第１問

解答解説のページへ

[1]　a, b を定数とするとき，x についての不等式 $|ax-b-7|<3$ ……①を考える。

(1)　$a=-3$，$b=-2$ とする。①を満たす整数全体の集合を P とする。この集合 P を，要素を書き並べて表すと，$P=\{$ $\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$ $\}$ となる。ただし，$\boxed{\text{アイ}}$, $\boxed{\text{ウエ}}$ の解答の順序は問わない。

(2)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とする。

(i)　$b=1$ のとき，①を満たす整数は全部で $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(ii)　①を満たす整数が全部で $\left(\boxed{\text{オ}}+1\right)$ 個であるような正の整数 b のうち，最小のものは $\boxed{\text{カ}}$ である。

[2]　平面上に 2 点 A, B があり，AB$=8$である。直線 AB 上にない点 P をとり，△ABP をつくり，その外接円の半径を R とする。

太郎さんは，図 1 のように，コンピュータソフトを使って点 P をいろいろな位置にとった。

図 1 は，点 P をいろいろな位置にとったときの△ABP の外接円をかいたものである。

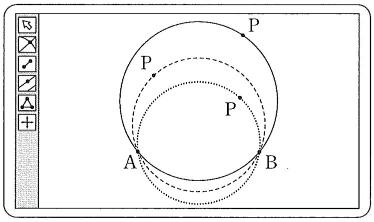


図　1

(1)　太郎さんは，点 P のとり方によって外接円の半径が異なることに気づき，次の**問題 1** を考えることにした。

問題 1　点 P をいろいろな位置にとるとき，外接円の半径 R が最小となる△ABP はどのような三角形か。

正弦定理により，$2R=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\sin\angle\text{APB}}$ である。よって，R が最小となるのは

$\angle$APB$=\boxed{\text{イウ}}$° の三角形である。このとき，$R=\boxed{\text{エ}}$である。

(2)　太郎さんは，図 2 のように，**問題 1** の点 P のとり方に条件を付けて，次の**問題 2** を考えた。

問題 2　直線 AB に平行な直線を l とし，直線 l 上で点 P をいろいろな位置にとる。このとき，外接円の半径 R が最小となる△ABP はどのような三角形か。

太郎さんは，この問題を解決するために，次の構想を立てた。

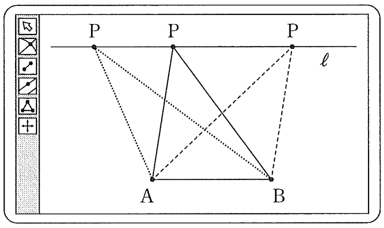


図　2

問題 2 の解決の構想

問題 1 の考察から，線分 AB を直径とする円を C とし，円 C に着目する。直線 l は，その位置によって，円 C と共有点をもつ場合ともたない場合があるので，それぞれの場合に分けて考える。

直線 AB と直線 l との距離を h とする。直線 l が円 C と共有点をもつ場合は，$h\leqq\boxed{\text{オ}}$ のときであり，共有点をもたない場合は，$h>\boxed{\text{オ}}$ のときである。

(i)　$h \leqq$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき

直線 l が円 C と共有点をもつので, R が最小となる△ABP は, $h <$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき $\boxed{\text{カ}}$ であり, $h =$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h >$ $\boxed{\text{オ}}$ のとき

線分 AB の垂直二等分線を m とし, 直線 m と直線 l との交点を P_1 とする。直線 l 上にあり点 P_1 とは異なる点を P_2 とするとき $\sin\angle AP_1B$ と $\sin\angle AP_2B$ の大小を考える。

$\triangle ABP_2$ の外接円と直線 m の共有点のうち, 直線 AB に関して点 P_2 と同じ側にある点を P_3 とすると, $\angle AP_3B$ $\boxed{\text{キ}}$ $\angle AP_2B$ である。また, $\angle AP_3B < \angle AP_1B < 90°$ より $\sin\angle AP_3B$ $\boxed{\text{ク}}$ $\sin\angle AP_1B$ である。このとき

$(\triangle ABP_1$ の外接円の半径$)$ $\boxed{\text{ケ}}$ $(\triangle ABP_2$ の外接円の半径$)$

であり, R が最小となる△ABP は $\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ については, 最も適当なものを, 次の ⓪～④ のうちから 1 つずつ選べ。ただし, 同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ 鈍角三角形	① 直角三角形	② 正三角形
③ 二等辺三角形	④ 直角二等辺三角形	

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ $<$	① $=$	② $>$

(3)　**問題２**の考察を振り返って, $h = 8$ のとき, △ABP の外接円の半径 R が最小である場合について考える。このとき $\sin\angle APB = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり, $R =$ $\boxed{\text{ス}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

[1]　花子さんと太郎さんのクラスでは，文化祭でたこ焼き店を出店することになった。2 人は 1 皿あたりの価格をいくらにするかを検討している。次の表は，過去の文化祭でのたこ焼き店の売り上げデータから，1 皿あたりの価格と売り上げ数の関係をまとめたものである。

1 皿あたりの価格(円)	200	250	300
売り上げ数(皿)	200	150	100

(1)　まず，2 人は，上の表から，1 皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考えて，売り上げ数が 1 皿あたりの価格の 1 次関数で表されると仮定した。このとき，1 皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は $\boxed{\text{アイウ}}-x$ ……①と表される。

(2)　次に，2 人は，利益の求め方について考えた。

花子：利益は，売り上げ金額から必要な経費を引けば求められるよ。
太郎：売り上げ金額は，1 皿あたりの価格と売り上げ数の積で求まるね。
花子：必要な経費は，たこ焼き用器具の賃貸料と材料費の合計だね。材料費は，売り上げ数と 1 皿あたりの材料費の積になるね。

