## 第１問

解答解説のページへ

[1]　(1)　次の**問題Ａ**について考えよう。

> **問題Ａ**　関数 $y = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

$\sin\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} = \dfrac{1}{2}$ であるから，三角関数の合成により

$$y = \boxed{\text{イ}}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}}\right)$$

と変形できる。よって，$y$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{ウ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。

(2)　$p$ を定数とし，次の**問題Ｂ**について考えよう。

> **問題Ｂ**　関数 $y = \sin\theta + p\cos\theta \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよ。

(i)　$p = 0$ のとき，$y$ は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{オ}}}$ で最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

(ii)　$p > 0$ のときは，加法定理 $\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$ を用いると

$$y = \sin\theta + p\cos\theta = \sqrt{\boxed{\text{キ}}}\cos(\theta - \alpha)$$

と表すことができる。ただし，$\alpha$ は

$$\sin\alpha = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad \cos\alpha = \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}},\quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

を満たすものとする。このとき，$y$ は $\theta = \boxed{\text{コ}}$ で最大値 $\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

(iii)　$p < 0$ のとき，$y$ は $\theta = \boxed{\text{シ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

| | | |
|---|---|---|
| ⓪　$-1$ | ①　$1$ | ②　$-p$ |
| ③　$p$ | ④　$1-p$ | ⑤　$1+p$ |
| ⑥　$-p^2$ | ⑦　$p^2$ | ⑧　$1-p^2$ |
| ⑨　$1+p^2$ | ⓐ　$(1-p)^2$ | ⓑ　$(1+p)^2$ |

$\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

| | | |
|---|---|---|
| ⓪　$0$ | ①　$\alpha$ | ②　$\dfrac{\pi}{2}$ |

[2] 2つの関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について考える。

(1) $f(0)=\boxed{\text{セ}}$, $g(0)=\boxed{\text{ソ}}$ である。また，$f(x)$ は相加平均と相乗平均の関係から，$x=\boxed{\text{タ}}$ で最小値 $\boxed{\text{チ}}$ をとる。$g(x)=-2$ となる $x$ の値は

$\log_2\left(\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}-\boxed{\text{テ}}\right)$ である。

(2) 次の①～④は，$x$ にどのような値を代入してもつねに成り立つ。

$f(-x)=\boxed{\text{ト}}$ ………①

$g(-x)=\boxed{\text{ナ}}$ ………②

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\boxed{\text{ニ}}$ ………③

$g(2x)=\boxed{\text{ヌ}}\,f(x)g(x)$ ………④

$\boxed{\text{ト}}$, $\boxed{\text{ナ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ $f(x)$ | ① $-f(x)$ | ② $g(x)$ | ③ $-g(x)$ |

(3) 花子さんと太郎さんは，$f(x)$ と $g(x)$ の性質について話している。

花子：①～④は三角関数の性質に似ているね。
太郎：三角関数の加法定理に類似した式(A)～(D)を考えてみたけど，つねに成り立つ式はあるだろうか。
花子：成り立たない式を見つけるために，式(A)～(D)の $\beta$ に何か具体的な値を代入して調べてみたらどうかな。

**太郎さんが考えた式**

$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta)$ ……… (A)

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……… (B)

$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)$ ……… (C)

$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta)$ ……… (D)

(1), (2)で示されたことのいくつかを利用すると，式(A)～(D)のうち，$\boxed{\text{ネ}}$ 以外の 3 つは成り立たないことがわかる。$\boxed{\text{ネ}}$ は左辺と右辺をそれぞれ計算することによって成り立つことが確かめられる。

$\boxed{\text{ネ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ (A) | ① (B) | ② (C) | ③ (D) |

## 第２問

解答解説のページへ

(1) 座標平面上で，次の 2 つの 2 次関数について考える。

$y=3x^2+2x+3$ ………①

$y=2x^2+2x+3$ ………②

①，②の 2 次関数のグラフには次の**共通点**がある。

**共通点**

・$y$ 軸との交点の $y$ 座標は $\boxed{\text{ア}}$ である。

・$y$ 軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウ}}$ である。

次の ⓪～⑤ の 2 次関数のグラフのうち，$y$ 軸との交点における接線の方程式が $y=\boxed{\text{イ}}x+\boxed{\text{ウ}}$ となるものは $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ $y=3x^2-2x-3$ | ① $y=-3x^2+2x-3$ |
| ② $y=2x^2+2x-3$ | ③ $y=2x^2-2x+3$ |
| ④ $y=-x^2+2x+3$ | ⑤ $y=-x^2-2x+3$ |

$a, b, c$ を 0 でない実数とする。

曲線 $y=ax^2+bx+c$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{オ}}\right)$ における接線を $l$ とすると，その方程式は $y=\boxed{\text{カ}}x+\boxed{\text{キ}}$ である。

