第１問

解答解説のページへ

[1]　(1)　$\log_{10} 10 = \boxed{\text{ア}}$ である。また，$\log_{10} 5$，$\log_{10} 15$ をそれぞれ $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ を用いて表すと

$$\log_{10} 5 = \boxed{\text{イ}}\log_{10} 2 + \boxed{\text{ウ}},\quad \log_{10} 15 = \boxed{\text{エ}}\log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \boxed{\text{オ}}$$

となる。

(2)　太郎さんと花子さんは，15^{20} について話している。

以下では，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

太郎：15^{20} は何桁の数だろう。
花子：15 の 20 乗を求めるのは大変だね。$\log_{10} 15^{20}$ の整数部分に着目してみようよ。

$\log_{10} 15^{20}$ は，$\boxed{\text{カキ}} < \log_{10} 15^{20} < \boxed{\text{カキ}} + 1$ を満たす。よって，15^{20} は $\boxed{\text{クケ}}$ 桁の数である。

太郎：15^{20} の最高位の数字も知りたいね。だけど，$\log_{10} 15^{20}$ の整数部分にだけ着目してもわからないな。
花子：$N\cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}} < 15^{20} < (N+1)\cdot 10^{\boxed{\text{カキ}}}$ を満たすような正の整数 N に着目してみたらどうかな。

$\log_{10} 15^{20}$ の小数部分は $\log_{10} 15^{20} - \boxed{\text{カキ}}$ であり

$$\log_{10} \boxed{\text{コ}} < \log_{10} 15^{20} - \boxed{\text{カキ}} < \log_{10}\left(\boxed{\text{コ}} + 1\right)$$

が成り立つので，15^{20} の最高位の数字は $\boxed{\text{サ}}$ である。

[2]　座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上に 3 点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ がある。ただし，$0 \leqq \theta < \alpha < \beta < 2\pi$ とする。このとき，s と t を次のように定める。

$$s = \cos\theta + \cos\alpha + \cos\beta,\quad t = \sin\theta + \sin\alpha + \sin\beta$$

(1)　△PQR が正三角形や二等辺三角形のときの s と t の値について考察しよう。

考察１

△PQR が正三角形である場合を考える。

この場合，α，β を θ で表すと，$\alpha = \theta + \dfrac{\boxed{ア}}{3}\pi$，$\beta = \theta + \dfrac{\boxed{イ}}{3}\pi$ であり，加法定理により，$\cos\alpha = \boxed{ウ}$，$\sin\alpha = \boxed{エ}$ である。同様に，$\cos\beta$，$\sin\beta$ を，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を用いて表すことができる。

これらのことから，$s = t = \boxed{オ}$ である。

$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	① $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta$
② $\dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	③ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta$
④ $-\dfrac{1}{2}\sin\theta + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑤ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\cos\theta$
⑥ $-\dfrac{1}{2}\sin\theta - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$	⑦ $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \dfrac{1}{2}\cos\theta$

考察２

△PQR が PQ＝PR となる二等辺三角形である場合を考える。

例えば，点 P が直線 $y = x$ 上にあり，点 Q，R が直線 $y = x$ に関して対称であるときを考える。このとき，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ である。また，α は $\alpha < \dfrac{5}{4}\pi$，β は $\dfrac{5}{4}\pi < \beta$ を満たし，点 Q, R の座標について，$\sin\beta = \cos\alpha$，$\cos\beta = \sin\alpha$ が成り立つ。よって，

$$s = t = \frac{\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}} + \sin\alpha + \cos\alpha$$

である。

ここで，三角関数の合成により，$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{\boxed{ク}}\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{\boxed{ケ}}\right)$ である。したがって，$\alpha = \dfrac{\boxed{コサ}}{12}\pi$，$\beta = \dfrac{\boxed{シス}}{12}\pi$ のとき，$s = t = 0$ である。

(2) 次に，s と t の値を定めたときの θ，α，β の関係について考察しよう。

考察３

$s=t=0$ の場合を考える。

この場合，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ により，α と β について考えると

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$$

である。

同様に，θ と α について考えると，$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であるから，

θ，α，β の範囲に注意すると，$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\pi$ という関係が得られる。

(3) これまでの考察を振り返ると，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{テ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{テ}}$ の解答群

⓪ △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば△PQR は正三角形である。

① △PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であるが，$s=t=0$ であっても△PQR が正三角形でない場合がある。

② △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があるが，$s=t=0$ ならば△PQR は正三角形である。

③ △PQR が正三角形であっても $s=t=0$ でない場合があり，$s=t=0$ であっても△PQR が正三角形でない場合がある。

第２問

解答解説のページへ

[1]　a を実数とし，$f(x)=(x-a)(x-2)$ とおく。また，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ とする。

