第１問

解答解説のページへ

[1]　x を実数とし，$A = x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ とおく。整数 n に対して

$$(x+n)(n+5-x) = x(5-x) + n^2 + \boxed{\text{ア}}\,n$$

であり，したがって，$X = x(5-x)$ とおくと，

$$A = X(X + \boxed{\text{イ}})(X + \boxed{\text{ウエ}})$$

と表せる。

$x = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X = \boxed{\text{オ}}$ であり，$A = 2^{\boxed{\text{カ}}}$ である。

[2]　(1)　全体集合 U を $U = \{x \mid x \text{ は } 20 \text{ 以下の自然数}\}$ とし，次の部分集合 A, B, C を考える。

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 20 \text{ の約数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

$$C = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は偶数}\}$$

集合 A の補集合を $\overline{A}$ と表し，空集合を $\varnothing$ と表す。

次の $\boxed{\text{キ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから１つ選べ。

集合の関係

(a)　$A \subset C$　　　　(b)　$A \cap B = \varnothing$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{キ}}$ である。

	⓪	①	②	③
(a)	正	正	誤	誤
(b)	正	誤	正	誤

次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから１つ選べ。

集合の関係

(c)　$(A \cup C) \cap B = \{6,\ 12,\ 18\}$　　　　(d)　$(\overline{A} \cap C) \cup B = \overline{A} \cap (B \cup C)$

の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{ク}}$ である。

	⓪	①	②	③
(c)	正	正	誤	誤
(d)	正	誤	正	誤

(2)　実数 x に関する次の条件 p, q, r, s を考える。

$$p : |x-2| > 2, \quad q : x < 0, \quad r : x > 4, \quad s : \sqrt{x^2} > 4$$

次の $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちからそれぞれ１つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q または r であることは，p であるための $\boxed{\text{ケ}}$。また，s は r であるための $\boxed{\text{コ}}$。

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない

① 十分条件であるが，必要条件ではない

② 必要十分条件である

③ 必要条件でも十分条件でもない

[3] a を正の実数とし，$f(x)=ax^2-2(a+3)x-3a+21$ とする。2 次関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点の x 座標を p とおくと，$p=\boxed{\text{サ}}+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{a}$ である。

$0\leqq x\leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が $f(4)$ となるような a の値の範囲は，$0<a\leqq\boxed{\text{ス}}$ である。

また，$0\leqq x\leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が $f(p)$ となるような a の値の範囲は，$\boxed{\text{セ}}\leqq a$ である。

したがって，$0\leqq x\leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が 1 であるのは

$$a=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}\ \text{または}\ a=\frac{\boxed{\text{チ}}+\sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$$

のときである。

第２問

解答解説のページへ

[1]　四角形 ABCD において，3 辺の長さをそれぞれ AB＝5，BC＝9，CD＝3，対角線 AC の長さを AC＝6 とする。このとき，

$$\cos\angle ABC = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad \sin\angle ABC = \frac{\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。

ここで，四角形 ABCD は台形であるとする。

次の $\boxed{\text{カ}}$ には下の⓪～②から，$\boxed{\text{キ}}$ には③・④から当てはまるものを 1 つずつ選べ。

CD $\boxed{\text{カ}}$ AB・sin∠ABC であるから $\boxed{\text{キ}}$ である。

⓪　＜　　①　＝　　②　＞

③　辺 AD と辺 BC が平行　④　辺 AB と辺 CD が平行

したがって，$BD = \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

[2]　ある陸上競技大会に出場した選手の身長(単位は cm)と体重(単位は kg)のデータが得られた。男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の 4 つのグループに分けると，それぞれのグループの選手数は，男子短距離が 328 人，男子長距離が 271 人，女子短距離が 319 人，女子長距離が 263 人である。

(1)　次の図 1 および図 2 は，男子短距離，男子長距離，女子短距離，女子長距離の 4 つのグループにおける，身長のヒストグラムおよび箱ひげ図である。

次の $\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図 1 および図 2 から読み取れる内容として正しいものは，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ である。