接線 $l$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

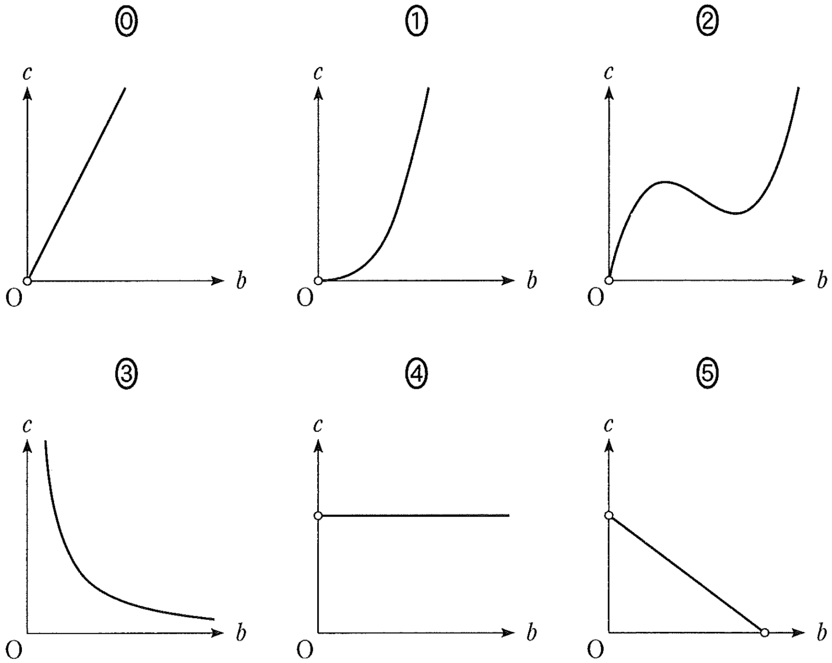
$a,\ b,\ c$ が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 $l$ および直線 $x=\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ で囲まれた図形の面積を $S$ とすると

$$S=\frac{ac^{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}\,b^{\boxed{\text{ス}}}} \text{ ………③}$$

である。

③において，$a=1$ とし，$S$ の値が一定となるように正の実数 $b$, $c$ の値を変化させる。このとき，$b$ と $c$ の関係を表すグラフの概形は $\boxed{\text{セ}}$ である。

$\boxed{\text{セ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。




(2) 座標平面上で，次の 3 つの 3 次関数について考える。

$y=4x^3+2x^2+3x+5$ ………④

$y=-2x^3+7x^2+3x+5$ ………⑤

$y=5x^3-x^2+3x+5$ ………⑥

④，⑤，⑥の 3 次関数のグラフには次の**共通点**がある。

**共通点**

・$y$ 軸との交点の $y$ 座標は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

・$y$ 軸との交点における接線の方程式は $y=\boxed{\text{タ}}\,x+\boxed{\text{チ}}$ である。

$a, b, c, d$ を 0 でない実数とする。

曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 上の点 $\left(0,\ \boxed{\text{ツ}}\right)$ における接線の方程式は $y=\boxed{\text{テ}}\,x+\boxed{\text{ト}}$ である。

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=\boxed{\text{テ}}\,x+\boxed{\text{ト}}$ とし，$f(x)-g(x)$ について考える。

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。$a,\ b,\ c,\ d$ が正の実数であるとき，$y=h(x)$ のグラフの概形は $\boxed{\boxed{\text{ナ}}}$ である。

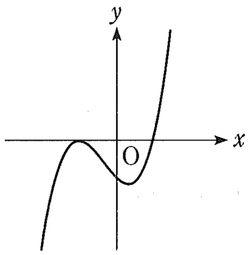
$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の $x$ 座標は $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ である。

また，$x$ が $\dfrac{\boxed{\text{ニヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ と $\boxed{\text{ノ}}$ の間を動くとき，$|f(x)-g(x)|$ の値が最大になるのは，

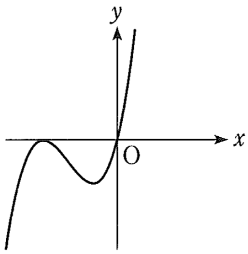
$x=\dfrac{\boxed{\text{ハヒフ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$ のときである。

$\boxed{\text{ナ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

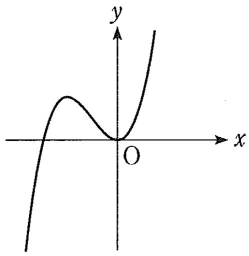
⓪



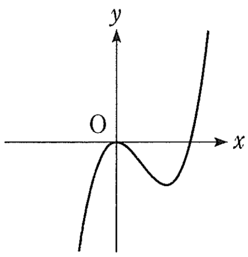

①



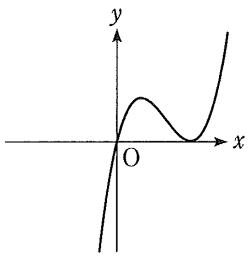

②



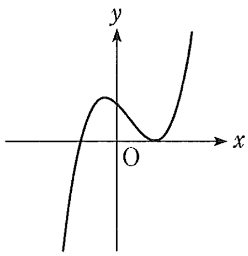

③




④




⑤



## 第３問

解答解説のページへ

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 8 ページの正規分布表を用いてもよい。

Q 高校の校長先生は，ある日，新聞で高校生の読書に関する記事を読んだ。そこで，Q 高校の生徒全員を対象に，直前の 1 週間の読書時間に関して，100 人の生徒を無作為に抽出して調査を行った。その結果，100 人の生徒のうち，この 1 週間に全く読書をしなかった生徒が 36 人であり，100 人の生徒のこの 1 週間の読書時間(分)の平均値は 204 であった。Q 高校の生徒全員のこの 1 週間の読書時間の母平均を $m$，母標準偏差を 150 とする。