(1)　$a=1$ のとき，$F(x)$ は $x=$ $\boxed{ア}$ で極小になる。

(2)　$a=$ $\boxed{イ}$ のとき，$F(x)$ はつねに増加する。また，$F(0)=$ $\boxed{ウ}$ であるから，$a=$ $\boxed{イ}$ のとき，$F(2)$ の値は $\boxed{\boxed{エ}}$ である。

$\boxed{\boxed{エ}}$ の解答群

⓪　0	①　正	②　負

(3)　$a>$ $\boxed{イ}$ とする。b を実数とし，$G(x)=\int_b^x f(t)dt$ とおく。

関数 $y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを $\boxed{\boxed{オ}}$ 方向に $\boxed{\boxed{カ}}$ だけ平行移動したものと一致する。また，$G(x)$ は $x=$ $\boxed{キ}$ で極大になり，$x=$ $\boxed{ク}$ で極小になる。

$G(b)=$ $\boxed{ケ}$ であるから，$b=$ $\boxed{キ}$ のとき，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は $\boxed{コ}$ 個である。

$\boxed{\boxed{オ}}$ の解答群

⓪　x 軸	①　y 軸

$\boxed{\boxed{カ}}$ の解答群

⓪　b	①　$-b$	②　$F(b)$
③　$-F(b)$	④　$F(-b)$	⑤　$-F(-b)$

[2]　$g(x)=|x|(x+1)$ とおく。

点 P$(-1,\ 0)$ を通り，傾きが c の直線を l とする。$g'(-1)=\boxed{\text{ア}}$ であるから，$0<c<\boxed{\text{ア}}$ のとき，曲線 $y=g(x)$ と直線 l は 3 点で交わる。そのうちの 1 点は P であり，残りの 2 点を点 P に近い方から順に Q, R とすると，点 Q の x 座標は $\boxed{\text{イウ}}$ であり，点 R の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である。

また，$0<c<\boxed{\text{ア}}$ のとき，線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を S とし，線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$S=\frac{\boxed{\text{オ}}\,c^3+\boxed{\text{カ}}\,c^2-\boxed{\text{キ}}\,c+1}{\boxed{\text{ク}}},\quad T=c^{\boxed{\text{ケ}}}$$

である。

第3問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 8 ページの正規分布表を用いてもよい。

ある大学には，多くの留学生が在籍している。この大学の留学生に対して学習や生活を支援する留学生センターでは，留学生の日本語の学習状況について関心を寄せている。

(1) この大学では，留学生に対する授業として，以下に示す 3 つの日本語学習コースがある。

初級コース：1 週間に 10 時間の日本語の授業を行う

中級コース：1 週間に 8 時間の日本語の授業を行う

上級コース：1 週間に 6 時間の日本語の授業を行う

すべての留学生が 3 つのコースのうち，いずれか 1 つのコースのみに登録することになっている。留学生全体における各コースに登録した留学生の割合はそれぞれ

初級コース：20%，中級コース：35%，上級コース：$\boxed{\text{アイ}}$%

であった。ただし，数値はすべて正確な値であり，四捨五入されていないものとする。

この留学生の集団において，1 人を無作為に抽出したとき，その留学生が 1 週間に受講する日本語学習コースの授業の時間数を表す確率変数を X とする。X の平均(期待値)は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{2}$ であり，X の分散は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{20}$ である。

次に，留学生全体を母集団とし，a 人を無作為に抽出したとき，初級コースに登録した人数を表す確率変数を Y とすると，Y は二項分布に従う。このとき，Y の平均 $E(Y)$ は，$E(Y)=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

また，上級コースに登録した人数を表す確率変数を Z とすると，Z は二項分布に従う。Y, Z の標準偏差をそれぞれ $\sigma(Y)$，$\sigma(Z)$ とすると，

$$\frac{\sigma(Z)}{\sigma(Y)}=\frac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コサ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$$ である。

ここで，$a=100$ としたとき，無作為に抽出された留学生のうち，初級コースに登録した留学生が 28 人以上となる確率を p とする。$a=100$ は十分大きいので，Y は近似的に正規分布に従う。このことを用いて p の近似値を求めると，$p=\boxed{\text{ス}}$ である。

$\boxed{\text{ス}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 0.002	① 0.023	② 0.228
③ 0.447	④ 0.480	⑤ 0.977

(2) 40 人の留学生を無作為に抽出し，ある 1 週間における留学生の日本語学習コース以外の日本語の学習時間(分)を調査した。ただし，日本語の学習時間は母平均 m，母分散 σ^2 の分布に従うものとする。

母分散 σ^2 を 640 と仮定すると，標本平均の標準偏差は $\boxed{\text{セ}}$ となる。調査の結果，40 人の学習時間の平均値は 120 であった。標本平均が近似的に正規分布に従うとして，母平均 m に対する信頼度 95％の信頼区間を $C_1 \leqq m \leqq C_2$ とすると

$$C_1 = \boxed{\text{ソタチ}}.\boxed{\text{ツテ}},\quad C_2 = \boxed{\text{トナニ}}.\boxed{\text{ヌネ}}$$

