第１問

解答解説のページへ

[1]　x は正の実数で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ を満たすとする。このとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=\boxed{\text{アイ}}$ であるから，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$ である。さらに

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-\boxed{\text{ウ}}\right)=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オカ}}}$$

である。また，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\boxed{\text{キク}}$ である。

[2]　実数 x に関する 2 つの条件 p，q を

$p: x=1$　　　　$q: x^2=1$

とする。また，条件 p，q の否定をそれぞれ $\overline{p}$，$\overline{q}$ で表す。

(1)　次の $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

q は p であるための $\boxed{\text{ケ}}$。　　$\overline{p}$ は q であるための $\boxed{\text{コ}}$。

(p または $\overline{q}$)は q であるための $\boxed{\text{サ}}$。　　($\overline{p}$ かつ q)は q であるための $\boxed{\text{シ}}$。

⓪　必要条件だが十分条件でない　　①　十分条件だが必要条件でない

②　必要十分条件である　　③　必要条件でも十分条件でもない

(2)　実数 x に関する条件 r を，$r: x>0$ とする。次の $\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑦のうちから 1 つ選べ。

3 つの命題

A：「(p かつ q) $\Longrightarrow r$」　　B：「$q \Longrightarrow r$」　　C：「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」

の真偽について正しいものは $\boxed{\text{ス}}$ である。

⓪　A は真，B は真，C は真　　①　A は真，B は真，C は偽

②　A は真，B は偽，C は真　　③　A は真，B は偽，C は偽

④　A は偽，B は真，C は真　　⑤　A は偽，B は真，C は偽

⑥　A は偽，B は偽，C は真　　⑦　A は偽，B は偽，C は偽

[3]　a を定数とし，$g(x)=x^2-2(3a^2+5a)x+18a^4+30a^3+49a^2+16$ とおく。2 次関数 $y=g(x)$ のグラフの頂点は

$$\left(\boxed{\text{セ}}a^2+\boxed{\text{ソ}}a,\ \boxed{\text{タ}}a^4+\boxed{\text{チツ}}a^2+\boxed{\text{テト}}\right)$$

である。a が実数全体を動くとき，頂点の x 座標の最小値は $-\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌネ}}}$ である。次に，$t=a^2$ とおくと，頂点の y 座標は，$\boxed{\text{タ}}t^2+\boxed{\text{チツ}}t+\boxed{\text{テト}}$ と表せる。したがって，a が実数全体を動くとき，頂点の y 座標の最小値は $\boxed{\text{ノハ}}$ である。

第２問

解答解説のページへ

[1]　△ABC において，$AB = \sqrt{3} - 1$，$BC = \sqrt{3} + 1$，$\angle ABC = 60°$ とする。

(1)　$AC = \sqrt{\boxed{ア}}$ であるから，△ABC の外接円の半径は $\sqrt{\boxed{イ}}$ であり

$$\sin\angle BAC = \frac{\sqrt{\boxed{ウ}} + \sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$$

である。ただし，$\boxed{ウ}$，$\boxed{エ}$ の解答の順序は問わない。

(2)　辺 AC 上に点 D を，△ABD の面積が $\frac{\sqrt{2}}{6}$ になるようにとるとき

$$AB \cdot AD = \frac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}} - \boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

であるから，$AD = \dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

[2]　スキージャンプは，飛距離および空中姿勢の美しさを競う競技である。選手は斜面を滑り降り，斜面の端から空中に飛び出す。飛距離 D（単位は m）から得点 X が決まり，空中姿勢から得点 Y が決まる。ある大会における 58 回のジャンプについて考える。

(1)　得点 X，得点 Y および飛び出すときの速度 V（単位は km/h）について，図 1 の 3 つの散布図を得た。

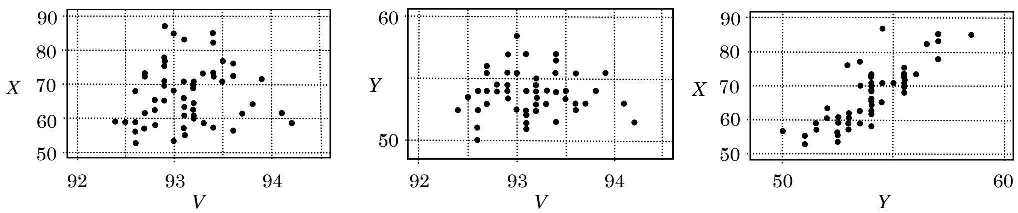


図　1
（出典：国際スキー連盟のWebページよりに作成）

次の $\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ に当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから 1 つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図 1 から読み取れることとして正しいものは，$\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ である。