2 人は，次の 3 つの条件のもとで，1 皿あたりの価格 x を用いて利益を表すことにした。

(条件 1)　1 皿あたりの価格が x 円のときの売り上げ数として①を用いる。

(条件 2)　材料は，①により得られる売り上げ数に必要な分量だけ仕入れる。

(条件 3)　1 皿あたりの材料費は 160 円である。たこ焼き用器具の賃貸料は 6000 円である。材料費とたこ焼き用器具の賃貸料以外の経費はない。

利益を y 円とおく。y を x の式で表すと

$$y=-x^2+\boxed{\text{エオカ}}\,x-\boxed{\quad\text{キ}\quad}\times 10000\ \cdots\cdots\text{②}$$

である。

(3)　太郎さんは利益を最大にしたいと考えた。②を用いて考えると，利益が最大になるのは 1 皿あたりの価格が $\boxed{\text{クケコ}}$ 円のときであり，そのときの利益は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 円である。

(4)　花子さんは，利益を 7500 円以上となるようにしつつ，できるだけ安い価格で提供したいと考えた。②を用いて考えると，利益が 7500 円以上となる 1 皿あたりの価格のうち，最も安い価格は $\boxed{\text{ソタチ}}$ 円となる。

[2]　総務省が実施している国勢調査では都道府県ごとの総人口が調べられており，その内訳として日本人人口と外国人人口が公表されている。また，外務省では旅券(パスポート)を取得した人数を都道府県ごとに公表している。加えて，文部科学省では都道府県ごとの小学校に在籍する児童数を公表している。

そこで，47 都道府県の，人口 1 万人あたりの外国人人口(以下，外国人数)，人口 1 万人あたりの小学校児童数(以下，小学生数)，また，日本人 1 万人あたりの旅券を取得した人数(以下，旅券取得者数)を，それぞれ計算した。

(1)　図 1 は，2010 年における 47 都道府県の，旅券取得者数(横軸)と小学生数(縦軸)の関係を黒丸で，また，旅券取得者数(横軸)と外国人数(縦軸)の関係を白丸で表した散布図である。

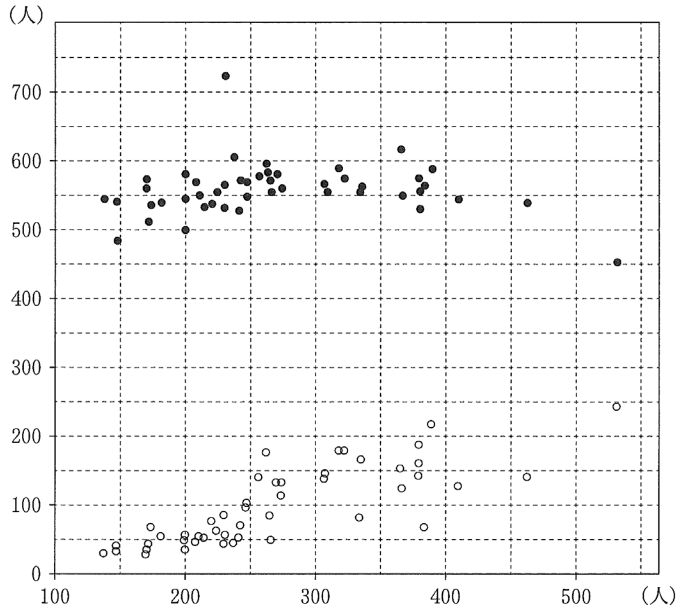


図 1　2010 年における，旅券取得者数と小学生数の散布図(黒丸)，
旅券取得者数と外国人数の散布図(白丸)

(出典：外務省，文部科学省および総務省の Web ページにより作成)

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は図 1 の散布図に関する記述である。

(Ⅰ)　小学生数の四分位範囲は，外国人数の四分位範囲より大きい。

(Ⅱ)　旅券取得者数の範囲は，外国人数の範囲より大きい。

(Ⅲ)　旅券取得者数と小学生数の相関係数は，旅券取得者数と外国人数の相関係数より大きい。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ア}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

(2)　一般に，度数分布表が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は

階級値	x_1	x_2	x_3	x_4	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	f_3	f_4	$\cdots$	f_k	n

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots+x_kf_k)$$

で求めることができる。さらに階級の幅が一定で，その値が h のときは

$$x_2=x_1+h,\ x_3=x_1+2h,\ x_4=x_1+3h,\ \cdots,\ x_k=x_1+(k-1)h$$

に注意すると，$\overline{x}=\boxed{\text{イ}}$ と変形できる。

$\boxed{\text{イ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～④ のうちから1つ選べ。

⓪　$\dfrac{x_1}{n}(f_1+f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

①　$\dfrac{h}{n}(f_1+2f_2+3f_3+4f_4+\cdots+kf_k)$

②　$x_1+\dfrac{h}{n}(f_2+f_3+f_4+\cdots+f_k)$

③　$x_1+\dfrac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots+(k-1)f_k\}$

④　$\dfrac{1}{2}(f_1+f_k)x_1-\dfrac{1}{2}(f_1+kf_k)$

図2は，2008年における47都道府県の旅券取得者数のヒストグラムである。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

図2のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定する。このとき，平均値 $\overline{x}$ は小数第1位を四捨五入すると $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

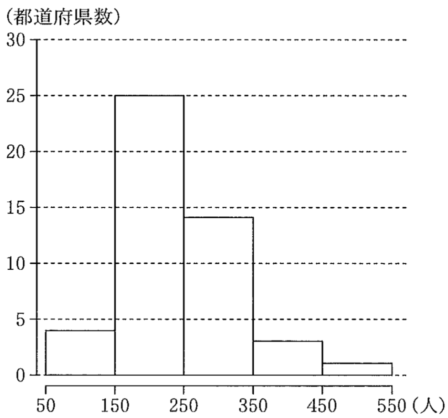


図2　2008年における旅券取得者数のヒストグラム

(出典：外務省の Web ページにより作成)