(1) 全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とする。このとき，100 人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を $X$ とすると，$X$ は $\boxed{\text{ア}}$ に従う。また，$X$ の平均(期待値)は $\boxed{\text{イウ}}$，標準偏差は $\boxed{\text{エ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

| | |
|---|---|
| ⓪ 正規分布 $N(0,\ 1)$ | ① 二項分布 $B(0,\ 1)$ |
| ② 正規分布 $N(100,\ 0.5)$ | ③ 二項分布 $B(100,\ 0.5)$ |
| ④ 正規分布 $N(100,\ 36)$ | ⑤ 二項分布 $B(100,\ 36)$ |

(2) 標本の大きさ 100 は十分に大きいので，100 人のうち全く読書をしなかった生徒の数は近似的に正規分布に従う。

全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とする。全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を $p_5$ とおく。$p_5$ の近似値を求めると，$p_5 = \boxed{\text{オ}}$ である。

また，全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.4 とするとき，全く読書をしなかった生徒が 36 人以下となる確率を $p_4$ とおくと，$\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ 0.001 | ① 0.003 | ② 0.026 |
| ③ 0.050 | ④ 0.133 | ⑤ 0.497 |

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

| | | |
|---|---|---|
| ⓪ $p_4 < p_5$ | ① $p_4 = p_5$ | ② $p_4 > p_5$ |

(3) 1 週間の読書時間の母平均 $m$ に対する信頼度95%の信頼区間を $C_1 \leqq m \leqq C_2$ とする。標本の大きさ 100 は十分に大きいことと，1 週間の読書時間の標本平均が 204，母標準偏差が 150 であることを用いると，

$$C_1 + C_2 = \boxed{\text{キクケ}},\ C_2 - C_1 = \boxed{\text{コサ}}.\boxed{\text{シ}}$$

であることがわかる。

また，母平均 $m$ と $C_1$，$C_2$ については，$\boxed{\text{ス}}$。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

| | |
|---|---|
| ⓪ | $C_1 \leqq m \leqq C_2$ が必ず成り立つ |
| ① | $m \leqq C_2$ は必ず成り立つが，$C_1 \leqq m$ が成り立つとは限らない |
| ② | $C_1 \leqq m$ は必ず成り立つが，$m \leqq C_2$ が成り立つとは限らない |
| ③ | $C_1 \leqq m$ も $m \leqq C_2$ も成り立つとは限らない |

(4) Q 高校の図書委員長も，校長先生と同じ新聞記事を読んだため，校長先生が調査をしていることを知らずに，図書委員会として校長先生と同様の調査を独自に行った。ただし，調査期間は校長先生による調査と同じ直前の 1 週間であり，対象を Q 高校の生徒全員として 100 人の生徒を無作為に抽出した。その調査における，全く読書をしなかった生徒の数を $n$ とする。

校長先生の調査結果によると全く読書をしなかった生徒は 36 人であり，$\boxed{\text{セ}}$。

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪ | $n$ は必ず 36 に等しい | ① | $n$ は必ず 36 未満である |
| ② | $n$ は必ず 36 より大きい | ③ | $n$ と 36 の大小はわからない |

(5) (4)の図書委員会が行った調査結果による母平均 $m$ に対する信頼度95%の信頼区間を $D_1 \leqq m \leqq D_2$，校長先生が行った調査結果による母平均 $m$ に対する信頼度95%の信頼区間を(3)の $C_1 \leqq m \leqq C_2$ とする。ただし，母集団は同一であり，1 週間の読書時間の母標準偏差は 150 とする。

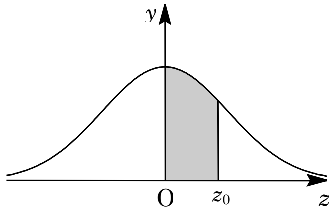
このとき，次の ⓪～⑤ のうち，正しいものは $\boxed{\text{ソ}}$ と $\boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ の解答群（解答の順序は問わない）

| | |
|---|---|
| ⓪ | $C_1 = D_1$ と $C_2 = D_2$ が必ず成り立つ。 |
| ① | $C_1 < D_1$ または $D_1 < C_2$ のどちらか一方のみが必ず成り立つ。 |
| ② | $D_2 < C_1$ または $C_2 < D_1$ となる場合もある。 |
| ③ | $C_2 - C_1 > D_2 - D_1$ が必ず成り立つ。 |
| ④ | $C_2 - C_1 = D_2 - D_1$ が必ず成り立つ。 |
| ⑤ | $C_2 - C_1 < D_2 - D_1$ が必ず成り立つ。 |