⓪　X と V の間の相関は，X と Y との相関より強い。

①　X と Y の間には正の相関がある。

②　V が最大のジャンプは，X も最大である。

③　V が最大のジャンプは，Y も最大である。

④　Y が最小のジャンプは，X は最小ではない。

⑤ Xが 80 以上のジャンプは，すべて Vが 93 以上である。

⑥ Yが 55 以上かつ Vが 94 以上のジャンプはない。

(2) 得点 Xは，飛距離 Dから次の計算式によって算出される。

$$X = 1.80 \times (D - 125.0) + 60.0$$

次の $\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$ にそれぞれ当てはまるものを，下の⓪～⑥のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

・Xの分散は，Dの分散の $\boxed{ソ}$ 倍になる。

・Xと Yの共分散は，Dと Yの共分散の $\boxed{タ}$ 倍である。ただし，共分散は，2 つの変量のそれぞれにおいて平均値からの偏差を求め，偏差の積の平均値として定義される。

・Xと Yの相関係数は，Dと Yの相関係数の $\boxed{チ}$ 倍である。

⓪ -125　① -1.08　② 1　③ 1.80　④ 3.24

⑤ 3.60　⑥ 60.0

(3) 58 回のジャンプは 29 名の選手が 2 回ずつ行ったものである。1 回目の $X+Y$ (得点 Xと得点 Yの和)の値にするヒストグラムと 2 回目の $X+Y$の値に対するヒストグラムは図 2 の A，B のうちのいずれかである。また，1 回目の $X+Y$の値に対する箱ひげ図と 2 回目の $X+Y$の値に対する箱ひげ図は図 3 の a，b のいずれかである。ただし，1 回目の $X+Y$の最小値は 108.0 であった。

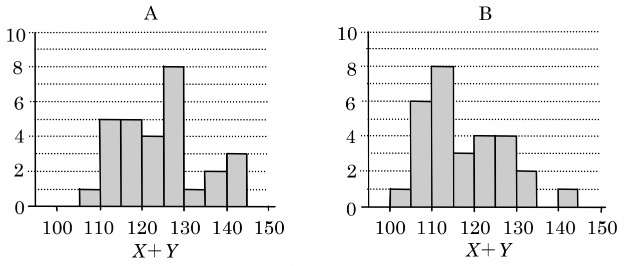


図 2
（出典：国際スキー連盟のWebページにより作成）

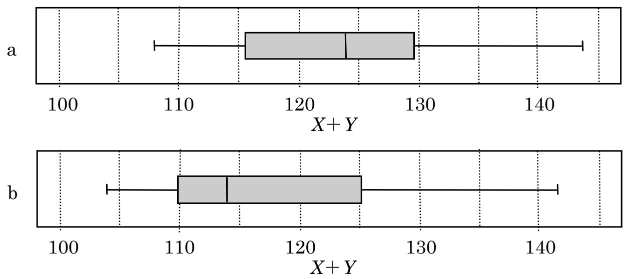


図 3
（出典：国際スキー連盟のWebページにより作成）

次の ツ に当てはまるものを，下の表の⓪～③のうちから1つ選べ。

1 回目の $X+Y$ の値について，ヒストグラムおよび箱ひげ図の組合せとして正しいものは， ツ である。

	⓪	①	②	③
ヒストグラム	A	A	B	B
箱ひげ図	a	b	a	b

次の テ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから1つ選べ。

図3から読み取れることとして正しいものは， テ である。

⓪ 1回目の $X+Y$ の四分位範囲は, 2回目の $X+Y$ の四分位範囲より大きい。

① 1回目の $X+Y$ の中央値は，2回目の $X+Y$ の中央値より大きい。

② 1回目の $X+Y$ の最大値は，2回目の $X+Y$ の最大値より小さい。

③ 1回目の $X+Y$ の最小値は，2回目の $X+Y$ の最小値より小さい。

第３問

解答解説のページへ

あたりが 2 本, はずれが 2 本の合計 4 本からなるくじがある。A, B, C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。ただし, 1 度引いたくじはもとに戻さない。

(1)　A, B の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_1 の確率は, $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2)　次の $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを, 下の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。

A, B, C の 3 人で 2 本のあたりのくじを引く事象 E は, 3 つの排反な事象 $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ の和事象である。