⓪　4 つのグループのうちで範囲が最も大きいのは，女子短距離グループである。

①　4 つのグループのすべてにおいて，四分位範囲は 12 未満である。

②　男子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大の階級に中央値が入っている。

③　女子長距離グループのヒストグラムでは，度数最大の階級に第 1 四分位数が入っている。

④　すべての選手の中で最も身長の高い選手は，男子長距離グループの中にいる。

⑤　すべての選手の中で最も身長の低い選手は，女子長距離グループの中にいる。

⑥　男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第 3 四分位数は，ともに 180 以上 182 未満である。

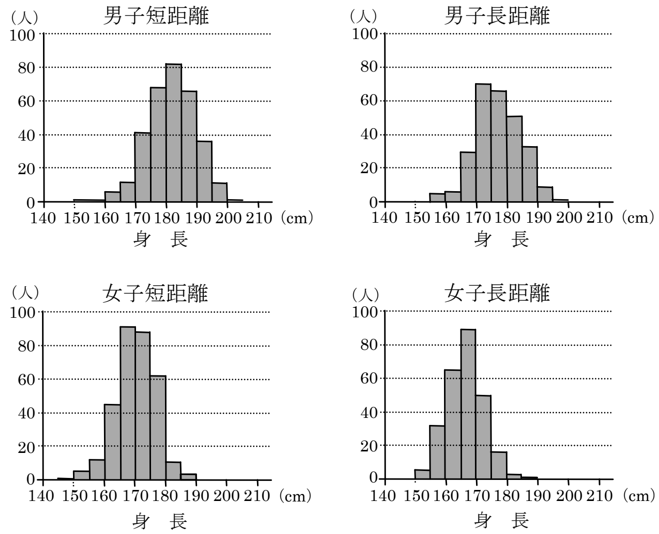


図1　身長のヒストグラム

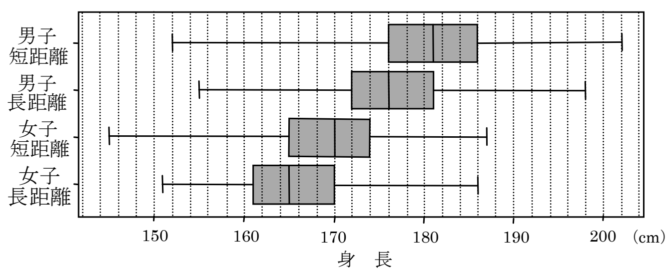


図2　身長の箱ひげ図

(出典：図1, 図2 はガーディアン社のWebページにより作成)

(2) 身長を H, 体重を W とし, X を $X=\left(\dfrac{H}{100}\right)^2$ で, Z を $Z=\dfrac{W}{X}$ で定義する。次の図 3 は, 男子短距離, 男子長距離, 女子短距離, 女子長距離の 4 つのグループにおける X と W のデータの散布図である。ただし, 原点を通り, 傾きが 15, 20, 25, 30 である 4 つの直線 l_1, l_2, l_3, l_4 も補助的に描いている。また, 次の図 4 の(a), (b), (c), (d)で示す Z の 4 つの箱ひげ図は, 男子短距離, 男子長距離, 女子短距離, 女子長距離の 4 つのグループのいずれかの箱ひげ図に対応している。

次の $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ に当てはまるものを, 下の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。