# 正 規 分 布 表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。




| $z_0$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1 | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2 | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3 | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4 | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5 | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6 | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7 | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8 | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9 | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0 | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1 | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2 | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3 | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4 | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5 | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6 | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7 | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8 | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9 | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0 | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1 | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2 | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3 | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4 | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5 | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6 | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7 | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8 | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9 | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |

## 第４問

解答解説のページへ

初項 3, 公差 $p$ の等差数列を$\{a_n\}$とし, 初項 3, 公比 $r$ の等比数列を$\{b_n\}$とする。ただし, $p \neq 0$かつ$r \neq 0$とする。さらに, これらの数列が次を満たすとする。

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1}b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ①$$

(1)　$p$ と $r$ の値を求めよう。自然数 $n$ について, $a_n$, $a_{n+1}$, $b_n$ はそれぞれ

$$a_n = \boxed{ア} + (n-1)p \cdots\cdots\cdots ②,\quad a_{n+1} = \boxed{ア} + np \cdots\cdots\cdots ③$$

$$b_n = \boxed{イ}\, r^{n-1}$$

と表される。$r \neq 0$により, すべての自然数 $n$ について, $b_n \neq 0$となる。$\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$ であることから, ①の両辺を$b_n$で割ることにより

$$\boxed{ウ}\, a_{n+1} = r\left(a_n + \boxed{エ}\right) \cdots\cdots\cdots ④$$

が成り立つことがわかる。④に②と③を代入すると

$$\left(r - \boxed{オ}\right)pn = r\left(p - \boxed{カ}\right) + \boxed{キ} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

となる。⑤がすべての $n$ で成り立つことおよび$p \neq 0$により, $r = \boxed{オ}$を得る。さらに, このことから, $p = \boxed{ク}$を得る。

以上から, すべての自然数 $n$ について, $a_n$ と $b_n$ が正であることもわかる。

(2)　$p = \boxed{ク}$, $r = \boxed{オ}$であることから, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$の初項から第 $n$ 項までの和は, それぞれ次の式で与えられる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\, n\left(n + \boxed{サ}\right),\quad \sum_{k=1}^{n} b_k = \boxed{シ}\left(\boxed{オ}^{\,n} - \boxed{ス}\right)$$

(3)　数列$\{a_n\}$に対して, 初項 3 の数列$\{c_n\}$が次を満たすとする。

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1}c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$a_n$ が正であることから, ⑥を変形して, $c_{n+1} = \dfrac{\boxed{セ}\, a_{n+1}}{a_n + \boxed{ソ}}\, c_n$ を得る。さらに, $p = \boxed{ク}$であることから, 数列$\{c_n\}$は$\boxed{タ}$ことがわかる。

$\boxed{タ}$の解答群

| |
|---|
| ⓪　すべての項が同じ値をとる数列である |
| ①　公差が 0 でない等差数列である |
| ②　公比が 1 より大きい等比数列である |
| ③　公比が 1 より小さい等比数列である |
| ④　等差数列でも等比数列でもない |

(4)　$q$，$u$ は定数で，$q \neq 0$ とする。数列$\{b_n\}$に対して，初項 3 の数列$\{d_n\}$が次を満たすとする。

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \cdots\cdots\cdots ⑦$$

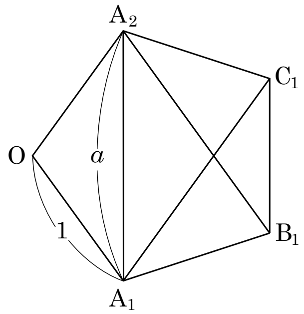
$r = \boxed{\text{オ}}$ であることから，⑦を変形して，$d_{n+1} = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{q}(d_n + u)$ を得る。したがって，数列$\{d_n\}$が，公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となるための必要十分条件は，$q > \boxed{\text{ツ}}$ かつ $u = \boxed{\text{テ}}$ である。

## 第５問

解答解説のページへ

1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを $a$ とする。

(1) 1 辺の長さが 1 の正五角形 $\mathrm{OA_1B_1C_1A_2}$ を考える。




$\angle \mathrm{A_1C_1B_1} = \boxed{\text{アイ}}^\circ$，$\angle \mathrm{C_1A_1A_2} = \boxed{\text{アイ}}^\circ$ となることから，$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}$ は平行である。