⓪ A がはずれのくじを引く事象　① A だけがはずれのくじを引く事象
② B がはずれのくじを引く事象　③ B だけがはずれのくじを引く事象
④ C がはずれのくじを引く事象　⑤ C だけがはずれのくじを引く事象

また, その和事象の確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(3)　事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率は, $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(4)　次の $\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ に当てはまるものを, 下の⓪～⑤のうちから 1 つずつ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。

B, C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_2 は, 3 つの排反な事象 $\boxed{\text{コ}}$, $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ の和事象である。

⓪ A がはずれのくじを引く事象　① A だけがはずれのくじを引く事象
② B がはずれのくじを引く事象　③ B だけがはずれのくじを引く事象
④ C がはずれのくじを引く事象　⑤ C だけがはずれのくじを引く事象

また, その和事象の確率は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。他方, A, C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_3 の確率は $\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。

(5)　次の $\boxed{\text{チ}}$ に当てはまるものを, 下の⓪～⑥のうちから 1 つ選べ。

事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 p_1, 事象 E_2 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 p_2, 事象 E_3 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 p_3 の間の大小関係は, $\boxed{\text{チ}}$ である。

⓪ $p_1 < p_2 < p_3$　① $p_1 > p_2 > p_3$　② $p_1 < p_2 = p_3$

③ $p_1 > p_2 = p_3$　④ $p_1 = p_2 < p_3$　⑤ $p_1 = p_2 > p_3$

⑥ $p_1 = p_2 = p_3$

第４問

解答解説のページへ

(1) 百の位の数が 3, 十の位の数が 7, 一の位の数が a である 3 桁の自然数を $37a$ と表記する。

$37a$ が 4 で割り切れるのは, $a=$ $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ のときである。ただし, $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ の解答の順序は問わない。

(2) 千の位の数が 7, 百の位の数が b, 十の位の数が 5, 一の位の数が c である 4 桁の自然数を $7b5c$ と表記する。

$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れる b, c の組は, 全部で $\boxed{\text{ウ}}$ 個ある。これらのうち, $7b5c$ の値が最小になるのは $b=$ $\boxed{\text{エ}}$, $c=$ $\boxed{\text{オ}}$ のときで, $7b5c$ の値が最大になるのは $b=$ $\boxed{\text{カ}}$, $c=$ $\boxed{\text{キ}}$ のときである。また, $7b5c=(6\times n)^2$ となる b, c と自然数 n は, $b=$ $\boxed{\text{ク}}$, $c=$ $\boxed{\text{ケ}}$, $n=$ $\boxed{\text{コサ}}$ である。

(3) 1188 の正の約数は全部で $\boxed{\text{シス}}$ 個ある。これらのうち, 2 の倍数は $\boxed{\text{セソ}}$ 個, 4 の倍数は $\boxed{\text{タ}}$ 個ある。1188 のすべての正の約数の積を 2 進法で表すと, 末尾には 0 が連続して $\boxed{\text{チツ}}$ 個並ぶ。

第５問

解答解説のページへ

△ABC において，AB＝3，BC＝8，AC＝7 とする。

(1) 辺 AC 上に点 D を AD＝3 となるようにとり，△ABD の外接円と直線 BC の交点で B と異なるものを E とする。このとき，BC·CE＝ $\boxed{アイ}$ であるから，

$\mathrm{CE}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。

直線 AB と直線 DE の交点を F とするとき，$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{AF}}=\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ であるから，

$\mathrm{AF}=\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コ}}$ である。

(2) ∠ABC＝ $\boxed{サシ}$° である。△ABC の内接円の半径は $\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソ}}$ であり，

△ABC の内心を I とすると $\mathrm{BI}=\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ である。

第１問

問題のページへ

[1]　$x>0$ で，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=9$ のとき，$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2=x^2+\dfrac{4}{x^2}+2x\cdot\dfrac{2}{x}=9+4=13$

これより，$x+\dfrac{2}{x}=\sqrt{13}$ となり，

$$x^3+\frac{8}{x^3}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-x\cdot\frac{2}{x}\right)=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(x^2+\frac{4}{x^2}-2\right)=7\sqrt{13}$$

すると，$x^4+\dfrac{16}{x^4}=\left(x^2+\dfrac{4}{x^2}\right)^2-2x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}=81-8=73$

