイモには 1 個の重さが 200g を超えるものが 25%含まれることが経験的にわかっている。花子さんは A 地区で収穫されたジャガイモから 400 個を無作為に抽出し，重さを計測した。そのうち，重さが 200g を超えるジャガイモの個数を表す確率変数を Z とする。このとき Z は二項分布 $B(400,\ 0.\boxed{アイ})$ に従うから，Z の平均(期待値)は $\boxed{ウエオ}$ である。

(2) Z を(1)の確率変数とし，A 地区で収穫されたジャガイモ 400 個からなる標本において，重さが 200g を超えていたジャガイモの標本における比率を $R=\dfrac{Z}{400}$ とする。このとき，R の標準偏差は $\sigma(R)=\boxed{カ}$ である。

標本の大きさ 400 は十分に大きいので，R は近似的に正規分布 $N\left(0.\boxed{アイ},\ \left(\boxed{カ}\right)^2\right)$ に従う。

したがって，$P(R \geqq x)=0.0465$ となるような x の値は $\boxed{キ}$ となる。ただし，$\boxed{キ}$ の計算においては $\sqrt{3}=1.73$ とする。

$\boxed{カ}$ の解答群

⓪ $\dfrac{3}{6400}$	① $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	② $\dfrac{\sqrt{3}}{80}$	③ $\dfrac{3}{40}$

$\boxed{キ}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 0.209	① 0.251	② 0.286	③ 0.395

(3) B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ 1 個の重さは 100g から 300g の間に分布している。B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモ 1 個の重さを表す確率変数を X とするとき，X は連続型確率変数であり，X のとり得る値 x の範囲は $100 \leqq x \leqq 300$ である。

花子さんは，B 地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200g 以上のものの割合を見積もりたいと考えた。そのために花子さんは，X の確率密度関数 $f(x)$ として適当な関数を定め，それを用いて割合を見積もるという方針を立てた。

B 地区で収穫され，出荷される予定のジャガイモから 206 個を無作為に抽出したところ，重さの標本平均は 180g であった。図 1 はこの標本のヒストグラムである。

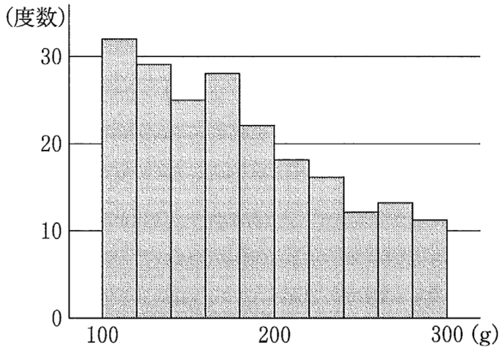


図１　ジャガイモの重さのヒストグラム

花子さんは図 1 のヒストグラムにおいて，重さ x の増加とともに度数がほぼ一定の割合で減少している傾向に着目し，X の確率密度関数 $f(x)$ として，1 次関数

$$f(x)=ax+b \quad (100 \leqq x \leqq 300)$$

を考えることにした。ただし，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ とする。

このとき，$P(100 \leqq X \leqq 300)=$ $\boxed{\text{ク}}$ であることから

$$\boxed{\text{ケ}}\cdot 10^4 a+\boxed{\text{コ}}\cdot 10^2 b=\boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

である。

花子さんは，X の平均(期待値)が重さの標本平均 180g と等しくなるように確率密度関数を定める方法を用いることにした。

連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $100 \leqq x \leqq 300$ で，その確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均(期待値) m は

$$m=\int_{100}^{300} xf(x)\,dx$$

で定義される。この定義と花子さんの採用した方法から

$$m=\frac{26}{3}\cdot 10^6 a+4\cdot 10^4 b=180 \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

となる。①と②により，確率密度関数は

$$f(x)=-\boxed{\text{サ}}\cdot 10^{-5} x+\boxed{\text{シス}}\cdot 10^{-3} \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

と得られる。このようにして得られた③の $f(x)$ は，$100 \leqq x \leqq 300$ の範囲で $f(x) \geqq 0$ を満たしており，確かに確率密度関数として適当である。

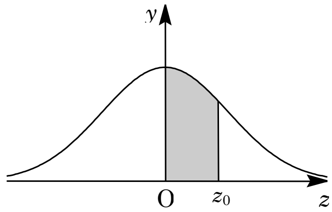
したがって，この花子さんの方針に基づくと，B 地区で収穫され，出荷される予定のすべてのジャガイモのうち，重さが 200g 以上のものは $\boxed{\text{セ}}$ ％あると見積もることができる。