図 3 および図 4 から読み取れる内容として正しいものは, $\boxed{\text{ス}}$, $\boxed{\text{セ}}$ である。

⓪　4 つのグループのすべてにおいて, X と W には負の相関がある。

①　4 つのグループのうちで Z の中央値が一番大きいのは, 男子長距離グループである。

② 4 つのグループのうちで Z の範囲が最小なのは，男子長距離グループである。

③ 4 つのグループのうちで Z の四分位範囲が最小なのは，男子短距離グループである。

④ 女子長距離グループのすべての Z の値は 25 より小さい。

⑤ 男子長距離グループの Z の箱ひげ図は(c)である。

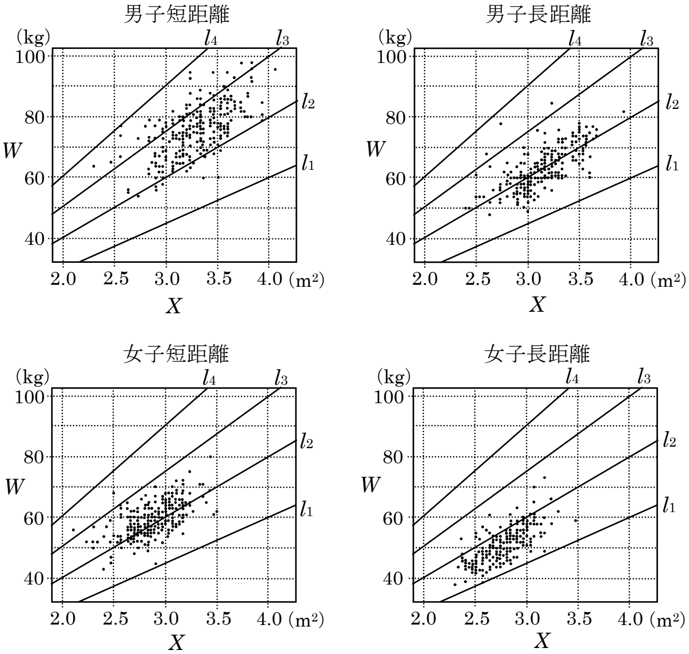


図3 X と W の散布図

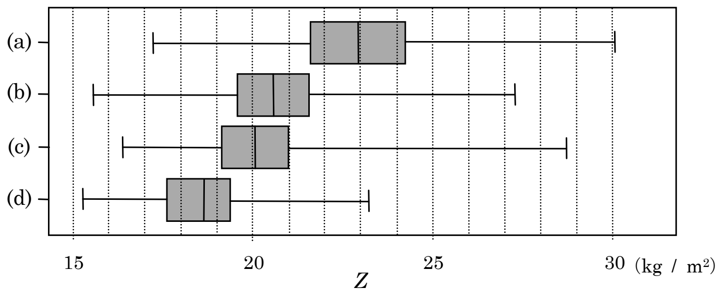


図4 Z の箱ひげ図

（出典：図3，図4 はガーディアン社のWebページにより作成）

(3) n を自然数とする。実数値のデータ x_1，x_2，…，x_n および w_1，w_2，…，w_n に対して，それぞれの平均値を

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\quad \overline{w} = \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{n}$$

とおく。等式 $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\overline{w} = n\overline{x}\,\overline{w}$ などに注意すると，偏差の積の和は

$$(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})$$
$$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-\boxed{\text{ソ}}$$

となることがわかる。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。

⓪ $\overline{x}\,\overline{w}$　① $(\overline{x}\,\overline{w})^2$　② $n\overline{x}\,\overline{w}$　③ $n^2\overline{x}\,\overline{w}$

第３問

解答解説のページへ

一般に，事象 A の確率を $P(A)$ で表す。また，事象 A の余事象を $\overline{A}$ と表し，2 つの事象 A, B の積事象を $A \cap B$ と表す。

大小 2 個のさいころを同時に投げる試行において

A を「大きいさいころについて，4 の目が出る」という事象

B を「2 個のさいころの出た目の和が 7 である」という事象

C を「2 個のさいころの出た目の和が 9 である」という事象

とする。

(1) 事象 A, B, C の確率は，それぞれ

$$P(A)=\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}},\quad P(B)=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad P(C)=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$$

である。

(2) 事象 C が起こったときの事象 A が起こる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ であり，事象 A が起こったときの事象 C が起こる条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3) 次の $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～②のうちからそれぞれ 1 つ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$$P(A \cap B)\ \boxed{\text{サ}}\ P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C)\ \boxed{\text{シ}}\ P(A)P(C)$$

⓪ $<$　　　① $=$　　　② $>$

(4) 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を 2 回繰り返す。1 回目に事象 $A \cap B$ が起こり，2 回目に事象 $\overline{A} \cap C$ が起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セソタ}}}$ である。3 つの事象 A, B, C がいずれもちょうど 1 回ずつ起こる確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$ である。

第４問

解答解説のページへ

(1) 144 を素因数分解すると,

$$144 = 2^{\boxed{\text{ア}}} \times \boxed{\text{イ}}^{\boxed{\text{ウ}}}$$

であり, 144 の正の約数の個数は$\boxed{\text{エオ}}$個である。

(2) 不定方程式 $144x - 7y = 1$ の整数解 x, y の中で, x の絶対値が最小になるのは,

$$x = \boxed{\text{カ}},\ \ y = \boxed{\text{キク}}$$

であり, すべての整数解は, k を整数として

$$x = \boxed{\text{ケ}}\,k + \boxed{\text{カ}},\ \ y = \boxed{\text{コサシ}}\,k + \boxed{\text{キク}}$$