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}}$ であるから

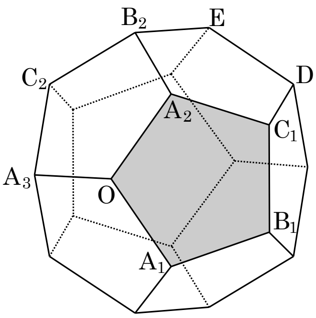
$$\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \frac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\right)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ は平行で，さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}$ も平行であることから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{B_1C_1}} &= \overrightarrow{\mathrm{B_1A_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2O}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \overrightarrow{\mathrm{A_1C_1}}\\ &= -\boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}\\ &= \left(\boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\right)\left(\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\right)\end{aligned}$$

となる。したがって $\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}} = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}$ が成り立つ。$a > 0$ に注意してこれを解くと，$a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

(2) 右の図のような，1 辺の長さが 1 の正十二面体を考える。正十二面体とは，どの面もすべて合同な正五角形であり，どの頂点にも 3 つの面が集まっているへこみのない多面体のことである。




面 $\mathrm{OA_1B_1C_1A_2}$ に着目する。$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}}$ が平行であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \overrightarrow{\mathrm{A_2B_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$$

である。また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} - \overrightarrow{\mathrm{OA_1}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}\right|^2 = \dfrac{\boxed{\text{カ}} + \sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$ に注意すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_2}} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

を得る。

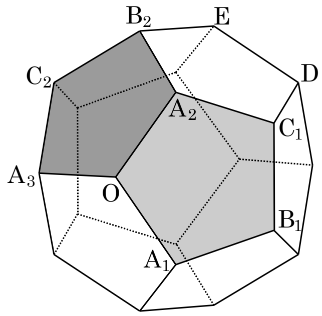
ただし，$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ は，文字 $a$ を用いない形で答えること。

次に，面 $\mathrm{OA_2B_2C_2A_3}$ に着目すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

である。さらに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} = \overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA_1}} = \frac{\boxed{\text{ケ}} - \sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$$




が成り立つことがわかる。ゆえに

$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \boxed{\text{シ}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = \boxed{\text{ス}}$$

である。

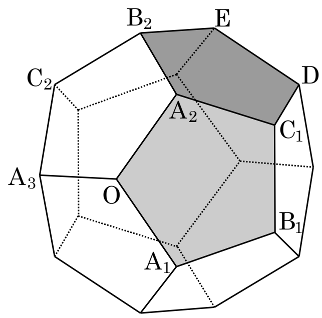
$\boxed{\text{シ}}$，$\boxed{\text{ス}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい）

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⓪　$0$ | ①　$1$ | ②　$-1$ | ③　$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ |
| ④　$\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ | ⑤　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | ⑥　$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ | ⑦　$-\dfrac{1}{2}$ |
| ⑧　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ | ⑨　$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ | | |

最後に，面 $\mathrm{A_2C_1DEB_2}$ に着目する。

$$\overrightarrow{\mathrm{B_2D}} = \boxed{\text{ウ}}\,\overrightarrow{\mathrm{A_2C_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$$

であることに注意すると，4 点 O，$\mathrm{B_1}$，D，$\mathrm{B_2}$ は同一平面上にあり，四角形 $\mathrm{OB_1DB_2}$ は $\boxed{\text{セ}}$ ことがわかる。




$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪　正方形である

①　正方形ではないが，長方形である

②　正方形ではないが，ひし形である

③　長方形でもひし形でもないが，平行四辺形である

④　平行四辺形ではないが，台形である

⑤　台形でない

ただし，少なくとも 1 組の対辺が平行な四角形を台形という。

## 第１問

問題のページへ

[1]　(1)　$y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して，$\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$から，

$$y=2\left(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$から，$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{6}\right)$のとき，最大値 2 をとる。

(2)　$y=\sin\theta+p\cos\theta=p\cos\theta+\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して，

(i)　$p=0$のとき，$y=\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$で最大値 1 をとる。

(ii)　$p>0$のとき，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$とすると，

$$y=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta\right)=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)$$

$-\alpha\leqq\theta-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}-\alpha$から，$\theta-\alpha=0\ (\theta=\alpha)$で最大値$\sqrt{1+p^2}$ をとる。

(iii)　$p<0$のとき，(ii)と同様にすると，$y=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\alpha)\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$

$\theta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$で最大値$p\times0+1=1$をとる。

[2]　(1)　$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$に対して，

$$f(0)=\frac{1+1}{2}=1,\quad g(0)=\frac{1-1}{2}=0$$

また，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot2^{-x}}=1$

等号は$2^x=2^{-x}\ (x=0)$のときに成立するので，$f(x)$は$x=0$で最小値 1 をとる。

$g(x)=-2$とすると，$2^x-2^{-x}=-4$から$2^{2x}+4\cdot2^x-1=0$となり，$2^x>0$より，

$$2^x=-2+\sqrt{5},\quad x=\log_2(-2+\sqrt{5})=\log_2(\sqrt{5}-2)$$

(2)　$f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=f(x)\cdots\cdots①$，$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=-g(x)\cdots\cdots②$

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\frac{2^{2x}+2+2^{-2x}}{4}-\frac{2^{2x}-2+2^{-2x}}{4}=1\cdots\cdots③$$