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪　33	①　34	②　35	③　36

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第４問

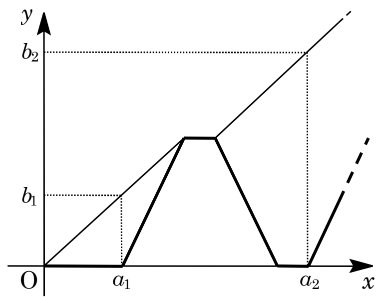
解答解説のページへ

以下のように，歩行者と自転車が自宅を出発して移動と停止を繰り返している。歩行者と自転車の動きについて，数学的に考えてみよう。

自宅を原点とする数直線を考え，歩行者と自転車をその数直線上を動く点とみなす。数直線上の点の座標が y であるとき，その点は位置 y にあるということにする。また，歩行者が自宅を出発してから x 分経過した時点を時刻 x と表す。歩行者は時刻 0 に自宅を出発し，正の向きに毎分 1 の速さで歩き始める。自転車は時刻 2 に自宅を出発し，毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。自転車が歩行者に追いつくと，歩行者と自転車はともに 1 分だけ停止する。その後，歩行者は再び正の向きに毎分 1 の速さで歩き出し，自転車は毎分 2 の速さで自宅に戻る。自転車は自宅に到着すると，1 分だけ停止した後，再び毎分 2 の速さで歩行者を追いかける。これを繰り返し，自転車は自宅と歩行者の間を往復する。

$x = a_n$ を自転車が n 回目に自宅を出発する時刻とし，$y = b_n$ をそのときの歩行者の位置とする。

(1) 花子さんと太郎さんは，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めるために，歩行者と自転車について，時刻 x において位置 y にいることを O を原点とする座標平面上の点 $(x,\ y)$ で表すことにした。



$a_1 = 2$，$b_1 = 2$ により，自転車が最初に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(2,\ 0)$ であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(2,\ 2)$ である。また，自転車が最初に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は $(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{ア}})$ である。よって，$a_2 = \boxed{\text{イ}}$，$b_2 = \boxed{\text{ウ}}$ である。

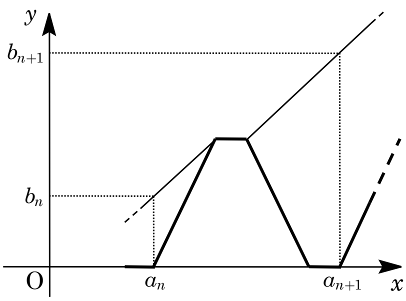
花子：数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項について考える前に，$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{ア}})$ の求め方について整理してみようか。

太郎：花子さんはどうやって求めたの？

花子：自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が 1 分間に 1 ずつ縮まっていくことを利用したよ。

太郎：歩行者と自転車の動きをそれぞれ直線の方程式で表して，交点を計算して求めることもできるね。

自転車が n 回目に自宅を出発するときの時刻と自転車の位置を表す点の座標は $(a_n,\ 0)$ であり，そのときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(a_n,\ b_n)$ である。よって，n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの時刻と位置を表す点の座標は，a_n，b_n を用いて，($\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$) と表せる。



$\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ a_n	① b_n	② $2a_n$
③ a_n+b_n	④ $2b_n$	⑤ $3a_n$
⑥ $2a_n+b_n$	⑦ a_n+2b_n	⑧ $3b_n$

以上から，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，自然数 n に対して，関係式

$$a_{n+1}=a_n+\boxed{カ}\,b_n+\boxed{キ}\ \cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=3b_n+\boxed{ク}\ \cdots\cdots②$$

が成り立つことがわかる。

まず，$b_1=2$ と②から，$b_n=\boxed{ケ}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を得る。この結果と，$a_1=2$ および①から，$a_n=\boxed{コ}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がわかる。

$\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $3^{n-1}+1$	① $\frac{1}{2}\cdot 3^n+\frac{1}{2}$
② $3^{n-1}+n$	③ $\frac{1}{2}\cdot 3^n+n-\frac{1}{2}$
④ $3^{n-1}+n^2$	⑤ $\frac{1}{2}\cdot 3^n+n^2-\frac{1}{2}$
⑥ $2\cdot 3^{n-1}$	⑦ $\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}$
⑧ $2\cdot 3^{n-1}+n-1$	⑨ $\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\frac{3}{2}$
ⓐ $2\cdot 3^{n-1}+n^2-1$	ⓑ $\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n^2-\frac{3}{2}$