と表される。

(3) 144 の倍数で, 7 で割ったら余りが 1 となる自然数のうち, 正の約数の個数が 18 個である最小のものは$144 \times \boxed{\text{ス}}$であり, 正の約数の個数が 30 個である最小のものは$144 \times \boxed{\text{セソ}}$である。

第５問

解答解説のページへ

$\triangle$ABC において AB＝2，AC＝1，$\angle$A＝90° とする。

$\angle$A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，$\text{BD} = \dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ である。

点 A を通り点 D で辺 BC に接する円と辺 AB との交点で A と異なるものを E とすると，$\text{AB}\cdot\text{BE} = \dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ であるから，$\text{BE} = \dfrac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

次の $\boxed{\text{コ}}$ には下の⓪～②から，$\boxed{\text{サ}}$ には③・④から当てはまるものを 1 つずつ選べ。

$\dfrac{\text{BE}}{\text{BD}} \boxed{\text{コ}} \dfrac{\text{AB}}{\text{BC}}$ であるから，直線 AC と直線 DE の交点は辺 AC の端点 $\boxed{\text{サ}}$ の側の延長上にある。

⓪ ＜　　① ＝　　② ＞　　③ A　　④ C

その交点を F とすると，$\dfrac{\text{CF}}{\text{AF}} = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であるから，$\text{CF} = \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。したがって，BF の長さが決まり，$\dfrac{\text{CF}}{\text{AC}} = \dfrac{\text{BF}}{\text{AB}}$ であることがわかる。

次の $\boxed{\text{タ}}$ には下の⓪～③から当てはまるものを 1 つ選べ。

点 D は$\triangle$ABF の $\boxed{\text{タ}}$。

⓪ 外心である　　① 内心である　　② 重心である

③ 外心，内心，重心のいずれでもない

第１問

問題のページへ

[1]　$(x+n)(n+5-x)=nx+x(5-x)+n^2+n(5-x)=x(5-x)+n^2+5n$

ここで，$X=x(5-x)$ とおくと，$A=x(x+1)(x+2)(5-x)(6-x)(7-x)$ に対し，

$$(x+1)(6-x)=X+1^2+5\cdot 1=X+6$$

$$(x+2)(7-x)=X+2^2+5\cdot 2=X+14$$

よって，$A=X(X+6)(X+14)$ と表せる。

また，$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき，$X=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{25-17}{4}=2$ となり，

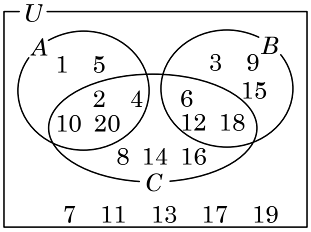
$$A=2(2+6)(2+14)=2\cdot 8\cdot 16=2^8$$

[2]　(1)　$U=\{x\mid x$ は 20 以下の自然数$\}$ に対して，

$$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$$

$$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$$

$$C=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20\}$$



すると，(a) $A\subset C$ は誤，(b) $A\cap B=\varnothing$ は正であり，また，(c) $(A\cup C)\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$ は正，(d) $(\overline{A}\cap C)\cup B=\overline{A}\cap(B\cup C)$ は正である。

(2)　$p:|x-2|>2$，$q:x<0$，$r:x>4$，$s:\sqrt{x^2}>4$ に対して，

$$p:x<0 \text{ または } 4<x,\quad s:x<-4 \text{ または } 4<x$$

これより，q または r であることは，p であるための必要十分条件である。

また，s は r であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

[3]　$a>0$ のとき，$f(x)=ax^2-2(a+3)x-3a+21$ に対して，

$$f(x)=a\left(x-\frac{a+3}{a}\right)^2-\frac{(a+3)^2}{a}-3a+21=a\left(x-\frac{a+3}{a}\right)^2-\frac{4a^2-15a+9}{a}$$

これより，$y=f(x)$ のグラフの頂点の x 座標 p は，$p=\dfrac{a+3}{a}=1+\dfrac{3}{a}$ となる。

すると，$a>0$ から $p>1$ となり，$0\leqq x\leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値は，