である。

(3) (2)の調査とは別に，日本語の学習時間を再度調査することになった。そこで，50 人の留学生を無作為に抽出し，調査した結果，学習時間の平均値は 120 であった。

母分散 σ^2 を 640 と仮定したとき，母平均 m に対する信頼度 95％の信頼区間を $D_1 \leqq m \leqq D_2$ とすると，$\boxed{\text{ノ}}$ が成り立つ。

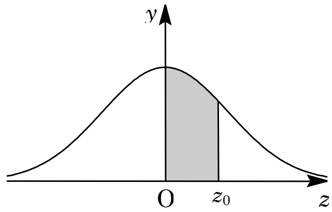
一方，母分散 σ^2 を 960 と仮定したとき，母平均 m に対する信頼度 95％の信頼区間を $E_1 \leqq m \leqq E_2$ とする。このとき，$D_2 - D_1 = E_2 - E_1$ となるためには，標本の大きさを 50 の $\boxed{\text{ハ}}.\boxed{\text{ヒ}}$ 倍にする必要がある。

$\boxed{\text{ノ}}$ の解答群

⓪ $D_1 < C_1$ かつ $D_2 < C_2$	① $D_1 < C_1$ かつ $D_2 > C_2$
② $D_1 > C_1$ かつ $D_2 < C_2$	③ $D_1 > C_1$ かつ $D_2 > C_2$

正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第４問

解答解説のページへ

[1]　自然数 n に対して，$S_n=5^n-1$ とする。さらに，数列$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和がS_n であるとする。このとき，$a_1=\boxed{\text{ア}}$である。また，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\boxed{\text{イ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{n-1}$$

である。この式は$n=1$のときも成り立つ。

上で求めたことから，すべての自然数 n に対して

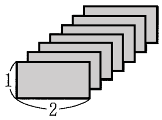
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}\left(1-\boxed{\text{キ}}^{-n}\right)$$

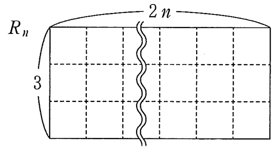
が成り立つことがわかる。

[2]　太郎さんは和室の畳を見て，畳の敷き方が何通りあるかに興味をもった。ちょうど手元にタイルがあったので，畳をタイルに置き換えて，数学的に考えることにした。

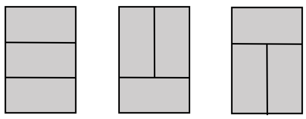
縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形のタイルが多数ある。それらを縦か横の向きに，隙間も重なりもなく敷き詰めるとき，その敷き詰め方をタイルの「配置」と呼ぶ。

右の図のように，縦の長さが 3，横の長さが $2n$ の長方形を R_n とする。$3n$ 枚のタイルを用いた R_n 内の配置の総数を r_n とする。

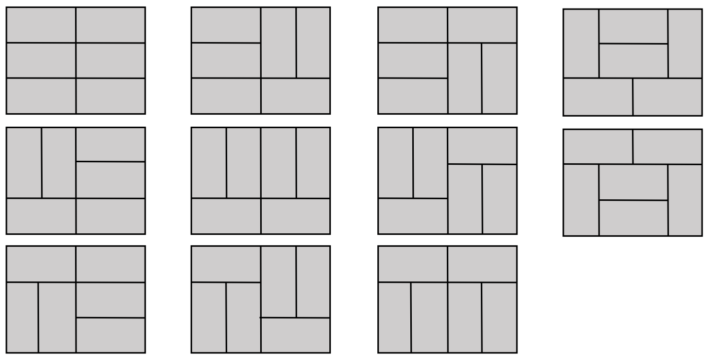




$n=1$ のときは，下の図のように $r_1=3$ である。



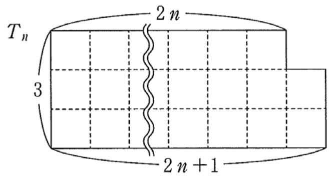
また，$n=2$ のときは，下の図のように $r_2=11$ である。

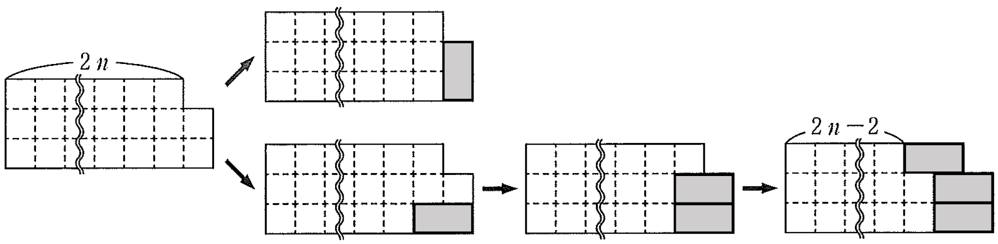


(1)　太郎さんは右のような図形 T_n 内の配置を考えた。

$(3n+1)$ 枚のタイルを用いた T_n 内の配置の総数を t_n とする。$n=1$ のときは，$t_1=\boxed{\text{ア}}$ である。

さらに，太郎さんは T_n 内の配置について，右下隅のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。