(3) 一般に，度数分布表が与えられていて，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，分散 s^2 は

階級値	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	計
度数	f_1	f_2	$\cdots$	f_k	n

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\}$$

で求めることができる。さらに s^2 は

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-2\overline{x}\times\boxed{\text{カ}}+(\overline{x})^2\times\boxed{\text{キ}}\}$$

と変形できるので，

$$s^2=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-\boxed{\text{ク}}\cdots\cdots\cdots①$$

である。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ n	① n^2	② $\overline{x}$	③ $n\overline{x}$	④ $2n\overline{x}$
⑤ $n^2\overline{x}$	⑥ $(\overline{x})^2$	⑦ $n(\overline{x})^2$	⑧ $2n(\overline{x})^2$	⑨ $3n(\overline{x})^2$

図 3 は，図 2 を再掲したヒストグラムである。

図 3 のヒストグラムに関して，各階級に含まれるデータの値がすべてその階級値に等しいと仮定すると，平均値 $\overline{x}$ は(2)で求めた $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。$\boxed{\text{ウエオ}}$ の値と式①を用いると，分散 s^2 は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

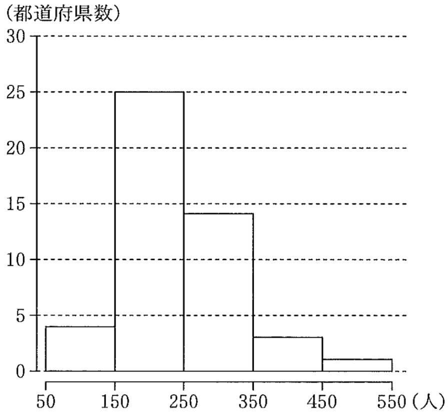


図 3　2008 年における旅券取得者数のヒストグラム

(出典：外務省の Web ページにより作成)

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も近いものを，次の ⓪～⑦ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 3900	① 4900	② 5900	③ 6900
④ 7900	⑤ 8900	⑥ 9900	⑦ 10900

第３問

解答解説のページへ

2 つの袋 A, B と 1 つの箱がある。A の袋には赤球 2 個と白球 1 個が入っており，B の袋には赤球 3 個と白球 1 個が入っている。また，箱には何も入っていない。

(1) A, B の袋から球をそれぞれ 1 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i) 箱の中の 2 個の球のうち少なくとも 1 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(ii) 箱の中をよくかき混ぜてから球を 1 個取り出すとき，取り出した球が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キク}}}$ であり，取り出した球が赤球であったときに，それが B の袋に入っていたものである条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コサ}}}$ である。

(2) A, B の袋から球をそれぞれ 2 個ずつ同時に取り出し，球の色を調べずに箱に入れる。

(i) 箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 2 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，箱の中の 4 個の球のうち，ちょうど 3 個が赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

(ii) 箱の中をよくかき混ぜてから球を 2 個同時に取り出すとき，どちらの球も赤球である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。また，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は

$\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

正の整数 m に対して，

$$a^2+b^2+c^2+d^2=m,\ \ a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす整数 a, b, c, d の組がいくつあるかを考える。

(1)　$m=14$ のとき，①を満たす整数 a, b, c, d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$(\ \boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}\ )$$

のただ１つである。

また，$m=28$ とき，①を満たす整数 a, b, c, d の組の個数は $\boxed{\text{オ}}$ 個である。

(2)　a が奇数のとき，整数 n を用いて $a=2n+1$ と表すことができる。このとき，$n(n+1)$ は偶数であるから，次の条件がすべての奇数 a で成り立つような正の整数 h のうち，最大のものは $h=\boxed{\text{カ}}$ である。

条件：a^2-1 は h の倍数である。

よって，a が奇数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは１である。

また，a が偶数のとき，a^2 を $\boxed{\text{カ}}$ で割ったときの余りは，0 または 4 のいずれかである。

(3)　(2)により，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数ならば，整数 $a,\ b,\ c,\ d$ のうち，偶数であるものの個数は $\boxed{\text{キ}}$ 個である。

(4)　(3)を用いることにより，m が $\boxed{\text{カ}}$ の倍数であるとき，①を満たす整数 a, b, c, d が求めやすくなる。

例えば，$m=224$ のとき，①を満たす整数 a, b, c, d の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ は

$$(\ \boxed{\text{クケ}},\ \boxed{\text{コ}},\ \boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}}\ )$$

のただ１つであることがわかる。

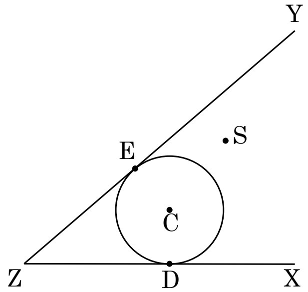
(5)　7 の倍数で 896 の約数である正の整数 m のうち，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組の個数が $\boxed{\text{オ}}$ 個であるものの個数は $\boxed{\text{ス}}$ 個であり，そのうち最大のものは $m=\boxed{\text{セソタ}}$ である。

第５問

解答解説のページへ

点 Z を端点とする半直線 ZX と半直線 ZY があり，$0^\circ < \angle XZY < 90^\circ$ とする。また，$0^\circ < \angle SZX < \angle XZY$ かつ $0^\circ < \angle SZY < \angle XZY$ を満たす点 S をとる。点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円を作図したい。