(i)　$p\geqq 4$ $(0<a\leqq 1)$ のとき　最小値は $f(4)=5a-3$ である。

(ii)　$1<p\leqq 4$ $(a\geqq 1)$ のとき　最小値は $f(p)=-\dfrac{4a^2-15a+9}{a}$ である。

したがって，$0\leqq x\leqq 4$ における関数 $y=f(x)$ の最小値が 1 であるのは，

(i)　$0<a\leqq 1$ のとき　$5a-3=1$ より $a=\dfrac{4}{5}$ となり，$0<a\leqq 1$ を満たす。

(ii)　$a\geqq 1$ のとき　$-\dfrac{4a^2-15a+9}{a}=1$ より，$4a^2-14a+9=0$ となる。

すると，$a\geqq 1$ から $a=\dfrac{7+\sqrt{13}}{4}$ である。

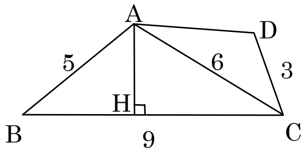
［解 説］

小問集合という構成です。[1]は誘導に従うと計算も簡単です。[2]の前半は解答例のように図を描いて処理をするのが確実でしょう。その際，$A\cap B=\varnothing$ がポイントになります。後半は同値変形だけです。[3]は制限された定義域における 2 次関数の最大・最小問題です。グラフをイメージすれば難しくはありません。

第２問

問題のページへ

[1]　AB＝5，BC＝9，CD＝3，AC＝6 である四角形 ABCD において，



$$\cos\angle ABC=\frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot5\cdot9}=\frac{7}{9}$$

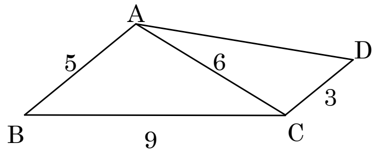
$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\frac{7^2}{9^2}}=\frac{\sqrt{(9+7)(9-7)}}{9}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

さて，$AB\cdot\sin\angle ABC=5\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{20\sqrt{2}}{9}$ なので，

$$\frac{20\sqrt{2}}{9}-3=\frac{1}{9}(20\sqrt{2}-27)>\frac{1}{9}(20\times1.4-27)>0$$

すると，$CD<AB\cdot\sin\angle ABC$ となる。そこで，頂点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろすと $CD<AH$ となるので，辺 AD と辺 BC が平行である場合はない。

よって，四角形 ABCD が台形のとき，辺 AB と辺 CD が平行になり，



$$\cos\angle BCD=\cos(180^\circ-\angle ABC)$$
$$=-\cos\angle ABC=-\frac{7}{9}$$

$$BD^2=9^2+3^2-2\cdot9\cdot3\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)=132$$

したがって，$BD=\sqrt{132}=2\sqrt{33}$ である。

[2]　(1)　箱ひげ図から読み取れるのは，範囲が最も大きいのは男子短距離グループ，四分位範囲はすべて 12 未満，最も身長の高い選手は男子短距離グループの中，最も身長の低い選手は女子短距離グループの中，男子短距離グループの中央値と男子長距離グループの第 3 四分位数はともに 180 以上 182 未満である。

また，ヒストグラムも合わせて読み取れるのは，男子長距離グループでは度数最大の階級（170 以上 175 未満）に中央値は入っていない，女子長距離グループでは度数最大の階級（165 以上 170 未満）に第 1 四分位数は入っていない。

これより，当てはまるものは①と⑥である。

(2)　身長を H，体重を W とし，$X=\left(\frac{H}{100}\right)^2$，$Z=\frac{W}{X}$ とおくとき，散布図から読み取れるのは，X と W には正の相関がある。また，直線 l_1，l_2，l_3，l_4 の傾きを参考にすると，Z は男子短距離グループが最も大きく，女子長距離グループが最も小さい。