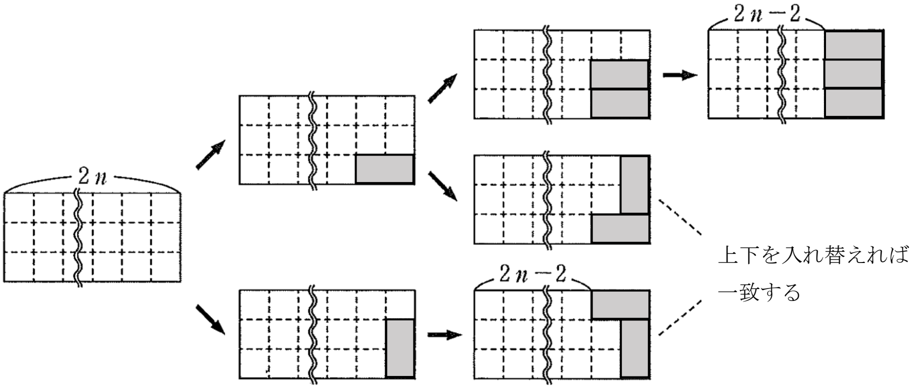




この図から，2 以上の自然数 n に対して，$t_n = Ar_n + Bt_{n-1}$ が成り立つことがわかる。ただし，$A =$ $\boxed{\text{イ}}$，$B =$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

以上から，$t_1 =$ $\boxed{\text{エオ}}$ であることがわかる。

同様に，R_n の右下隅のタイルに注目して次のような図をかいて考えた。



この図から，2 以上の自然数 n に対して，$r_n = Cr_{n-1} + Dt_{n-1}$ が成り立つことがわかる。ただし，$C =$ $\boxed{\text{カ}}$，$D =$ $\boxed{\text{キ}}$ である。

(2)　畳を縦の長さが 1，横の長さが 2 の長方形とみなす。縦の長さが 3，横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は $\boxed{\text{クケ}}$ である。

また，縦の長さが 3，横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき，敷き詰め方の総数は $\boxed{\text{コサシ}}$ である。

第５問

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間に 2 点 $A(-1,\ 2,\ 0)$，$B(2,\ p,\ q)$ がある。ただし，$q>0$ とする。線分 AB の中点 C から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点 D は，線分 OA を $9:1$ に内分するものとする。また，点 C から直線 OB に引いた垂線と直線 OB の交点 E は，線分 OB を $3:2$ に内分するものとする。

(1) 点 B の座標を求めよう。$|\overrightarrow{OA}|^2=\boxed{\text{ア}}$ である。また，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}\overrightarrow{OA}$ であることにより，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\overrightarrow{OA}-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\overrightarrow{OB}$ と表される。$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から，

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\text{ケ}}$ ……① である。同様に，$\overrightarrow{CE}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から，$|\overrightarrow{OB}|^2=20$ ……②を得る。

①と②，および $q>0$ から，B の座標は $\left(2,\ \boxed{\text{コ}},\ \sqrt{\boxed{\text{サ}}}\right)$ である。

(2) 3 点 O, A, B の定める平面を α とし，点 $(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ を G とする。また，α 上に点 H を $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つようにとる。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表そう。

H が α 上にあることから，実数 s, t を用いて，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と表される。よって，$\overrightarrow{GH}=\boxed{\text{シ}}\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ である。これと，$\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ および $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つことから，$s=\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ が得られる。ゆえに

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\overrightarrow{OA}+\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}\overrightarrow{OB}$$

となる。また，このことから，H は $\boxed{\text{ツ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群

- ⓪ 三角形 OAC の内部の点
- ① 三角形 OBC の内部の点
- ② 点 O, C と異なる，線分 OC 上の点
- ③ 三角形 OAB の周上の点
- ④ 三角形 OAB の内部にも周上にもない点

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　$\log_{10}10=1$ であり，$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=-\log_{10}2+1$

$\log_{10}15=\log_{10}(3\cdot 5)=\log_{10}3+\log_{10}5=-\log_{10}2+\log_{10}3+1$

(2)　$\log_{10}15^{20}=20\log_{10}15=20(-\log_{10}2+\log_{10}3+1)$

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ より，

$\log_{10}15^{20}=20\times(-0.3010+0.4771+1)=20\times 1.1761=23.522$

$23<\log_{10}15^{20}<23+1$ となり，$10^{23}<15^{20}<10^{24}$ から 15^{20} は 24 桁の数である。

ここで，$\log_{10}15^{20}$ の小数部分は $\log_{10}15^{20}-23=0.522$ となり，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$ より，