(2) 歩行者が $y=300$ の位置に到着するときまでに，自転車が歩行者に追いつく回数は $\boxed{サ}$ 回である。また，$\boxed{サ}$ 回目に自転車が歩行者に追いつく時刻は，$x=\boxed{シスセ}$ である。

第5問

解答解説のページへ

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円周上に，3 点 A，B，C があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{2}{3}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。t を $0<t<1$ を満たす実数とし，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P とする。また，直線 OP 上に点 Q をとる。

(1) $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウ}}$ である。

また，実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と表せる。したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{エ}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{オ}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots①,\quad \overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\boxed{カ}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\boxed{キ}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

となる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直になるのは，$t=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ のときである。

$\boxed{エ}$～$\boxed{キ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ kt	① $(k-kt)$	② $(kt+1)$
③ $(kt-1)$	④ $(k-kt+1)$	⑤ $(k-kt-1)$

以下，$t\neq\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ とし，$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であるとする。

(2) $\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であることにより，(1)の k は $k=\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}\,t-\boxed{シ}}$ ……②となることがわかる。

平面から直線 OA を除いた部分は，直線 OA を境に 2 つの部分に分けられる。そのうち，点 B を含む部分を D_1，含まない部分を D_2 とする。また，平面から直線 OB を除いた部分は，直線 OB を境に 2 つの部分に分けられる。そのうち，点 A を含む部分を E_1，含まない部分を E_2 とする。

・$0<t<\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ ならば，点 Q は $\boxed{ス}$。

・$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}<t<1$ ならば，点 Q は $\boxed{セ}$。

$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
① D_1 に含まれ，かつ E_2 に含まれる
② D_2 に含まれ，かつ E_1 に含まれる
③ D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる

(3) 太郎さんと花子さんは，点 P の位置と $|\overrightarrow{OQ}|$ の関係について考えている。

$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，①と②により，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ とわかる。

太郎：$t\neq\dfrac{1}{2}$ のときにも，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる場合があるかな。

花子：$|\overrightarrow{OQ}|$ を t を用いて表して，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ を満たす t の値について考えればいいと思うよ。

太郎：計算が大変そうだね。

花子：直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R としたら，$|\overrightarrow{OR}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となるよ。

太郎：$\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表すことができれば，t の値が求められそうだね。

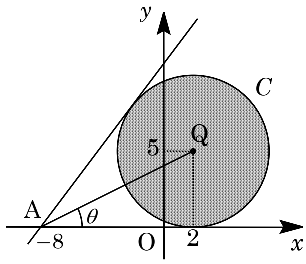
直線 OA に関して，$t=\dfrac{1}{2}$ のときの点 Q と対称な点を R とすると

$$\overrightarrow{CR}=\boxed{\text{タ}}\,\overrightarrow{CQ}=\boxed{\text{チ}}\,\overrightarrow{OA}+\boxed{\text{ツ}}\,\overrightarrow{OB}$$

となる。$t\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ となる t の値は $\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

第１問

問題のページへ



[1] (1) $D: x^2+y^2-4x-10y+4 \leqq 0$ に対して,

$(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 5^2$

すると, 領域 D は, 中心が点Q$(2,\ 5)$, 半径が 5 の円の周および内部である。

(2) A$(-8,\ 0)$, $C: x^2+y^2-4x-10y+4=0$ ……①とすると, 点Aを通る C の接線は, 1つが $y=0$ である。

ここで, 点 A を通る直線を $l: y=k(x+8)$ ……②とおき, ②を①に代入した $(k^2+1)x^2+(16k^2-10k-4)x+64k^2-80k+4=0$ が重解をもつ条件で, もう1つの接線の傾き k の値が求められる。

また, x 軸と直線AQのなす角を $\theta\left(0<\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると,

$$\tan\theta=\frac{5}{2-(-8)}=\frac{1}{2}$$

この値を用いると, もう1つの接線の傾き k_0 は, $\tan 2\theta$ と表せるので,

$$k_0=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

そして, 直線 l と領域 D が共有点をもつ k の値の範囲は $0 \leqq k \leqq k_0$ となる。

[2] (1) $\log_3 9=\log_3 3^2=2$, $\log_9 3=\dfrac{1}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}$ となり, $\log_3 9>\log_9 3$ である。