$g(2x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}$，$f(x)g(x)=\dfrac{2^{2x}-2^{-2x}}{4}$より，$g(2x)=2f(x)g(x)\cdots\cdots④$

(3)　$\beta=0$とすると，(A)に対して，$f(\alpha)=f(\alpha)g(0)+g(\alpha)f(0)=g(\alpha)\cdots\cdots$(a)

(C)に対して，$g(\alpha)=f(\alpha)f(0)+g(\alpha)g(0)=f(\alpha)\cdots\cdots$(c)

ところが，$\alpha=0$のとき(a), (c)は成立しない。

(D)に対して，$g(\alpha)=f(\alpha)g(0)-g(\alpha)f(0)=-g(\alpha)$より$g(\alpha)=0\cdots\cdots$(d)

ところが，$\alpha=\log_2(\sqrt{5}-2)$ のとき(d)は成立しない。

また，(B)に対して，$f(\alpha+\beta)=\dfrac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$ であり，

$$f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=\frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^{\beta}+2^{-\beta}}{2}+\frac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{2^{\beta}-2^{-\beta}}{2}$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{\alpha-\beta}+2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{4}+\frac{2^{\alpha+\beta}-2^{\alpha-\beta}-2^{-\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{4}$$

$$=\frac{2^{\alpha+\beta}+2^{-\alpha-\beta}}{2}$$

したがって，(B)はつねに成り立つ。

### ［解 説］

[1]は三角関数の合成についての基本的な問題です。(2)は誘導に従って処理をしましたが，内積利用という方法もあります。[2]は指数関数の計算問題です。(3)は問題の対話文を参考にして記しました。

## 第２問

問題のページへ

(1)　2 つの 2 次関数 $y=3x^2+2x+3$ ……①，$y=2x^2+2x+3$ ……②に対して，①から $y'=6x+2$，②から $y'=4x+2$ になる。

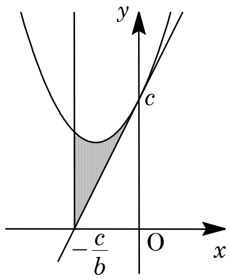
すると，①②はともに $x=0$ のとき $y=3$ で $y'=2$ なので，これらのグラフと $y$ 軸との交点の $y$ 座標は 3 であり，この交点における接線の方程式は $y=2x+3$ である。

そして，与えられた 2 次関数 ⓪～⑤について，$x=0$ のとき $y=3$ で $y'=2$ となるのは，④ $y=-x^2+2x+3$ である。

$a,\ b,\ c$ を 0 でない実数とするとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ に対して，$x=0$ のとき $y=c$，また $y'=2ax+b$ から $x=0$ のとき $y'=b$ なので，点 $(0,\ c)$ における接線 $l$ の方程式は，$y=bx+c$ である。

さて，接線 $l$ と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は，$0=bx+c$ から $x=-\dfrac{c}{b}$ である。

ここで，$a,\ b,\ c$ が正の実数であるとき，曲線 $y=ax^2+bx+c$ と接線 $l$ および直線 $x=-\dfrac{c}{b}$ で囲まれた図形の面積 $S$ は，




$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2\,dx$$

$$=\Big[\frac{a}{3}x^3\Big]_{-\frac{c}{b}}^{0}=\frac{ac^3}{3b^3}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③において，$a=1$ で $S$ の値が一定であるとき $S=\dfrac{c^3}{3b^3}$ から，

$$c^3=3Sb^3,\ \ c=\sqrt[3]{3S}\,b$$

これより，$c$ は $b$ と比例の関係にあるので，そのグラフは ⓪である。

(2)　3 つの 3 次関数 $y=4x^3+2x^2+3x+5$ ……④，$y=-2x^3+7x^2+3x+5$ ……⑤，$y=5x^3-x^2+3x+5$ ……⑥に対して，④から $y'=12x^2+4x+3$，⑤から $y'=-6x^2+14x+3$，⑥から $y'=15x^2-2x+3$ になる。

すると，④⑤⑥はともに $x=0$ のとき $y=5$ で $y'=3$ なので，これらのグラフと $y$ 軸の交点の $y$ 座標は 5 であり，この交点における接線の方程式は $y=3x+5$ である。

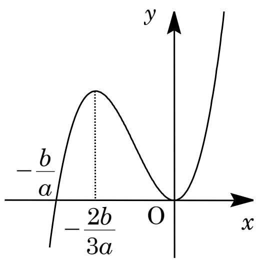
$a,\ b,\ c,\ d$ を 0 でない実数とするとき，曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，$x=0$ のとき $y=d$，また $y'=3ax^2+2bx+c$ から $x=0$ のとき $y'=c$ なので，点 $(0,\ d)$ における接線の方程式は，$y=cx+d$ である。

次に，$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，$g(x)=cx+d$ とおき，

$$h(x)=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$$
$$h'(x)=3ax^2+2bx=x(3ax+2b)$$