[2]　(1)　条件 $p: x=1$，$q: x^2=1$ に対して，$\overline{p}: x\neq 1$ となり，

$(\overline{p}$ かつ $q): x=-1$　　　　$(p$ または $\overline{q}): x\neq -1$

「$x^2=1 \Longrightarrow x=1$」は偽，「$x=1 \Longrightarrow x^2=1$」は真なので，$q$ は p であるための必要条件だが十分条件でない。

「$x\neq 1 \Longrightarrow x^2=1$」は偽，「$x^2=1 \Longrightarrow x\neq 1$」は偽なので，$\overline{p}$ は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x\neq -1 \Longrightarrow x^2=1$」は偽，「$x^2=1 \Longrightarrow x\neq -1$」は偽なので，$(p$ または $\overline{q})$ は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

「$x=-1 \Longrightarrow x^2=1$」は真，「$x^2=1 \Longrightarrow x=-1$」は偽なので，$(\overline{p}$ かつ $q)$ は q であるための十分条件だが必要条件でない。

(2)　条件 $p: x=1$，$q: x^2=1$，$r: x>0$ に対して，$(p$ かつ $q): x=1$

A:「$(p$ かつ $q) \Longrightarrow r$」すなわち「$x=1 \Longrightarrow x>0$」は真，B:「$q \Longrightarrow r$」すなわち「$x^2=1 \Longrightarrow x>0$」は偽，また「$p \Longrightarrow q$」は真なので，その対偶C:「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」は真である。

[3]　$g(x)=x^2-2(3a^2+5a)x+18a^4+30a^3+49a^2+16$ に対して，

$$g(x)=\{x-(3a^2+5a)\}^2+9a^4+24a^2+16$$

すると，$y=g(x)$ のグラフの頂点は，$(x,\ y)=(3a^2+5a,\ 9a^4+24a^2+16)$ となり，a が実数全体を動くとき，$x=3\left(a+\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{25}{12}$ から x 座標の最小値は $-\dfrac{25}{12}$ である。

次に，$t=a^2$ とおくと $y=9t^2+24t+16$ と表せ，a が実数全体を動くとき t は 0 以上の実数全体を動くことより，y 座標の最小値は 16 である。

［解 説］

数と式および 2 次関数の基本題です。なお，最後の設問は，$t\geqq 0$ を考えると，平方完成の必要はありません。

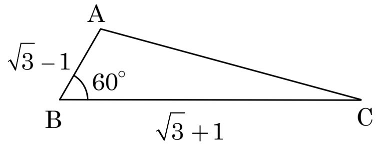
第２問

問題のページへ

[1] (1) △ABC に余弦定理を適用して，

$$AC^2=(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ=6$$

よって，$AC=\sqrt{6}$ となり，△ABC の外接円の半径を R とおくと，正弦定理から，



$$2R=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sin\angle BAC},\ R=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$$

また，$\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ である。

(2) 辺 AC 上に点 D をとり，$\triangle ABD=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ から $\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となるので，

$$AB\cdot AD=\frac{4\sqrt{2}}{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{3}=\frac{2\sqrt{3}-2}{3}$$

これより，$AD=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2}{3}$ である。

[2] (1) まず, 図 1 から以下のことが読み取れる。

(i) X と V の間, Y と V の間に相関は弱く, X と Y の間には正の相関がある。

(ii) V が最大のジャンプは, X も Y も最大でない。

(iii) Y が最小のジャンプは, X は最小ではない。

(iv) X が 80 以上かつ V が 93 未満のジャンプがある。

(v) Y が 55 以上かつ V が 94 以上のジャンプはない。

(i)～(v)より，正しいものは，①，④，⑥である。

(2) 条件より，$X=1.80\times(D-125.0)+60.0=1.80\times D-165.0$ ………(＊)

ここで，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 58$ として，得点 X のデータを $X=x_k$，その平均値を $\overline{x}$，分散を ${s_X}^2$，また飛距離 D のデータを $D=d_k$，その平均値を $\overline{d}$，分散を ${s_D}^2$ とおく。すると, (＊)から，$\overline{x}=1.80\times\overline{d}-165.0$ となり，

$${s_X}^2=(1.80)^2\times{s_D}^2=3.24\times{s_D}^2,\ s_X=1.80\times s_D$$

さらに，y_k，$\overline{y}$，${s_Y}^2$ を同様に定義し, X と Y の共分散を s_{XY}，相関係数を r_{XY}，また D と Y の共分散を s_{DY}，相関係数を r_{DY} とおくと，

$$s_{XY}=\frac{1}{58}\sum_{k=1}^{58}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y})$$

$$=\frac{1}{58}\sum_{k=1}^{58}\{(1.80\times d_k-165.0)-(1.80\times\overline{d}-165.0)\}(y_k-\overline{y})$$

$$=1.80\times\frac{1}{58}\sum_{k=1}^{58}(d_k-\overline{d})(y_k-\overline{y})=1.80\times s_{DY}$$

$$r_{XY}=\frac{s_{XY}}{s_X\,s_Y}=\frac{1.80\times s_{DY}}{1.80\times s_D\,s_Y}=\frac{s_{DY}}{s_D\,s_Y}=r_{DY}$$