円 O を，次の(Step 1)〜(Step 5)の手順で作図する。



参考図

手順

(Step 1)　$\angle XZY$ の二等分線 l 上に点 C をとり，上図のように半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円 C を作図する。また，円 C と半直線 ZX との接点を D，半直線 ZY との接点を E とする。

(Step 2)　円 C と直線 ZS との交点の 1 つを G とする。

(Step 3)　半直線 ZX 上に点 H を $DG /\!/ HS$ を満たすようにとる。

(Step 4)　点 H を通り，半直線 ZX に垂直な直線を引き，l との交点を O とする。

(Step 5)　点 O を中心とする半径 OH の円 O をかく。

(1)　(Step 1)〜(Step 5)の手順で作図した円 O が求める円であることは，次の構想に基づいて下のように説明できる。

構想

円 O が点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円であることを示すには，OH = $\boxed{\text{ア}}$ が成り立つことを示せばよい。

作図の手順により，△ZDG と△ZHS との関係，および△ZDC と△ZHO との関係に着目すると，

DG : $\boxed{\text{イ}}$ = $\boxed{\text{ウ}}$: $\boxed{\text{エ}}$，DC : $\boxed{\text{オ}}$ = $\boxed{\text{ウ}}$: $\boxed{\text{エ}}$

であるから，DG : $\boxed{\text{イ}}$ = DC : $\boxed{\text{オ}}$ となる。

ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG = ∠$\boxed{\text{カ}}$ であるので，△CDG と△$\boxed{\text{カ}}$ との関係に着目すると，CD = CG より OH = $\boxed{\text{ア}}$ であることがわかる。

なお，3 点 S, O, H が一直線上にある場合は，DG = $\boxed{\text{キ}}$ DC となり，DG : $\boxed{\text{イ}}$ = DC : $\boxed{\text{オ}}$ より OH = $\boxed{\text{ア}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

⓪ DH	① HO	② HS	③ OD	④ OG
⑤ OS	⑥ ZD	⑦ ZH	⑧ ZO	⑨ ZS

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ OHD	① OHG	② OHS	③ ZDS
④ ZHG	⑤ ZHS	⑥ ZOS	⑦ ZCG

(2)　点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円は 2 つ作図できる。特に，点 S が $\angle$XZY の二等分線 l 上にある場合を考える。半径が大きい方の円の中心を O_1 とし，半径が小さい方の円の中心を O_2 とする。また，円 O_2 と半直線 ZY が接する点を I とする。円 O_1 と半直線 ZY が接する点を J とし，円 O_1 と半直線 ZX が接する点を K とする。

作図をした結果，円 O_1 の半径は 5，円 O_2 の半径は 3 であったとする。このとき，$\mathrm{IJ} = \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。さらに，円 O_1 と円 O_2 の接点 S における共通接線と半直線 ZY との交点を L とし，直線 LK と円 O_1 との交点で点 K とは異なる点を M とすると，$\mathrm{LM} \cdot \mathrm{LK} = \boxed{\text{サシ}}$ である。

また，$\mathrm{ZI} = \boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$ であるので，直線 LK と直線 l との交点を N とすると，$\dfrac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}} = \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$，$\mathrm{SN} = \dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1]　(1)　不等式$\left|ax-b-7\right|<3$……①に対して，$a=-3$，$b=-2$のとき，

$\left|-3x+2-7\right|<3$，$-3<-3x-5<3$，$2<-3x<8$

すると$-\dfrac{2}{3}>x>-\dfrac{8}{3}$より，①を満たす整数全体の集合$P$は，$P=\{-1,\ -2\}$

(2)　(i)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=1$のとき，①より，$\left|\dfrac{x}{\sqrt{2}}-1-7\right|<3$となり，

$-3<\dfrac{x}{\sqrt{2}}-8<3$，$5<\dfrac{x}{\sqrt{2}}<11$，$5\sqrt{2}<x<11\sqrt{2}$

ここで，$7<5\sqrt{2}<8$，$15<5\sqrt{2}<16$ より，①を満たす整数は$x=8,\ 9,\ \cdots,\ 15$ より，全部で 8 個ある。

(ii)　$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき，①より，$\left|\dfrac{x}{\sqrt{2}}-b-7\right|<3$となり，

$-3<\dfrac{x}{\sqrt{2}}-b-7<3$，$b+4<\dfrac{x}{\sqrt{2}}<b+10$，$\sqrt{2}(b+4)<x<\sqrt{2}(b+10)$

①を満たす整数が 9 個となるbを小さい方から調べると，

(a)　$b=2$のとき　$6\sqrt{2}<x<12\sqrt{2}$で，$8<6\sqrt{2}<9$，$16<12\sqrt{2}<17$

これより，①を満たす整数は，$x=9,\ 10,\ \cdots,\ 16$ より 8 個となり不適

(b)　$b=3$のとき　$7\sqrt{2}<x<13\sqrt{2}$で，$9<6\sqrt{2}<10$，$18<12\sqrt{2}<19$

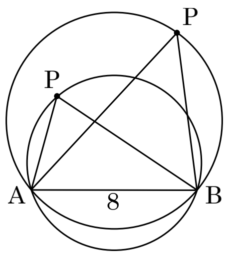
これより，①を満たす整数は，$x=10,\ 11,\ \cdots,\ 18$ より 9 個となり適する。

(a)(b)より，①を満たす整数が 9 個となる最小のbは，$b=3$である。

［解　説］

絶対値つきの不等式の問題です。丁寧に調べていくことが重要です。

[2]　(1)　$\mathrm{AB}=8$ である $\triangle\mathrm{ABP}$ に対して，その外接円の半径を R とすると，正弦定理より，$2R=\dfrac{8}{\sin\angle\mathrm{APB}}$