ここで，$a,\ b,\ c,\ d$ が正の実数であるとき，

| $x$ | $\cdots$ | $-\dfrac{2b}{3a}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $h(x)$ | ↗ | | ↘ | $0$ | ↗ |




$h(x)$ の増減は右上表のようになり，$y=h(x)$ のグラフの概形は ② である。

そして，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点の $x$ 座標は，$h(x)=0$ から，

$$ax^3+bx^2=0,\ x^2(ax+b)=0$$

よって，$x=-\frac{b}{a}$，0 となり，$-\frac{b}{a} \leqq x \leqq 0$ において，$|f(x)-g(x)|=|h(x)|=h(x)$ の値が最大になるのは，$x=-\frac{2b}{3a}$ のときである。

［解 説］

微積分についての基本題で，計算も平易です。数学ⅡB の平均点が上昇することに寄与すると思えます。なお，$a$，$b$，$c$，$d$ が正の実数という条件は，空欄**ニヌ**以降も適用されているとして，上の解答例を記しています。問題文の $|f(x)-g(x)|$ という表現が気になりますが。

## 第３問

問題のページへ

(1)　全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.5 とするとき，100 人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を $X$ とすると，$X$ は二項分布 $B(100,\ 0.5)$ に従う。このとき，$X$ の平均は $E(X)=100\times0.5=50$，標準偏差は $\sigma(X)=\sqrt{100\times0.5\times(1-0.5)}=\sqrt{25}=5$ である。

(2)　$X$ が近似的に正規分布 $N(50,\ 5^2)$ に従うとき，$X\leqq36$ である確率を $p_5$ とおく。

ここで，$Z=\dfrac{X-50}{5}$ とおくと，$Z$ は $N(0,\ 1)$ に従い，

$$p_5=P(X\leqq36)=P(Z\leqq-2.8)=0.5-0.4974=0.0026\fallingdotseq0.003$$

また，全く読書をしなかった生徒の母比率を 0.4 とするとき，100 人の無作為標本のうちで全く読書をしなかった生徒の数を表す確率変数を $X'$ とすると，$X'$ は二項分布 $B(100,\ 0.4)$ に従う。このとき，$X'$ の平均は $E(X')=100\times0.4=40$，標準偏差は $\sigma(X')=\sqrt{100\times0.4\times(1-0.6)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ である。

$X'$ が近似的に正規分布 $N(40,\ 24)$ に従うとき，$X'\leqq36$ である確率を $p_4$ とおく。

ここで，$Z'=\dfrac{X'-40}{2\sqrt{6}}$ とおくと，$Z'$ は $N(0,\ 1)$ に従い，

$$p_4=P(X'\leqq36)=P\left(Z'\leqq-\frac{4}{2\sqrt{6}}\right)=P\left(Z'\leqq-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

すると，$-2.8<-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ から，$p_4>p_5$ となる。

(3)　1 週間の読書時間の母平均 $m$ に対する信頼度95%の信頼区間を $C_1\leqq m\leqq C_2$ とする。標本の大きさ 100 は十分に大きいことと，1 週間の読書時間の標本平均が 204，母標準偏差が 150 であることから，

$$C_1=204-1.96\times\frac{150}{\sqrt{100}}=204-29.4,\quad C_2=204+1.96\times\frac{150}{\sqrt{100}}=204+29.4$$

これより，$C_1+C_2=408$，$C_2-C_1=58.8$ である。

また，$m$ と $C_1$，$C_2$ については，③「$C_1\leqq m$ も $m\leqq C_2$ も成り立つとは限らない」。

(4)　100 人の生徒を無作為に抽出した校長先生の調査結果では全く読書をしなかった生徒は 36 人，同様な図書委員会の調査結果では $n$ 人とする。

このとき，$n$ と 36 の関係は，③「$n$ と 36 の大小はわからない」。

(5)　図書委員会が行った調査結果による母平均 $m$ に対する信頼度95%の信頼区間を $D_1\leqq m\leqq D_2$ とする。標本平均を $x_0$，母標準偏差は 150 であることから，

$$D_1=x_0-29.4,\quad D_2=x_0+29.4$$

与えられた ⓪～⑤のうち正しいものは，②「$D_2<C_1$ または $C_2<D_1$ となる場合もある」，④「$C_2-C_1=D_2-D_1$ が必ず成り立つ」である。

［解 説］

統計的な推測についての標準的な問題です。ただ，問題文中に重複した記述が散見されるため，その整理が重要になってきます。なお，計算量は少なめです。

## 第４問

問題のページへ

(1) 初項 3, 公差 $p$ の等差数列 $\{a_n\}$, 初項 3, 公比 $r$ の等比数列 $\{b_n\}$ に対して,

$$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1}b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots①$$

このとき, $a_n = 3+(n-1)p \cdots\cdots②$, $a_{n+1} = 3+np \cdots\cdots③$, $b_n = 3r^{n-1}$