さらに，Z の最大値を考え合わせると，箱ひげ図について，

(a)　男子短距離グループ　　(b)　女子短距離グループ

(c)　男子長距離グループ　　(d)　女子長距離グループ

すると，Z の中央値が最も大きいのは男子短距離グループ，Z の範囲が最小なのは女子長距離グループ，Z の四分位範囲が最大なのは男子短距離グループである。

また，女子長距離グループの Z の値は 25 より小さい。

これより，当てはまるものは④と⑤である。

(3) $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，$\overline{w}=\dfrac{w_1+w_2+\cdots+w_n}{n}$ から，

$$\begin{aligned}&(x_1-\overline{x})(w_1-\overline{w})+(x_2-\overline{x})(w_2-\overline{w})+\cdots+(x_n-\overline{x})(w_n-\overline{w})\\&=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\overline{w}-(w_1+w_2+\cdots+w_n)\overline{x}+n\overline{x}\overline{w}\\&=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-n\overline{x}\overline{w}-n\overline{w}\overline{x}+n\overline{x}\overline{w}\\&=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-n\overline{x}\overline{w}\end{aligned}$$

［解 説］

[1]は三角比の応用，[2]はデータの分析のついて，ともに基本的な問題です。誘導が詳しいために，読解力がものを言います。

第３問

問題のページへ

(1) 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行において，大きいさいころに 4 の目が出るという事象を A，2 個のさいころの出た目の和が 7 であるという事象を B，2 個のさいころの出た目の和が 9 であるという事象を C とおく。

すると，大小の目の組合せについて，事象 B が起こるのは $(1,\ 6)$，$(2,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(5,\ 2)$，$(6,\ 1)$ ときで 6 通り，事象 C が起こるのは $(3,\ 6)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 4)$，$(6,\ 3)$ ときで 4 通りある。これより，その確率は，

$$P(A)=\frac{1\times 6}{36}=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6},\ P(C)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

(2) 事象 $A\cap C$ が起こるのは $(4,\ 5)$ の場合だけなので，$P(A\cap C)=\dfrac{1}{36}$ であり，

$$P_C(A)=\frac{P(C\cap A)}{P(C)}=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{1}{36}\div\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$$

$$P_A(C)=\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{1}{36}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

(3) 事象 $A\cap B$ が起こるのは $(4,\ 3)$ の場合だけなので，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$ であり，

$$P(A\cap B)=P(A)P(B),\ P(A\cap C)>P(A)P(C)$$

(4) 大小 2 個のさいころを同時に投げる試行を 2 回繰り返す。

まず，1 回目に事象 $A\cap B$ が起こり，2 回目に事象 $\overline{A}\cap C$ が起こるのは，$\overline{A}\cap C$ の起こる確率が，$P(\overline{A}\cap C)=P(C)-P(A\cap C)=\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{12}$ より，

$$P(A\cap B)P(\overline{A}\cap C)=\frac{1}{36}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{432}$$

また，3 つの事象 A, B, C がいずれも 1 回ずつ起こるのは，$B\cap C=\varnothing$ より，

(i) 事象 $A\cap B$ と事象 $\overline{A}\cap C$ が起こるとき

その確率は，${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{36}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{36\cdot 6}$ となる。

(ii) 事象 $A\cap C$ と事象 $\overline{A}\cap B$ が起こるとき

事象 $\overline{A}\cap B$ が起こる確率が，$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{5}{36}$ より，その確率は，${}_2\mathrm{C}_1\times\dfrac{1}{36}\times\dfrac{5}{36}=\dfrac{5}{36\cdot 18}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{36\cdot 6}+\dfrac{5}{36\cdot 18}=\dfrac{8}{36\cdot 18}=\dfrac{1}{81}$ である。

［解 説］

確率の基本的な問題ですが，最後の設問だけはその意味を理解するのに時間がかかりました。当然，$B\cap C=\varnothing$ だったのですが。

第４問

問題のページへ

(1) $144=2^4\times3^2$ から，144 の正の約数の個数は $(4+1)\times(2+1)=15$ 個である。

(2) 不定方程式 $144x-7y=1$ ……①に対し，①を満たす特殊解を求めるために，144 と 7 に互除法を適用すると，右のようになる。ここで，$a=144$，$b=7$ とおき，互除法のプロセスと対比させて，余りの 1 に着目すると，

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 1 & 1 & 2\,0 \\ 3 & 4 & 7 & 1\,4\,4 \\ & 3 & 4 & 1\,4\,0 \\ \hline & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r|r} & 1 & 1 & 20 \\ -a+21b & a-20b & b & a \\ & -a+21b & a-20b & 20b \\ \hline & 2a-41b & -a+21b & a-20b \end{array}$$