$\log_{10}3<\log_{10}15^{20}-23<\log_{10}4$，$\log_{10}3\cdot 10^{23}<\log_{10}15^{20}<\log_{10}4\cdot 10^{23}$

これより，$3\cdot 10^{23}<15^{20}<4\cdot 10^{23}$ となり，15^{20} の最高位の数字は 3 である。

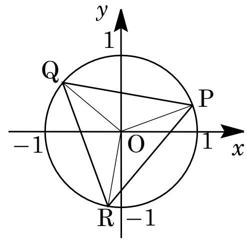
［解　説］

常用対数についての超有名問題です。誘導の必要を感じないぐらいです。

[2]　(1)　3点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{R}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ に対して，

$$s=\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta\cdots\cdots\cdots①,\quad t=\sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta\cdots\cdots\cdots②$$

ただし，$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ とする。



ここで，△PQR が正三角形である場合，$\alpha=\theta+\frac{2}{3}\pi$，$\beta=\theta+\frac{4}{3}\pi$ より，

$$\cos\alpha=\cos\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{2}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$$

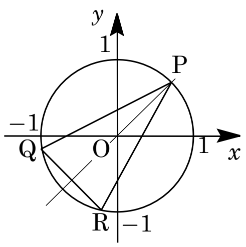
$$\sin\alpha=\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{2}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

$$\cos\beta=\cos\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\cos\theta\cos\frac{4}{3}\pi-\sin\theta\sin\frac{4}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta$$

$$\sin\beta=\sin\left(\theta+\frac{4}{3}\pi\right)=\sin\theta\cos\frac{4}{3}\pi+\cos\theta\sin\frac{4}{3}\pi=-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

すると，①②から，$s=\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta=0$

$$t=\sin\theta-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=0$$



また，△PQR が $\mathrm{PQ}=\mathrm{PR}$ となる二等辺三角形である場合，例えば，点 P が直線 $y=x$ 上にあるとき $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$，点 Q，R は直線 $y=x$ に関して対称なので，$\alpha<\frac{5}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi<\beta$ として，$\sin\beta=\cos\alpha$，$\cos\beta=\sin\alpha$ が成り立ち，①②より，

$$s=t=\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha+\sin\alpha$$

ここで，$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ であるので，$s=t=0$ であるのは，

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=0,\quad \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{5}{4}\pi$ より $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$ となり，③から $\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi$ なので，

$$\alpha=\frac{7}{6}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{11}{12}\pi$$

このとき，$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{5}{4}\pi$ から，$\beta=\frac{5}{2}\pi-\alpha=\frac{5}{2}\pi-\frac{11}{12}\pi=\frac{19}{12}\pi$ となる。

(2)　次に，$s=t=0$ の場合，①②より，

$$\cos\theta+\cos\alpha+\cos\beta=0\cdots\cdots\cdots④,\quad \sin\theta+\sin\alpha+\sin\beta=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に，④⑤を合わせると，

$$(-\sin\alpha-\sin\beta)^2+(-\cos\alpha-\cos\beta)^2=1$$

すると，$1+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+1=1$ から，

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2},\ \cos(\beta-\alpha)=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

また，$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$ に，④⑤を合わせると，

$$(-\sin\theta-\sin\alpha)^2+(-\cos\theta-\cos\alpha)^2=1$$

すると，$1+2(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)+1=1$ から，

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos(\alpha-\theta)=-\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑦$$

$0\leqq\theta<\alpha<\beta<2\pi$ なので，$0<\beta-\alpha<2\pi$，$0<\alpha-\theta<2\pi$ となり，⑥⑦より，

$$\beta-\alpha=\frac{2}{3}\pi \text{ または } \frac{4}{3}\pi,\ \alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi \text{ または } \frac{4}{3}\pi$$

ここで，$\beta=(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)+\theta\geqq(\beta-\alpha)+(\alpha-\theta)$ から，$\beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi$ または $\alpha-\theta=\frac{4}{3}\pi$ のとき，$\beta\geqq2\pi$ となり不適である。

よって，$\beta-\alpha=\alpha-\theta=\frac{2}{3}\pi$

(3)　(1)(2)より，△PQR が正三角形ならば $s=t=0$ であり，$s=t=0$ ならば△PQR は正三角形である。

［解　説］

三角関数の計算問題です。誘導が丁寧なので, (3)の結論は明らかです。

第２問

問題のページへ

[1]　(1)　$f(x)=(x-a)(x-2)$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ に対して，$a=1$ のとき，

$$F'(x)=f(x)=(x-1)(x-2)$$

これより，$F(x)$ の増減は右表のようになり，$F(x)$ は $x=2$ で極小になる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$F'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↗		↘		↗