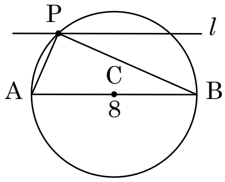


すると，R が最小となるのは $\sin\angle\mathrm{APB}=1$ ($\angle\mathrm{APB}=90°$) のときで，このとき $R=\dfrac{8}{2\cdot 1}=4$ である。

(2)　点 P が，直線 AB に平行な直線 l 上にあるときを考える。

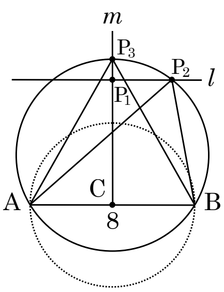
ここで，線分 AB を直径とする円を C，直線 AB と直線 l との距離を h とすると，直線 l が円 C と共有点をもつ場合は $h\leqq 4$，もたない場合は $h>4$ である。

(i)　$h\leqq 4$ のとき



R が最小となる $\triangle\mathrm{ABP}$ は，$h<4$ のとき直角三角形であり，$h=4$ のとき直角二等辺三角形である。

(ii)　$h>4$ のとき



線分 AB の垂直二等分線を m，直線 m と直線 l との交点を $\mathrm{P_1}$，直線 l 上にあり点 $\mathrm{P_1}$ とは異なる点を $\mathrm{P_2}$ とする。さらに，$\triangle\mathrm{ABP_2}$ の外接円と直線 m の共有点のうち，直線 AB に関して点 $\mathrm{P_2}$ と同じ側にある点を $\mathrm{P_3}$ とすると，$\angle\mathrm{AP_3B}=\angle\mathrm{AP_2B}$

また，$\angle\mathrm{AP_3B}<\angle\mathrm{AP_1B}<90°$ より，

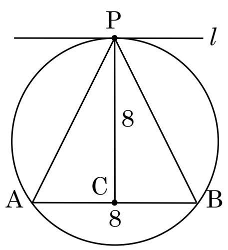
$$\sin\angle\mathrm{AP_2B}=\sin\angle\mathrm{AP_3B}<\sin\angle\mathrm{AP_1B}$$

すると，正弦定理より，

($\triangle\mathrm{ABP_1}$ の外接円の半径) ＜ ($\triangle\mathrm{ABP_2}$ の外接円の半径)

よって，R が最小となる $\triangle\mathrm{ABP}$ は $\triangle\mathrm{ABP_1}$，すなわち二等辺三角形である。

(3)　$h=8$ のとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の外接円の半径 R が最小である場合は，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$ から，$\sin\angle\mathrm{PAB}=\dfrac{8}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$



正弦定理から，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}=\dfrac{\mathrm{PB}}{\sin\angle\mathrm{PAB}}=2R$ となり，

$$\sin\angle\mathrm{APB}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PB}}\cdot\sin\angle\mathrm{PAB}=\frac{8}{4\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

$$R=\frac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{APB}}=\frac{8}{2}\cdot\frac{5}{4}=5$$

［解　説］

三角比と平面図形について，詳しい誘導のついた問題です。内容は頻出のものですが，題意をすばやく読み取り，正確に空欄を埋めていくことが要求されています。

第２問

問題のページへ

[1]　(1)　与えられた表から，1 皿あたりの価格が 50 円上がると売り上げ数が 50 皿減ると考え，売り上げ数が 1 皿あたりの価格の 1 次関数で表されると仮定する。そこで, 1 皿あたりの価格を x 円とおくと，売り上げ数は $400-x$ ……①となる。

(2)　売り上げ金額は $x(400-x)$ 円，材料費は $160(400-x)$ 円，器具の賃貸料は 6000 円より，利益 y 円は,

$$y=x(400-x)-160(400-x)-6000=-x^2+560x-70000$$
$$=-x^2+560x-7\times10000\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　②より，$y=-(x-280)^2+8400\cdots\cdots\cdots③$

これより，利益が最大になるのは，1 皿あたりの価格が 280 円，そのときの利益は 8400 円である。

(4)　利益が 7500 円以上となるのは，③から $-(x-280)^2+8400\geqq7500$ より,

$$(x-280)^2-900\leqq0,\ (x-280+30)(x-280-30)\leqq0$$

これより，$250\leqq x\leqq310$ となり，最も安い 1 皿あたりの価格は 250 円である。

［解　説］

関数の応用についての基本的な問題です。

[2]　(1)　与えられた散布図から，小学生数の四分位範囲は 50 程度，外国人数の四分位範囲は 100 程度なので，(Ⅰ)の記述は誤り。

旅券取得者数の範囲は 400 程度，外国人数の範囲は 220 程度なので，(Ⅱ)の記述は正しい。

旅券取得者数と小学生数の相関はみられず，旅券取得者数と外国人数は正の相関があるので，(Ⅲ)の記述は誤り。

(2)　平均値 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4+\cdots+x_kf_k)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}x_if_i$ より，

$$x_2=x_1+h,\ x_3=x_1+2h,\ x_4=x_1+3h,\ \cdots,\ x_k=x_1+(k-1)h$$

すなわち，$x_i=x_1+(i-1)h\ (1\leqq i\leqq k)$ のとき，

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\{x_1+(i-1)h\}f_i=\frac{1}{n}\left\{x_1\sum_{i=1}^{k}f_i+h\sum_{i=1}^{k}(i-1)f_i\right\}$$

$$=\frac{x_1}{n}\cdot n+\frac{h}{n}\sum_{i=1}^{k}(i-1)f_i=x_1+\frac{h}{n}\{f_2+2f_3+3f_4+\cdots+(k-1)f_k\}$$

ここで，与えられたヒストグラムを度数分布表にまとめると右表のようになり，平均値 $\overline{x}$ は,

階級値	100	200	300	400	500	計
度数	4	25	14	3	1	47

$$\overline{x}=\frac{1}{47}(100\times4+200\times25+300\times14+400\times3+500\times1)=\frac{11300}{47}\fallingdotseq 240$$