(3)　$X+Y$ の値について，1 回目の最小値は 108.0 から，1 回目のヒストグラムは図 2 の A，箱ひげ図は図 3 の a である。すると，2 回目のヒストグラムは図 2 の B，箱ひげ図は図 3 の b となる。すなわち，組合せとして正しいのは0である。

　また，図 3 の箱ひげ図から，以下のことが読み取れる。

(i)　1 回目の $X+Y$ の四分位範囲は，2 回目の $X+Y$ の四分位範囲より小さい。

(ii)　1 回目の $X+Y$ の中央値は，2 回目の $X+Y$ の中央値より大きい。

(iii) 1 回目の $X+Y$ の最大値は，2 回目の $X+Y$ の最大値より大きい。

(iv) 1 回目の $X+Y$ の最小値は，2 回目の $X+Y$ の最小値より大きい。

(i)～(iv)より，正しいものは1である。

［解 説］

図形の計量とデータの分析についての基本的な内容です。なお，変量の変換が，2 年連続で出題されました。そのため，一般的に a，b，c，d を定数とし，$X=aU+b$，$Y=cV+d$ の関係があるとき，$\overline{x}=a\overline{u}+b$，${s_X}^2=a^2{s_U}^2$，$\overline{y}=c\overline{v}+d$，${s_Y}^2=c^2{s_V}^2$ はもちろんのこと，$s_{XY}=ac\cdot s_{UV}$ も「数Ⅰの準公式」となる勢いが出てきて……。

第３問

問題のページへ

	A	B	C
Ⅰ	○	○	×
Ⅱ	○	×	○
Ⅲ	○	×	×
Ⅳ	×	○	○
Ⅴ	×	○	×
Ⅵ	×	×	○

あたりが 2 本，はずれが 2 本の合計 4 本からなるくじを，1 度引いたくじはもとに戻さず，A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。このとき，あたりを○，はずれを×で表すと，全事象は右表のようになる。

そして，いずれの事象も，その確率は $\dfrac{2\cdot1\cdot2}{4\cdot3\cdot2}=\dfrac{1}{6}$ である。

(1)　A, B の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_1 は，表のⅥ以外の事象より，その確率 $P(E_1)$ は，

$$P(E_1)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

(2)　A，B，C の 3 人で 2 本のあたりのくじを引く事象 E は，表のⅠ，Ⅱ，Ⅳの和事象である。すなわち「C だけがはずれのくじを引く事象」と「B だけがはずれのくじを引く事象」と「A だけがはずれのくじを引く事象」の和事象である。

その確率 $P(E)$ は，$P(E)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{2}$ である。

(3)　事象 E_1 が起こったときの事象 E の起こる条件付き確率 $P_{E_1}(E)$ は，(1)(2)より，

$$P_{E_1}(E)=\frac{3}{5}$$

(4)　B，C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_2 は，表のⅠ，Ⅱ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵの和事象である。すなわち「C だけがはずれのくじを引く事象」と「B だけがはずれのくじを引く事象」と「A がはずれのくじを引く事象」の和事象である。

その確率 $P(E_2)$ は，(1)と同様に，$P(E_2)=\dfrac{5}{6}$ である。

また，A，C の少なくとも一方があたりのくじを引く事象 E_3 は，表のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅵの和事象より，その確率 $P(E_3)$ は，(1)と同様に，$P(E_3)=\dfrac{5}{6}$ である。

(5)　(3)より，$p_1=P_{E_1}(E)=\dfrac{3}{5}$ となり，同様に考えると，

$$p_2=P_{E_2}(E)=\frac{3}{5},\ \ p_3=P_{E_3}(E)=\frac{3}{5}$$

よって，$p_1=p_2=p_3$ である。

［解 説］

センター試験の確率では，これまでしばしば見られたことですが，最初に，すべての事象を書きだして整理しておくという作業が，有効になってきます。本問もその 1 つの例で，樹形図もとに表を作れば，計算はほとんど不要です。