(2)　$F(x)$ がつねに増加する条件は,

$$F'(x)=f(x)=(x-a)(x-2)\geqq 0$$

これより，$a=2$ のときである。

また，$F(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$ から，$a=2$ のとき $F(2)$ の値は正である。

(3)　$a>2$ のとき，b を実数とし，$G(x)=\int_b^x f(t)dt$ とおくと，

$$G(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_b^0 f(t)dt=F(x)-\int_0^b f(t)dt=F(x)-F(b)$$

すると，関数 $y=G(x)$ のグラフは，$y=F(x)$ のグラフを y 軸方向に $-F(b)$ だけ平行移動したものと一致する。

また，$G'(x)=f(x)=(x-a)(x-2)$ より，$G(x)$ の増減は右表のようになり，$G(x)$ は $x=2$ で極大になり，$x=a$ で極小になる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$G'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$G(x)$	↗		↘		↗

$G(b)=\int_b^b f(t)dt=0$ より，$b=2$ のとき $G(2)=0$ から極大値が 0 となるので，曲線 $y=G(x)$ と x 軸との共有点の個数は 2 個である。

［解　説］

定積分によって定義された関数を題材とした基本問題です。

[2]　$g(x)=|x|(x+1)$ に対して,

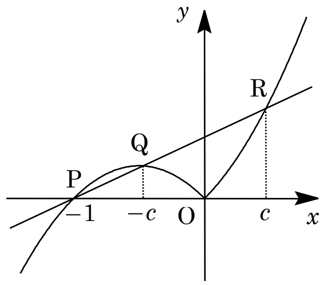
$$g(x)=x(x+1)\ (x\geqq 0),\ \ g(x)=-x(x+1)\ (x<0)$$

$x<0$ のとき, $g'(x)=-2x-1$ となり, $g'(-1)=1$

さて, $0<c<1$ として, 点 $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ を通り傾きが c の直線 l の方程式は,

$$y=c(x+1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

曲線 $y=g(x)$ と直線 l の交点を, x 座標の小さい方から順に P, Q, R とする。



まず, $x<0$ のとき, $y=g(x)$ と(*)を連立して,

$$-x(x+1)=c(x+1),\ \ (x+1)(x+c)=0$$

これより, 点 Q の x 座標は $x=-c$ となる。

また, $x\geqq 0$ のとき, $y=g(x)$ と(*)を連立して,

$$x(x+1)=c(x+1),\ \ (x+1)(x-c)=0$$

これより, 点 R の x 座標は $x=c$ となる。

さて, 線分 PQ と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_{-1}^{-c}\{-x(x+1)-c(x+1)\}dx=-\int_{-1}^{-c}(x+1)(x+c)dx$$

$$=\frac{1}{6}(-c+1)^3=\frac{-c^3+3c^2-3c+1}{6}$$

また, 線分 QR と曲線 $y=g(x)$ で囲まれた図形の面積 T は,

$$T=\int_{-c}^{c}c(x+1)dx-\int_{-c}^{0}-x(x+1)dx-\int_{0}^{c}x(x+1)dx$$

$$=2\int_{0}^{c}c\,dx-\int_{-c}^{0}(-x^2-x)dx-\int_{0}^{c}(x^2+x)dx$$

$$=2c^2+\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-c}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{c}=2c^2-\left(-\frac{c^3}{3}+\frac{c^2}{2}\right)-\left(\frac{c^3}{3}+\frac{c^2}{2}\right)=c^2$$

［解　説］

定積分と面積についての基本問題です。

第３問

問題のページへ

(1)　留学生の日本語各コースの 1 週間の授業時間数と登録割合をまとめると，右表のようになる。

コース	初級	中級	上級
授業時間数	10 時間	8 時間	6 時間
登録割合	20%	35%	45%

　ここで，留学生 1 人を無作為に抽出したとき，その留学生が 1 週間に受講する授業時間数を表す確率変数を X とすると，X の平均 $E(X)$ と分散 $V(X)$ は,

$$E(X)=10\times\frac{20}{100}+8\times\frac{35}{100}+6\times\frac{45}{100}=\frac{150}{20}=\frac{15}{2}$$

$$V(X)=100\times\frac{20}{100}+64\times\frac{35}{100}+36\times\frac{45}{100}-\left(\frac{15}{2}\right)^2=\frac{1172}{20}-\frac{225}{4}=\frac{47}{20}$$

　次に，留学生全体を母集団とし，a 人を無作為に抽出したとき，初級コースに登録した人数を表す確率変数を Y とすると，Y は二項分布 $B(a,\ 0.2)$ に従い，平均 $E(X)$ と標準偏差 $\sigma(Y)$ は,

$$E(Y)=a\times0.2=\frac{a}{5},\quad \sigma(Y)=\sqrt{a\times0.2\times(1-0.2)}=\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}a}=\frac{2}{5}\sqrt{a}$$