(3)　分散 $s^2=\dfrac{1}{n}\left\{(x_1-\overline{x})^2f_1+(x_2-\overline{x})^2f_2+\cdots+(x_k-\overline{x})^2f_k\right\}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}(x_i-\overline{x})^2f_i$ より，

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\{x_i{}^2-2\overline{x}x_i+(\overline{x})^2\}f_i=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i{}^2f_i-2\overline{x}\sum_{i=1}^{k}x_if_i+(\overline{x})^2\sum_{i=1}^{k}f_i\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{k}x_i{}^2f_i-2\overline{x}\cdot n\overline{x}+(\overline{x})^2\cdot n\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i{}^2f_i-(\overline{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}(x_1{}^2f_1+x_2{}^2f_2+\cdots+x_k{}^2f_k)-(\overline{x})^2$$

そして，(2)の度数分布表について，分散 s^2 は，$\overline{x}=240$ から

$$s^2=\frac{10^4}{47}(1\times4+4\times25+9\times14+16\times3+25\times1)-240^2$$

$$=\frac{3030000}{47}-57600\fallingdotseq 6900$$

［解　説］

(1)が散布図の読み取り，(2)が平均値と分散についての基本的な計算問題です。なお，(2)では，記述を簡略にするため，シグマ記号を使用して式変形をしました。範囲外ですが。

第３問

問題のページへ

(1)　赤球 2 個と白球 1 個が入っている袋 A, 赤球 3 個と白球 1 個が入っている袋 B がある。このとき, A, B の袋から球をそれぞれ 1 個ずつ取り出し, 空の箱に入れる。

(i)　箱の中の 2 球のうち少なくとも 1 個が赤球であるのは,

(a)　A から赤球, B から赤球を取り出したとき　その確率は, $\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}$ ………①

(b)　A から白球, B から赤球を取り出したとき　その確率は, $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{12}$ ………②

(c)　A から赤球, B から白球を取り出したとき　その確率は, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{12}$ ………③

(a)～(c)より, 少なくとも 1 個が赤球である確率は, $\frac{6}{12}+\frac{3}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$ である。

(ii)　次に, 球が 2 個入っている箱の中から 1 個を取り出す。

このとき, 取り出した球が赤球である確率は, ①②③より,

$$\frac{6}{12}\times\frac{2}{2}+\frac{3}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{17}{24}$$

取り出した球が赤球で, しかも B の袋に入っていた球である確率は, ①②より,

$$\frac{6}{12}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{9}{24}$$

すると, 取り出した球が赤球であったときに, それが B の袋に入っていたものである条件付き確率は, $\frac{9}{24}\div\frac{17}{24}=\frac{9}{17}$ である。

(2)　A, B の袋から球をそれぞれ 2 個ずつ取り出し, 空の箱に入れる。

(i)　箱の中の 4 球のうち 2 個が赤球（2 個が白球）であるのは, A から赤球 1 個と白球 1 個, B から赤球 1 個と白球 1 個を取り出したときより, その確率は,

$$\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}\ \cdots\cdots\cdots④$$

また, 箱の中の 4 球のうち 3 個が赤球（1 個が白球）であるのは,

(a)　A から赤球 2 個, B から赤球 1 個と白球 1 個を取り出したとき
その確率は, $\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$ ………⑤

(b)　A から赤球 1 個と白球 1 個, B から赤球 2 個を取り出したとき
その確率は, $\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$ ………⑥

(a)(b)より, 箱の中の 4 球のうち 3 個が赤球である確率は, $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ である。

(ii)　箱の中の 4 球すべてが赤球であるのは, A から赤球 2 個, B から赤球 2 個を取り出したときより, その確率は,

$$\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

次に, 球が 4 個入っている箱の中から 2 個を取り出す。

このとき，取り出した球がどちらも赤球である確率は，④〜⑦より，

$$\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{1}{6}\times\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{18}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{17}{36}$$

また，取り出した球がどちらも赤球で，しかも 1 個のみが B の袋(1 個が A の袋)に入っていた球である確率は，④〜⑦より，

$$\frac{1}{3}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{1}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{1}{3}\times\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}+\frac{1}{6}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

すると，取り出した 2 個の球がどちらも赤球であったときに，それらのうちの 1 個のみが B の袋に入っていたものである条件付き確率は，$\frac{1}{3}\div\frac{17}{36}=\frac{12}{17}$ である。

［解　説］

条件付き確率についての問題です。解答例では，ストレートな場合分けによって記述したため，見かけよりも計算量が多く，完答するにはかなり時間を費やします。

第４問

問題のページへ

(1)　整数 a, b, c, d に対して，$a^2+b^2+c^2+d^2=m \quad (a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)$………①

$m=14$ のとき，①から，

$$a^2+b^2+c^2+d^2=14 \quad (a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，②から，$a^2 \leqq 14 \leqq a^2+a^2+a^2+a^2=4a^2$ となり，

$$\frac{7}{2} \leqq a^2 \leqq 14,\ a=2,\ 3$$

(i)　$a=2$ のとき　②から $b^2+c^2+d^2=10\ (2 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)$

すると，$b \leqq 2$ かつ $b^2 \leqq 10 \leqq 3b^2$ から $\frac{10}{3} \leqq b^2 \leqq 4$ なので，$b=2$ となる。このとき，$c^2+d^2=6\ (2 \geqq c \geqq d \geqq 0)$ となるが，この式を満たす $(c,\ d)$ は存在しない。

(ii)　$a=3$ のとき　②から $b^2+c^2+d^2=5\ (3 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)$