また, $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}=(2^{-2})^{-\frac{3}{2}}=2^3=8$ から, $\log_{\frac{1}{4}} 8=-\dfrac{3}{2}$, $\log_8 \dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{4}} 8}=-\dfrac{2}{3}$ となるので, $\log_{\frac{1}{4}} 8<\log_8 \dfrac{1}{4}$ である。

(2) $a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $b \neq 1$ のとき, $\log_a b=t$ ……①とおくと, $a^t=b$ から $a=b^{\frac{1}{t}}$ であるので, $\log_b a=\dfrac{1}{t}$ ……②となる。

(3) $t>\dfrac{1}{t}$ ……③を満たす実数 $t\ (t \neq 0)$ の値の範囲は,

・$t>0$ のとき ③より $t^2>1$ となり, $(t+1)(t-1)>0$ から $1<t$

・$t<0$ のとき ③より $t^2<1$ となり, $(t+1)(t-1)<0$ から $-1<t<0$

よって, ③を満たす t の範囲は, $-1<t<0$, $1<t$ ……④

ここで, 不等式 $\log_a b>\log_b a$ ……④は, ①②と置き換えると③となり, ④の値の範囲を用いると,

$$-1<\log_a b<0,\ 1<\log_a b$$

(i)　$a>1$ のとき　$a^{-1}<b<a^0$，$a^1<b$ から，$\dfrac{1}{a}<b<1$，$a<b$

(ii)　$0<a<1$ のとき　$a^{-1}>b>a^0$，$a^1>b$ から，$0<b<a$，$1<b<\dfrac{1}{a}$

(4)　まず，$p=\dfrac{12}{13}$，$q=\dfrac{12}{11}$ のとき，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{13}{12}$ なので $\dfrac{13}{12}<\dfrac{12}{11}$ が成り立ち，

$$0<p<1,\ 1<\frac{1}{p}<q$$

また，$p=\dfrac{12}{13}$，$r=\dfrac{14}{13}$ のとき，$\dfrac{14}{13}<\dfrac{13}{12}$ が成り立ち，

$$0<p<1,\ 1<r<\frac{1}{p}$$

すると，(3)(ii)の結果より，$\log_p q<\log_q p$ かつ $\log_p r>\log_r p$ である。

［解　説］

[1]は円と直線の関係の基本題です。(2)では 2 つ方針が示されていますが，どちらを採用するかは明らかでしょう。[2]は対数計算についての基本題です。(3)までは誘導が丁寧すぎるほどですが，(4)は冷静にならないとミスをしてしまいます。

第２問

問題のページへ

[1]　$f(x)=x^3-6ax+16$ に対して，$f'(x)=3x^2-6a$

(1)　$a=0$ のとき，$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ (等号は $x=0$ のとき)から，グラフは ① となる。

$a<0$ のとき，$f'(x)=3x^2-6a>0$ から，グラフは ⓪ となる。

(2)　$a>0$ のとき，$f'(x)=3x^2-6a=3(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\sqrt{2a})=2a\sqrt{2a}-6a\sqrt{2a}+16$$
$$=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$$
$$f(-\sqrt{2a})=4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$$

これより，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=p$ が 3 個の共有点をもつような p の値の範囲は，$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16<p<4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$ である。

$p=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$ のとき，$f(x)=p$ とすると $x^3-6ax+16=-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}+16$ から，

$$x^3-6ax+4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}=0,\ \left(x-\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x+2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}\right)=0$$

共有点を $x=q,\ r\ (q<r)$ とすると，$q=-2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$，$r=\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$ である。

(3)　$f(x)=0$ の異なる実数解の個数を n とすると，$a\leqq 0$ のとき $n=1$ であり，$a>0$ のとき $n=1$ または $n=2$ または $n=3$ である。

これより，正しいものは「$a<0$ ならば $n=1$」，「$n=3$ ならば $a>0$」である。

[2]　$b>0$ で，$g(x)=x^3-3bx+3b^2$，$h(x)=x^3-x^2+b^2$ として，曲線 $C_1: y=g(x)$，$C_2: y=h(x)$ とおく。