$2a-41b=1$，$2\times144-41\times7=1$

よって，$144\times2-7\times41=1$ ………②

①②より，$144(x-2)-7(y-41)=0$

$144(x-2)=7(y-41)$

ここで，144 と 7 は互いに素なので，k' を整数として，

$x-2=7k'$，$y-41=144k'$

すなわち，$x=7k'+2$，$y=144k'+41$ と表せ，x の絶対値が最小となるのは $k'=0$ のときで，このとき $x=2$，$y=41$ である。

すると，すべての整数解は $k'=k$ とおき，

$x=7k+2$，$y=144k+41$ ………③

(3) ①より $144x=7y+1$ となるので，144 の倍数で，7 で割ったら余りが 1 となる自然数 $144x$ について，③から $x=7k+2$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ と表せることより，

$144x=2^4\times3^2\times2$，$2^4\times3^2\times9$，$2^4\times3^2\times16$，$2^4\times3^2\times23$，$2^4\times3^2\times30$，$\cdots$

素因数分解すると，

$144x=2^5\times3^2$，$2^4\times3^4$，$2^8\times3^2$，$2^4\times3^2\times23$，$2^5\times3^3\times5$，$\cdots$

すると，$144x$ の正の約数の個数は，(1)と同様にすると，順に，

$6\times3=18$，$5\times5=25$，$9\times3=27$，$5\times3\times2=30$，$6\times4\times2=48$，$\cdots$

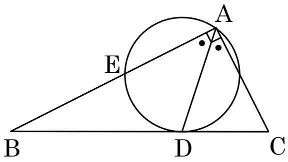
これより，正の約数の個数が 18 個である最小の $144x$ は $2^5\times3^2=144\times2$ であり，正の約数の個数が 30 個である最小の $144x$ は $2^4\times3^2\times23=144\times23$ である。

［解 説］

(3)は不定方程式と除法に関する等式との融合になっており，例年のように出題される(2)までの結論を誘導として解く問題です。なお，真正面から向かう解法も可能ですが，ここはセンター試験に特徴的な，羅列した方が確実で早いタイプでしょう。

第５問

問題のページへ



$\triangle$ABC において，AB $=2$，AC $=1$，$\angle$A $=90°$ より，

$$BC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

AD は$\angle$A の二等分線から，BD : DC ＝ AB : AC ＝ 2 : 1

$$BD=\frac{2\sqrt{5}}{3}$$

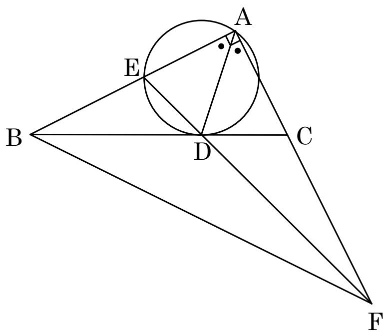
ここで，点 A を通り点 D で辺 BC に接する円に対して，方べきの定理より，

$$BA\cdot BE=BD^2,\ AB\cdot BE=\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{20}{9}$$

よって，$BE=\frac{20}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{10}{9}$ である。

すると，$\frac{BE}{BD}=\frac{10}{9}\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}$，$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ から，$\frac{BE}{BD}<\frac{AB}{BC}$ となる。

すなわち，$\frac{BE}{BA}<\frac{BD}{BC}$ となり，直線 AC と直線 DE の交点は辺 AC の端点 C の側の延長上にある。その交点を F とし，$\triangle$ABC と直線 EF にメネラウスの定理を適用すると，



$$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$$

そこで，$AE=2-\frac{10}{9}=\frac{8}{9}$ から，

$$\frac{CF}{AF}=\frac{EB}{AE}\cdot\frac{DC}{BD}=\frac{10}{8}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$$

これより，CF $=x$ とおくと，$AF=\frac{8}{5}x$ となり，

$$\frac{8}{5}x=1+x,\ x=\frac{5}{3}$$

よって，$AF=\frac{8}{3}$，$BF=\frac{10}{3}$ より $\frac{CF}{AC}=\frac{BF}{AB}=\frac{5}{3}$ となり，BC は$\angle$ABF の二等分線である。そして，AD は$\angle$BAC の二等分線ということを考え合わせると，点 D は$\triangle$ABF の内心である。

［解 説］

平面図形の性質についての基本的な問題です。誘導に沿っていけばスムーズに解答できるのですが，最後の設問の前で，このリズムが少々乱されます。