すると，$b \leqq 3$ かつ $b^2 \leqq 5 \leqq 3b^2$ から $\frac{5}{3} \leqq b^2 \leqq 5$ なので，$b=2$ となる。

$b=2$ のとき，$c^2+d^2=1\ (2 \geqq c \geqq d \geqq 0)$ から，$(c,\ d)=(1,\ 0)$ である。

(i)(ii)より，②を満たす $(a,\ b,\ c,\ d)$ は $(3,\ 2,\ 1,\ 0)$ である。

また，$m=28$ とき，①から，

$$a^2+b^2+c^2+d^2=28 \quad (a \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)\cdots\cdots\cdots③$$

同様にすると，③から $7 \leqq a^2 \leqq 28$ となり，$a=3,\ 4,\ 5$

(iii)　$a=3$ のとき　③から $b^2+c^2+d^2=19\ (3 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)$

すると，$b \leqq 3$ かつ $b^2 \leqq 19 \leqq 3b^2$ から $\frac{19}{3} \leqq b^2 \leqq 9$ なので，$b=3$ となる。

$b=3$ のとき，$c^2+d^2=10\ (3 \geqq c \geqq d \geqq 0)$ から，$(c,\ d)=(3,\ 1)$ である。

(iv)　$a=4$ のとき　③から $b^2+c^2+d^2=12\ (4 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)$

すると，$b \leqq 4$ かつ $b^2 \leqq 12 \leqq 3b^2$ から $4 \leqq b^2 \leqq 12$ なので，$b=2,\ 3$ となる。

$b=2$ のとき，$c^2+d^2=8\ (2 \geqq c \geqq d \geqq 0)$ から，$(c,\ d)=(2,\ 2)$ である。

$b=3$ のとき，$c^2+d^2=3\ (3 \geqq c \geqq d \geqq 0)$ から，満たす $(c,\ d)$ は存在しない。

(v)　$a=5$ のとき　③から $b^2+c^2+d^2=3\ (5 \geqq b \geqq c \geqq d \geqq 0)$

すると，$b \leqq 5$ かつ $b^2 \leqq 3 \leqq 3b^2$ から $1 \leqq b^2 \leqq 3$ なので，$b=1$ となる。

$b=1$ のとき，$c^2+d^2=2\ (1 \geqq c \geqq d \geqq 0)$ から，$(c,\ d)=(1,\ 1)$ である。

(iii)～(v)より，③を満たす $(a,\ b,\ c,\ d)$ は，

$$(3,\ 3,\ 3,\ 1),\ (4,\ 2,\ 2,\ 2),\ (5,\ 1,\ 1,\ 1)$$

よって，整数 $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の個数は 3 個である。

(2)　a が奇数のとき，$a=2n+1$ (n は整数) と表すと，

$$a^2-1=(2n+1)^2-1=4n^2+4n=4n(n+1)$$

$n(n+1)$ は偶数より，任意の奇数 a に対し a^2-1 は 8 の倍数になる。

ここで，$a=3$ では $a^2-1=8$ となるので，a^2-1 が h の倍数となる最大の正の整数 h は $h=8$ である。

よって，a が奇数のとき，a^2 を 8 で割ったときの余りは 1 である。

a が偶数のとき，$a=2n$ (n は整数) と表すと，a^2 を 8 で割ったときの余りは，n が偶数では 0，n が奇数では 4，すなわち 0 または 4 のいずれかである。

(3)　(2)により，a が奇数のとき $a^2\equiv 1 \pmod 8$，a が偶数のとき $a^2\equiv 0,\ 4 \pmod 8$

すると，$a^2+b^2+c^2+d^2$ が 8 の倍数，すなわち $a^2+b^2+c^2+d^2\equiv 0 \pmod 8$ ならば，整数 $a,\ b,\ c,\ d$ のうち，奇数であるものの個数は 0 個，偶数であるものの個数は 4 個である。

(4)　$m=224=8\times 28$ のとき，①から，

$$a^2+b^2+c^2+d^2=224\quad (a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0)\cdots\cdots\cdots④$$

(3)より，$a,\ b,\ c,\ d$ はすべて偶数なので，

$$a=2a_1,\ b=2b_1,\ c=2c_1,\ d=2d_1\ (a_1\geqq b_1\geqq c_1\geqq d_1\geqq 0)$$

④より，$a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2+d_1{}^2=56\quad (a_1\geqq b_1\geqq c_1\geqq d_1\geqq 0)\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，$56=8\times 7$ から，$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1$ はすべて偶数となり，

$$a_1=2a_2,\ b_1=2b_2,\ c_1=2c_2,\ d_1=2d_2\quad (a_1\geqq b_1\geqq c_1\geqq d_1\geqq 0)$$

⑤より，$a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2+d_2{}^2=14\quad (a_2\geqq b_2\geqq c_2\geqq d_2\geqq 0)$

すると，(1)から，$(a_2,\ b_2,\ c_2,\ d_2)=(3,\ 2,\ 1,\ 0)$ となり，①を満たす整数 $a,\ b,\ c,\ d$ の組は，$(4\times 3,\ 4\times 2,\ 4\times 1,\ 4\times 0)=(12,\ 8,\ 4,\ 0)$ である。

(5)　正の整数 m が 7 の倍数で 896 の約数であるとき，$896=7\times 2^7$ から，

$$m=7,\ 7\times 2,\ 7\times 2^2,\ 7\times 2^3,\ 7\times 2^4,\ 7\times 2^5,\ 7\times 2^6,\ 7\times 2^7$$