C_1 と C_2 の交点は，$g(x)=h(x)$ より $x^3-3bx+3b^2=x^3-x^2+b^2$ となり，

$$x^2-3bx+2b^2=0,\ (x-b)(x-2b)=0$$

$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$\alpha=b$，$\beta=2b$ である。

さて，$b\leqq x\leqq 2b$ の範囲で C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，$g(x)\leqq h(x)$ から，

$$S=\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx$$

また，$t>2b$ とし，$2b\leqq x\leqq t$ の範囲で C_1 と C_2 および直線 $x=t$ で囲まれた図形の面積 T は，$g(x)\geqq h(x)$ から，

$$T=\int_{2b}^{t}\{g(x)-h(x)\}dx$$

すると，$S-T=\displaystyle\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx-\int_{2b}^{t}\{g(x)-h(x)\}dx$ となり，

$$S-T=\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx+\int_{2b}^{t}\{h(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_b^{t}\{h(x)-g(x)\}dx=-\int_b^{t}(x^2-3bx+2b^2)dx$$
$$=-\Big[\frac{x^3}{3}-\frac{3b}{2}x^2+2b^2x\Big]_b^t=-\frac{1}{3}(t^3-b^3)+\frac{3b}{2}(t^2-b^2)-2b^2(t-b)$$
$$=-\frac{1}{6}\{(2t^3-2b^3)-9b(t^2-b^2)+12b^2(t-b)\}$$
$$=-\frac{1}{6}(2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3)$$

したがって，$S=T$ $(S-T=0)$ となるのは，$2t^3-9bt^2+12b^2t-5b^3=0$ のときで，

$$(t-b)^2(2t-5b)=0$$

$t>2b$ から，$t=\frac{5}{2}b$ のときである。

［解 説］

[1]は微分の方程式への応用，[2]は定積分と面積を題材にしたともに標準的な頻出題です。計算も難しくはありません。

第３問

問題のページへ

(1) 200g を超えるものが 25%含まれる A 地区のジャガイモから, 400 個を無作為に抽出したとき, 200g を超えるものの個数を表す確率変数 Z は, 二項分布 $B(400,\ 0.25)$ に従うので, Z の平均は $E(Z)=400\times0.25=100$ である。

(2) $R=\dfrac{Z}{400}$ とするとき, $E(R)=\dfrac{E(Z)}{400}=0.25$ となり,

$$V(R)=\frac{V(Z)}{400^2}=\frac{400\times0.25\times(1-0.25)}{400^2}=\frac{1}{400}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{6400}$$

$$\sigma(R)=\sqrt{V(R)}=\sqrt{\frac{3}{6400}}=\frac{\sqrt{3}}{80}$$

さて, 400 は十分に大きいので, R は近似的に正規分布 $N\left(0.25,\ \left(\dfrac{\sqrt{3}}{80}\right)^2\right)$ に従い, $Y=\dfrac{R-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}$ とおくと, Y は $N(0,\ 1)$ に従う。

すると, $P(R\geqq x)=0.0465$ となるのは, $R\geqq x$ が $Y\geqq\dfrac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}$ に対応し, さらに $P(0\leqq Y\leqq1.68)=0.5-0.0465=0.4535$ から, $P(Y\geqq1.68)=0.0465$ なので,

$$\frac{x-0.25}{\frac{\sqrt{3}}{80}}=1.68,\quad x=0.25+1.68\times\frac{\sqrt{3}}{80}=0.25+1.68\times\frac{1.73}{80}\fallingdotseq0.286$$

(3) 100g から 300g の間に分布している B 地区のジャガイモ 1 個の重さを表す確率変数を X とおき, X の確率密度関数 $f(x)$ として,

$$f(x)=ax+b\quad(100\leqq x\leqq300)$$

このとき, $P(100\leqq X\leqq300)=1$ なので, $\displaystyle\int_{100}^{300}f(x)dx=1$ から,

$$\int_{100}^{300}(ax+b)dx=\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{10^2}^{3\cdot10^2}=1$$

すると, $\dfrac{a}{2}(9\cdot10^4-10^4)+b(3\cdot10^2-10^2)=1$ より, $4\cdot10^4a+2\cdot10^2b=1$ ………①

また, X の平均 m は $m=\displaystyle\int_{100}^{300}xf(x)dx$ から,

$$m=\int_{100}^{300}(ax^2+bx)dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2\right]_{10^2}^{3\cdot10^2}$$

$$=\frac{a}{3}(27\cdot10^6-10^6)+\frac{b}{2}(9\cdot10^4-10^4)=\frac{26}{3}\cdot10^6a+4\cdot10^4b$$