ここで, $r \neq 0$ から $b_n \neq 0$ であり, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = r$ に注意すると, ①から,

$$a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} - 2a_{n+1} + 3\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n} = 0,\ \ 2a_{n+1} = r(a_n+3)\cdots\cdots\cdots④$$

④に②と③を代入すると, $2(3+np) = r\{3+(n-1)p+3\}$ となり,

$$6+2pn = r(6+pn-p),\ \ (r-2)pn = r(p-6)+6\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤がすべての $n$ で成り立つことより, $(r-2)p=0$ かつ $r(p-6)+6=0$

すると, $p \neq 0$ から $r=2$ となり, $2(p-6)+6=0$ から $p=3$ となり,

$$a_n = 3+(n-1)\cdot 3 = 3n > 0,\ \ b_n = 3\cdot 2^{n-1} > 0$$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 3k = \frac{3}{2}n(n+1)$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3(2^n-1)$

(3) 初項 3 の数列 $\{c_n\}$ に対して,

$$a_n c_{n+1} - 4a_{n+1}c_n + 3c_{n+1} = 0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥から $(a_n+3)c_{n+1} = 4a_{n+1}c_n$ となり, $a_n > 0$ なので, $c_{n+1} = \dfrac{4a_{n+1}}{a_n+3}c_n$

$$c_{n+1} = \frac{4\cdot 3(n+1)}{3n+3}c_n = 4c_n$$

よって, 数列 $\{c_n\}$ は公比 4 の等比数列となり, ②があてはまる。

(4) 初項 3 の数列 $\{d_n\}$ に対して,

$$d_n b_{n+1} - q d_{n+1} b_n + u b_{n+1} = 0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦より, $q d_{n+1} b_n = (d_n+u)b_{n+1}$ となり, $q \neq 0$, $b_n > 0$ なので,

$$d_{n+1} = \frac{d_n+u}{q}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2}{q}(d_n+u)$$

すると, 数列 $\{d_n\}$ が, 公比が 0 より大きく 1 より小さい等比数列となる条件は,

$$0 < \frac{2}{q} < 1 \quad かつ \quad u = 0$$

よって, $0 < \dfrac{2}{q}$ から $q > 0$ となり, このとき $\dfrac{2}{q} < 1$ から $q > 2$ である。

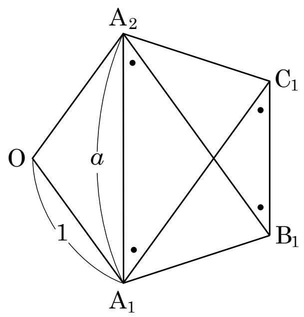
### [解 説]

等差数列と等比数列についての基本題です。同じような設問が 3 回続いています。

## 第5問

問題のページへ

(1) 1辺の長さが1の正五角形$OA_1B_1C_1A_2$に対し，




$$\angle A_1C_1B_1=\angle C_1A_1A_2=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{5}=36°$$

これより，$\overrightarrow{A_1A_2}\,/\!/\,\overrightarrow{B_1C_1}$となり，$\overrightarrow{A_1A_2}=a\overrightarrow{B_1C_1}$から，

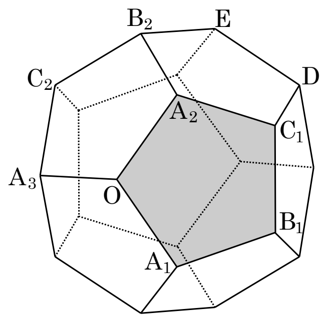
$$\overrightarrow{B_1C_1}=\frac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2}=\frac{1}{a}\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right)$$

同様に，$\overrightarrow{OA_1}\,/\!/\,\overrightarrow{A_2B_1}$かつ$\overrightarrow{OA_2}\,/\!/\,\overrightarrow{A_1C_1}$から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_1C_1}&=\overrightarrow{B_1A_2}+\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}\\&=-a\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_1}+a\overrightarrow{OA_2}\\&=(a-1)\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right)\end{aligned}$$

したがって，$\dfrac{1}{a}=a-1$から$a^2-a-1=0$となり，$a>0$より$a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$である。

(2) 右図のような1辺の長さが1の正十二面体に対して，




$\overrightarrow{OA_1}\,/\!/\,\overrightarrow{A_2B_1}$より，

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_1}=\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}$$

$$\left|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}\right|^2=\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\text{ より，}$$

$$1^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+1^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

よって，$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$となる。

同様に，$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}$，$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$から，

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\left(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\right)=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}&=\left(\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}\right)\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot1^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=0\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{B_2D}=a\overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{OB_1}$より，4点O，$B_1$，D，$B_2$は同一平面上にあり，四角形$OB_1DB_2$は平行四辺形となる。

さらに，$\left|\overrightarrow{OB_1}\right|=\left|\overrightarrow{OB_2}\right|$かつ$\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$より，四角形$OB_1DB_2$は正方形である。

### ［解 説］

細かな誘導がついたベクトルの基本題です。解答量は，見かけに反してかなり少なめです。