すると，①を満たす $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の個数は，

(a)　$m=7$ のとき　①より，$a^2+b^2+c^2+d^2=7\ (a\geqq b\geqq c\geqq d\geqq 0)$

$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 1,\ 1)$ だけより，1 個である。

(b)　$m=7\times 2$ のとき　(1)より 1 個である。

(c)　$m=7\times 2^2$ のとき　(1)より 3 個である。

(d)　$m=7\times 2^3$ のとき　(4)と同様に考えると，(b)と同じく 1 個である。

(e)　$m=7\times 2^4$ のとき　(4)と同様に考えると，(c)と同じく 3 個である。

(f)　$m=7\times 2^5$ のとき　(4)より 1 個である。

(g)　$m=7\times 2^6$ のとき　(4)と同様に考えると，(e)と同じく 3 個である。

(h)　$m=7\times 2^7$ のとき　(4)と同様に考えると，(f)と同じく 1 個である。

(a)～(h)より，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の個数が 3 個であるものは，

$$m=7\times 2^2,\ m=7\times 2^4,\ m=7\times 2^6$$

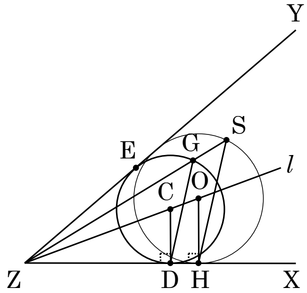
よって，この m の個数は 3 個であり，最大のものは $m=7\times 2^6=448$ となる。

［解 説］

不定方程式についての問題で，かなり難易度が高く，2 次試験に出題されても不思議ではない内容です。なお，上の解答例はプロセスを丁寧に記述しましたが，もっとアバウトでよかったかもしれません。

第５問

問題のページへ



(1) 与えられた**手順**で，点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円 O を作図する。

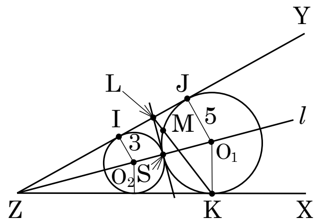
以下，作図した円 O が求める円であることを，「OH＝OS が成り立つ」ことを示すという**構想**に基づいて説明する。

まず，DG // HS より△ZDG と△ZHS は相似なので，DG : HS＝ZD : ZH となり，DC // HO より△ZDC と△ZHO は相似なので，DC : HO＝ZD : ZH となり，

$$\mathrm{DG} : \mathrm{HS} = \mathrm{DC} : \mathrm{HO}$$

ここで，3 点 S, O, H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠OHS より，△CDG と△OHS は相似になり，CD＝CG より OH＝OS である。

なお，3 点 S, O, H が一直線上にある場合は，DG＝2DC で DG : HS＝DC : HO より HS＝2HO となり，OH＝OS である。



(2) ∠XZY の二等分線 l 上にある点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円を $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ とする。円 $\mathrm{O_1}$ は半径 5 で，半直線 ZX と半直線 ZY の接点をそれぞれ K, J，円 $\mathrm{O_2}$ は半径 3 で，半直線 ZY の接点を I とすると，

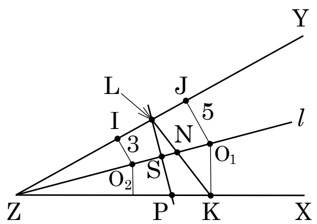
$$\mathrm{IJ} = \sqrt{(5+3)^2-(5-3)^2} = 2\sqrt{15}$$

さらに，円 $\mathrm{O_1}$ と円 $\mathrm{O_2}$ の接点 S における共通接線と半直線 ZY との交点を L とし，直線 LK と円 $\mathrm{O_1}$ との交点で点 K とは異なる点を M とすると，LI＝LS＝LJ から $\mathrm{LS} = \frac{1}{2}\mathrm{IJ} = \sqrt{15}$ となり，方べきの定理から，

$$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{LK} = \mathrm{LS}^2 = 15$$

また，ZI : ZJ＝3 : 5 から ZI : IJ＝3 : 2 となり，

$$\mathrm{ZI} = \frac{3}{2}\mathrm{IJ} = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{15} = 3\sqrt{15}$$



直線 LK と直線 l との交点を N，直線 LS と半直線 ZX との交点を P とすると，内角の二等分線の定理より，

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}} = \frac{\mathrm{ZL}}{\mathrm{ZK}} = \frac{\mathrm{ZI}+\mathrm{IL}}{\mathrm{ZJ}} = \frac{\mathrm{ZI}+\mathrm{IL}}{\mathrm{ZI}+\mathrm{IJ}} = \frac{3\sqrt{15}+\sqrt{15}}{3\sqrt{15}+2\sqrt{15}} = \frac{4}{5}$$

また，$\mathrm{ZP} = \mathrm{ZL} = 4\sqrt{15}$，$\mathrm{PK} = \mathrm{ZK} - \mathrm{ZP} = 5\sqrt{15} - 4\sqrt{15} = \sqrt{15}$ となり，

$$\mathrm{ZS} = \mathrm{ZO_2} + \mathrm{O_2S} = \sqrt{\mathrm{ZI}^2 + \mathrm{O_2I}^2} + 3 = \sqrt{9\cdot 15 + 9} + 3 = 12 + 3 = 15$$

そこで，△ZNK と直線 LP にメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{ZS}}{\mathrm{SN}}\cdot\frac{\mathrm{NL}}{\mathrm{LK}}\cdot\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{PZ}} = 1$$

よって，$\mathrm{SN}=\mathrm{ZS}\cdot\dfrac{\mathrm{NL}}{\mathrm{LK}}\cdot\dfrac{\mathrm{KP}}{\mathrm{PZ}}=15\cdot\dfrac{4}{4+5}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4\sqrt{15}}=\dfrac{5}{3}$ である。

［解 説］

(1)は作図の証明という新傾向問題です。(2)は円と接線を題材にした標準的な求値問題ですが，誘導が詳しくないので，いろいろな考え方ができます。なお，問題量としては多めです。