$m=180$ とすると, $\dfrac{26}{3}\cdot10^6a+4\cdot10^4b=180$ ………②

①②より, $\left(\dfrac{26}{3}-8\right)\cdot10^6a=180-200$ となり, $\dfrac{2}{3}\cdot10^6a=-20$ から,

$$a=-30\cdot10^{-6}=-3\cdot10^{-5}$$

①より，$2\cdot10^2b=1+12\cdot10^{-1}=2.2$ となり，$b=1.1\cdot10^{-2}=11\cdot10^{-3}$

$$f(x)=-3\cdot10^{-5}x+11\cdot10^{-3}\quad(100\leqq x\leqq300)$$

すると，$X\geqq200$ の割合は,

$$\begin{aligned}P(200\leqq X\leqq300)&=\int_{200}^{300}f(x)dx=\int_{200}^{300}(ax+b)dx=\left[\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{2\cdot10^2}^{3\cdot10^2}\\&=\frac{a}{2}(9\cdot10^4-4\cdot10^4)+b(3\cdot10^2-2\cdot10^2)\\&=-\frac{3\cdot10^{-5}}{2}\cdot5\cdot10^4+11\cdot10^{-3}\cdot10^2=-\frac{15}{2}\cdot10^{-1}+11\cdot10^{-1}\\&=-0.75+1.1=0.35\end{aligned}$$

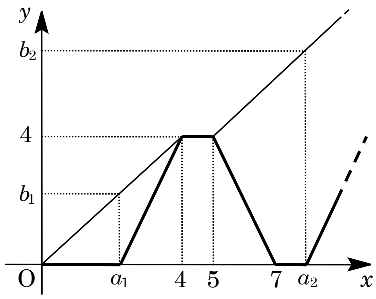
よって，重さが 200g 以上のものは 35%あると見積もることができる。

［解 説］

確率分布についての標準的な問題です。ただ，(3)は数値計算がやや難です。

第４問

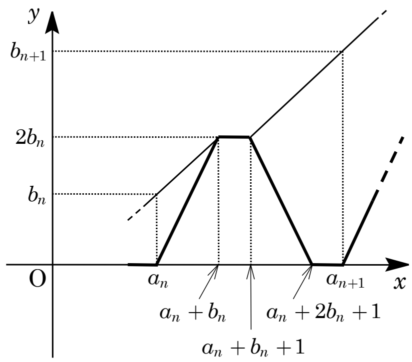
問題のページへ



(1) 題意の歩行者と自転車の移動について，自転車が n 回目に自宅を出発する時刻を $x=a_n$，そのときの歩行者の位置を $y=b_n$ とする。

さて，自転車が１回目に自宅を出発するときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標 $(a_1,\ b_1)$ は $(2,\ 2)$ となる。自転車が歩行者を追いかけるときに，間隔が１分間に $2-1=1$ ずつ縮まっていくことを利用すると，自転車が最初に歩行者に追いつく時刻は $a_1+\dfrac{b_1}{2-1}=2+2=4$，位置は $b_1+1\cdot(4-a_1)=2+4-2=4$ から，対応する点の座標は $(4,\ 4)$ であり，

$$a_2=4+\{1+(4-a_1)+1\}=8,\quad b_2=4+1\cdot\{a_2-(4+1)\}=7$$



また，自転車が n 回目に自宅を出発するときの時刻と歩行者の位置を表す点の座標は $(a_n,\ b_n)$ である。すると，n 回目に自宅を出発した自転車が次に歩行者に追いつくときの時刻は $a_n+\dfrac{b_n}{2-1}=a_n+b_n$，位置は $b_n+1\cdot b_n=2b_n$ から，対応する点の座標は $(a_n+b_n,\ 2b_n)$ となり，

$$a_{n+1}=a_n+b_n+\{1+(a_n+b_n-a_n)+1\}$$
$$=a_n+2b_n+2\cdots\cdots\cdots①$$
$$b_{n+1}=2b_n+1\cdot\{a_{n+1}-(a_n+b_n+1)\}=2b_n+\{(2b_n+2)-b_n-1\}$$
$$=3b_n+1\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\left(b_n+\dfrac{1}{2}\right)$ となり，$b_1=2$ から，

$$b_n+\frac{1}{2}=\left(b_1+\frac{1}{2}\right)\cdot3^{n-1}=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1},\quad b_n=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}-\frac{1}{2}$$