　また，上級コースに登録した人数を表す確率変数を Z とすると，Z は二項分布 $B(a,\ 0.45)$ に従い，標準偏差 $\sigma(Z)$ は,

$$\sigma(Z)=\sqrt{a\times0.45\times(1-0.45)}=\sqrt{\frac{9}{20}\cdot\frac{11}{20}a}=\frac{3}{20}\sqrt{11a}$$

　これより，$\dfrac{\sigma(Z)}{\sigma(Y)}=\dfrac{3}{20}\sqrt{11a}\cdot\dfrac{5}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{8}\sqrt{11}$ となる。

　ここで，$a=100$ のとき，$E(Y)=\dfrac{100}{5}=20$，$\sigma(Y)=\dfrac{2}{5}\cdot10=4$ となり，近似的に正規分布 $N(20,\ 4^2)$ に従い，さらに $Y'=\dfrac{Y-20}{4}$ とおくと，Y' は $N(0,\ 1)$ に従う。

　このとき，初級コースに登録した人数が 28 人以上となる確率 p は,

$$p=P(Y\geqq28)=P(Y'\geqq2)=0.5-0.4772=0.0228\fallingdotseq0.023$$

(2)　留学生 40 人を無作為に抽出し，日本語学習コース以外の日本語の学習時間(分)を調査した。ただし，学習時間は母平均 m，母分散 σ^2 の分布に従うものとする。

　ここで，$\sigma^2=640$ と仮定すると，標本平均の標準偏差は $\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{40}}=\sqrt{16}=4$ となる。

40 人の学習時間の平均値は 120 で，標本平均が近似的に正規分布に従うとして，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間を $C_1\leqq m\leqq C_2$ とすると,

$$C_1=120-1.96\times4=112.16,\quad C_2=120+1.96\times4=127.84$$

(3)　次に，50 人の留学生を無作為に抽出し，再度調査した結果，学習時間の平均値は 120 であった。母分散 $\sigma^2=640$ と仮定したとき，母平均 m に対する信頼度 95%の信頼区間を $D_1\leqq m\leqq D_2$ とする。

このとき，標本平均の標準偏差は$\dfrac{\sqrt{640}}{\sqrt{50}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$なので，

$$D_1=120-1.96\times\frac{8}{\sqrt{5}},\quad D_2=120+1.96\times\frac{8}{\sqrt{5}}$$

すると，$\dfrac{8}{\sqrt{5}}<4$より，$D_1>C_1$かつ$D_2<C_2$が成り立つ。

また，n人の留学生を無作為に抽出し，$\sigma^2=960$と仮定したとき，母平均mに対する信頼度95%の信頼区間を$E_1\leqq m\leqq E_2$とする。

このとき，標本平均の標準偏差は$\dfrac{\sqrt{960}}{\sqrt{n}}=\dfrac{8\sqrt{15}}{\sqrt{n}}$なので，

$$E_2-E_1=2\times1.96\times\frac{8\sqrt{15}}{\sqrt{n}}$$

すると，$D_2-D_1=E_2-E_1$のときは，$2\times1.96\times\dfrac{8}{\sqrt{5}}=2\times1.96\times\dfrac{8\sqrt{15}}{\sqrt{n}}$となり，

$$\sqrt{n}=\sqrt{5}\times\sqrt{15},\quad n=75$$

よって，標本の大きさを50の1.5倍にする必要がある。

［解　説］

確率分布および統計的な推測についての基本的な問題です。

第４問

問題のページへ

[1]　数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和が$S_n=5^n-1$のとき，$a_1=S_1=5-1=4$

$n \geqq 2$のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}$より，

$$a_n=(5^n-1)-(5^{n-1}-1)=(5-1)\cdot 5^{n-1}=4\cdot 5^{n-1}$$

なお，この式は$n=1$のときも成り立ち，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5^{k-1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{16}(1-5^{-n})$$

［解　説］

和と一般項の関係についての基本題です。

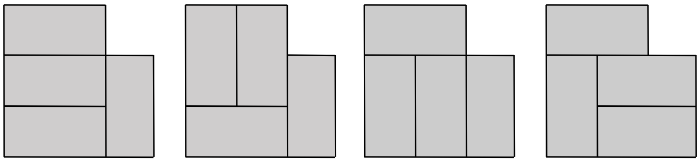
[2]　(1) 縦の長さが 1, 横の長さが 2 の長方形のタイルが多数ある。

ここで, 縦の長さが 3, 横の長さが $2n$ の長方形を R_n とし, $3n$ 枚のタイルを用いた R_n 内の配置の総数を r_n とする。このとき, $r_1=3$, $r_2=11$ である。