第４問

問題のページへ

(1)　$37a$ が 4 で割り切れるのは，$7a$ が 4 で割り切れるときより，$a=2$，6 である。

(2)　$7b5c$ が 4 で割り切れるのは，$5c$ が 4 で割り切れるときより，$c=2$，6 である。

(i)　$c=2$ のとき

$7b52$ が 9 で割り切れるのは，$7+b+5+2=14+b$ が 9 で割り切れるときより，$b=4$ である。

(ii)　$c=6$ のとき

$7b56$ が 9 で割り切れるのは，$7+b+5+6=18+b$ が 9 で割り切れるときより，$b=0$，9 である。

(i)(ii)より，$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れる $(b,\ c)$ の組は，全部で 3 組となる。

その中で，最小になるのは $b=0$，$c=6$ のときで，最大になるのは $b=9$，$c=6$ のときである。

また，自然数 n に対して，$7b5c=(6\times n)^2$ となるのは，$7b5c=4\times 9\times n^2$ から，$7b5c$ が 4 でも 9 でも割り切れることが必要である。

(a)　$(b,\ c)=(4,\ 2)$ のとき　$7452=4\times 9\times 207$

(b)　$(b,\ c)=(0,\ 6)$ のとき　$7056=4\times 9\times 196=(6\times 14)^2$

(c)　$(b,\ c)=(9,\ 6)$ のとき　$7956=4\times 9\times 221$

(a)～(c)より，$7b5c=(6\times n)^2$ となるのは，$b=0$，$c=6$，$n=14$ のときである。

(3)　$1188=2^2\times 3^3\times 11$ より，正の約数は全部で $(2+1)\times(3+1)\times(1+1)=24$ 個ある。

また，これらの約数のうち，2 の倍数は $2\times(3+1)\times(1+1)=16$ 個，4 の倍数は $1\times(3+1)\times(1+1)=8$ 個である。

これより，1188 のすべての正の約数の積を N としたとき，

$$N=2^{(16-8)+8\times 2}\times M=2^{24}\times M\quad (M\text{は奇数})$$

すると，N を 2 進法で表したとき，末尾には 0 が連続して 24 個並ぶ。

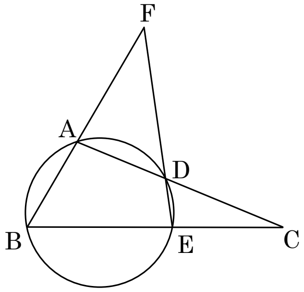
［解 説］

約数・倍数と n 進法に関する問題です。最後の設問は，10 進法ではときどき見かけましたが，2 進法では目新しいものです。しかし，考え方は同じです。

第５問

問題のページへ

(1) 条件より，$AB=3$，$BC=8$，$AC=7$，$AD=3$



方べきの定理から，$BC\cdot CE=AC\cdot CD=7\times 4=28$

$$CE=\frac{28}{BC}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}$$

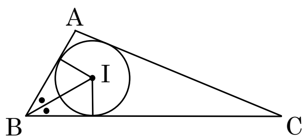
すると，$BE=8-\dfrac{7}{2}=\dfrac{9}{2}$ となり，$\triangle ABC$ と直線 EF にメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CE}{EB}=1,\ \ \frac{BF}{AF}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{EB}{CE}=\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{7}=\frac{12}{7}$$

これより，$\dfrac{AF+3}{AF}=\dfrac{12}{7}$ となり，$7(AF+3)=12AF$ から，

$$5AF=21,\ \ AF=\frac{21}{5}$$

(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると，



$$\cos\angle ABC=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot 3\cdot 8}=\frac{1}{2}$$

よって，$\angle ABC=60^\circ$ である。

すると，$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 8\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$

ここで，$\triangle ABC$ の内接円の半径を r とおくと，$\dfrac{1}{2}(3+8+7)r=6\sqrt{3}$ となり，

$$r=\frac{6\sqrt{3}}{9}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

さらに，$\triangle ABC$ の内心を I とすると，直線 BI は $\angle ABC$ の二等分線となり，

$$BI=\frac{r}{\sin 30^\circ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

［解 説］

平面図形の性質に関する問題ですが，(2)は数Ⅰの頻出題でもあります。ただ，内心という用語のため，数 A での出題になったのかもしれません。