①に代入すると $a_{n+1}=a_n+5\cdot3^{n-1}+1$ となり，$a_1=2$ から，$n\geqq2$ において，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot3^{k-1}+1)=2+5\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}+(n-1)=\frac{5}{2}(3^{n-1}-1)+n+1$$
$$=\frac{5}{2}\cdot3^{n-1}+n-\frac{3}{2}$$ （この式は $n=1$ のときも成立している）

(2) n 回目に自転車が歩行者に追いつく位置は $y=2b_n$ なので，$y=300$ の位置に到着するときまでに追いつくのは，$2b_n\leqq300<2b_{n+1}$ とおくと，

$$5\cdot3^{n-1}-1\leqq300<5\cdot3^n-1,\quad 3^{n-1}\leqq\frac{301}{5}<3^n\cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす n は $n=4$ となり，追いつく回数は４回である。

また，4 回目に追いつく時刻は，

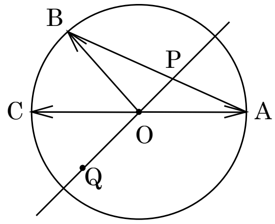
$$a_4+b_4=\left(\frac{5}{2}\cdot 3^3+4-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\cdot 3^3-\frac{1}{2}\right)=5\cdot 3^3+2=137$$

［解 説］

漸化式の応用問題です。問題文は長いのですが，同じことがグラフで示されているため，それを読み取れば処理を進めることができます。ただ，気になるのは，設定されている状況がギャグマンガのような……。

第５問

問題のページへ



(1) 平面上に 3 点 A, B, C があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-\dfrac{2}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たしている。このとき，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}=-\frac{2}{3}$$

また，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を P とし，直線 OP 上に点 Q をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}=(k-kt)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-(-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=(k-kt+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+kt\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots②$$

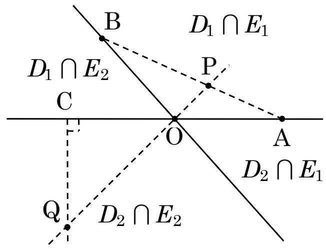
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が垂直になるのは，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ から，$(1-t)\cdot1^2+t\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)=0$ となり，

$$1-\frac{5}{3}t=0,\ t=\frac{3}{5}$$

(2) $t\neq\dfrac{3}{5}$ のもとで，$\angle\mathrm{OCQ}$ が直角であることにより，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$

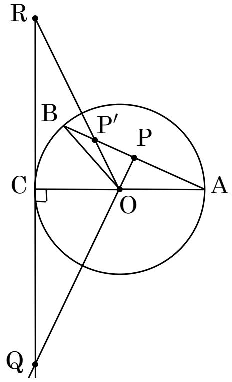
$$(k-kt+1)\cdot1^2+kt\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=0,\ \left(1-\frac{5}{3}t\right)k+1=0$$

よって，$(3-5t)k+3=0$ から $k=\dfrac{3}{5t-3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{3}{5t-3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ である。



さて，平面を直線 OA と直線 OB を境にして 4 つの部分に分けて，4 つの領域を右図のように $D_1\cap E_1$，$D_1\cap E_2$，$D_2\cap E_2$，$D_2\cap E_1$ とする。

- $0<t<\dfrac{3}{5}$ ならば，$k<0$ より，点 Q は $D_2\cap E_2$，すなわち D_2 に含まれ，かつ E_2 に含まれる。
- $\dfrac{3}{5}<t<1$ ならば，$k>0$ より，点 Q は $D_1\cap E_1$，すなわち D_1 に含まれ，かつ E_1 に含まれる。



(3) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$，$k=\dfrac{3}{\dfrac{5}{2}-3}=-6$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-6\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-6\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=-3(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

これより，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|-3|\sqrt{1^2+2\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right)+1^2}=3\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\sqrt{6}$

ここで，直線 OA に関して，点 Q と対称な点を R とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\sqrt{6}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CR}}=-\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

ここで，線分 AB と OR の交点を P' とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=4\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$$

すると，点 P' は線分 AB を $3:1$ に内分するので，$t\neq\dfrac{1}{2}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\sqrt{6}$ となる t の値は $\dfrac{3}{4}$ である。

［解 説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧に付いているので，それに従えば，最後の結論まで導けます。