また, $(3n+1)$ 枚のタイルを用いた与えられた図形 T_n 内の配置の総数を t_n とする。

$n=1$ のときは, 4 枚のタイルを用いた図形 T_1 は右図のようになり,

$t_1=4$



そして, T_n の右下隅のタイルに注目して図をかくと, T_n 内の配置は, 1 通りの R_n 内の配置, および 1 通りの T_{n-1} 内の配置からできるので,

$t_n=r_n+t_{n-1}$　$(n \geqq 2)$ ………①

これより, $t_2=r_2+t_1=11+4=15$ となる。

さらに, R_n の右下隅のタイルに注目して図をかくと, R_n 内の配置は, 1 通りの R_{n-1} 内の配置, および 2 通りの T_{n-1} 内の配置からできるので,

$r_n=r_{n-1}+2t_{n-1}$　$(n \geqq 2)$ ………②

(2) 縦の長さが 3, 横の長さが 6 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき, 敷き詰め方の総数 r_3 は, ②から,

$r_3=r_2+2t_2=11+2\cdot 15=41$

また, 縦の長さが 3, 横の長さが 8 の長方形の部屋に畳を敷き詰めるとき, 敷き詰め方の総数 r_4 は, ①②から,

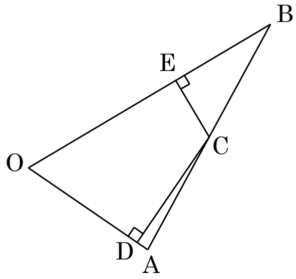
$r_4=r_3+2t_3=r_3+2(r_3+t_2)=3r_3+2t_2=3\cdot 41+2\cdot 15=153$

［解 説］

漸化式を立式する問題です。図による細かい誘導が与えられています。

第５問

問題のページへ



(1) 原点 O, $A(-1,\ 2,\ 0)$, $B(2,\ p,\ q)$ に対して，線分 AB の中点 C から直線 OA に引いた垂線と直線 OA の交点を D, 点 C から直線 OB に引いた垂線と直線 OB の交点を E とすると，

$$|\overrightarrow{OA}|^2=1+4=5,\ \overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

点 D は線分 OA を $9:1$ に内分し，$\overrightarrow{OD}=\frac{9}{10}\overrightarrow{OA}$ から，

$$\overrightarrow{CD}=\frac{9}{10}\overrightarrow{OA}-\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{CD}$ から $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ となり，$\frac{2}{5}|\overrightarrow{OA}|^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ から，

$$\frac{2}{5}\cdot 5-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\cdots\cdots\cdots①$$

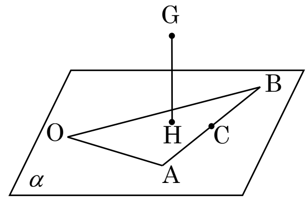
点 E は線分 OB を $3:2$ に内分し，$\overrightarrow{OE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$ から $\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{10}\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CE}$ から $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CE}=0$ となり，$-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0$ に①を代入し，

$$-2+\frac{1}{10}|\overrightarrow{OB}|^2=0,\ |\overrightarrow{OB}|^2=20\cdots\cdots\cdots②$$

①より $-2+2p=4$ となり $p=3\cdots\cdots$③, また②より $4+p^2+q^2=20$

③を代入して $q^2=7$ となり，$q>0$ から $q=\sqrt{7}$ なので，$B(2,\ 3,\ \sqrt{7})$ となる。



(2) 3 点 O, A, B の定める平面を α とし，$G(4,\ 4,\ -\sqrt{7})$ に対して，α 上に点 H を $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{GH}\perp\overrightarrow{OB}$ が成り立つようにとる。

実数 s, t を用いて，$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ と表すと，

$$\overrightarrow{GH}=-\overrightarrow{OG}+s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

ここで，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OA}=-4+8+0=4$，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{OB}=8+12-7=13$ であることに注意して，$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，$\overrightarrow{GH}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ から，

$$-4+5s+4t=0\cdots\cdots\cdots④,\ -13+4s+20t=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$s=\frac{1}{3}$，$t=\frac{7}{12}$ となり，$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{7}{12}\overrightarrow{OB}$

すると，$\overrightarrow{OH}=\frac{4\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}}{12}=\frac{11}{12}\cdot\frac{4\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}}{11}$ と変形し，$\overrightarrow{OI}=\frac{4\overrightarrow{OA}+7\overrightarrow{OB}}{11}$ とおくと，点 I は線分 AB を $7:4$ に内分し，さらに $\overrightarrow{OH}=\frac{11}{12}\overrightarrow{OI}$ から，点 H は線分 OI を $11:1$ に内分する点である。すなわち，点 H は三角形 OBC の内部の点である。

［解 説］

空間ベクトルの標準的な問題です。問題量は多いですが，計算を少しショートカットできるように構成されています。