２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

名古屋大学

理系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
名古屋大学
理系数学 25 か年

まえがき

本書には，2001 年度以降に出題された名古屋大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　4 つの実数を $\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$，$\delta=\dfrac{3}{2}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha\beta\gamma=1$ を示せ。

(2)　α，β，γ，δ を小さい順に並べよ。

(3)　$p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ とする。このとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。　[2021]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$（ただし，複号$\pm$はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた $f(x)=0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

[2015]

3　(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$（p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。　[2005]

4　a, b, c を実数とし，実数の組$(x,\ y,\ z)$に関する方程式

(i)　$x+y-2z=3a$，$2x-y-z=3b$，$x-5y+4z=3c$

および

(ii)　$x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1)　方程式(i)が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解$(x,\ y,\ z)$を求めよ。

(2)　方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき，その共通解$(x,\ y,\ z)$は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。　[2004]

■ 図形と式

1　曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

2　実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$を考える。$t$ が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

3　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$がある。

(1)　$a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>0,\ b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2011]

4　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円に，円外の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1)　2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。また $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ であることを示せ。

(2)　点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2007]

5 座標平面上に 3 点O(0, 0)，A(4, 2)，B(6, 0)を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点P(p, q)を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を A$'(t,\ 0)$ $(0 \leqq t \leqq 6)$とするとき，p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点P(p, q)の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点P(p, q)を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点P(p, q)の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

6 O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A: x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l: y = d$ $(0<d<1)$ との交点を P, Q とする。円周 A 上の点R(x, y)は $y>d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S，点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。 [2003]

■ 図形と計量

1 C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a, a, $2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ。 [2004]

2 (1) 平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB} = \mathrm{CD} = a$，$\mathrm{BC} = \mathrm{AD} = b$，$\mathrm{BD} = c$，$\mathrm{AC} = d$ とする。このとき，$a^2 + b^2 = \dfrac{1}{2}(c^2 + d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 3 つの正数 a, b, c $(0<a \leqq b \leqq c)$ が $a^2 + b^2 > c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。 [2003]

■ ベクトル

1 座標空間の 3 点 $\mathrm{A}(3,\ 1,\ 3)$，$\mathrm{B}(4,\ 2,\ 2)$，$\mathrm{C}(4,\ 0,\ 1)$ の定める平面を H とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ($s,\ t$ は非負の実数) を満たすすべての点 P からなる領域を K とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ から平面 H に下ろした垂線の足を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

(3) 領域 K 上の点 P に対して，線分 QP 上の点で $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (r は非負の実数) を満たす点 R が存在することを示せ。

(4) 領域 K において原点 O からの距離が最小となる点 S の座標を求めよ。　[2024]

2 空間内に $\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角二等辺三角形 ABC と平面 P がある。点 A は P 上にあり，点 B と点 C は P 上にはなく，P に関して同じ側に位置している。点 B, C から P に下ろした垂線と P との交点をそれぞれ B'，C' とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}'}+\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{C}'\mathrm{C}}=0$ を示せ。

(2) $\angle\mathrm{B}'\mathrm{AC}'>\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) P 上の三角形 $\mathrm{AB}'\mathrm{C}'$ の辺の長さは短いものから 4，$\sqrt{21}$，7 であった。このとき，辺 AB の長さを求めよ。　[2019]

3 xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を $a,\ b,\ t$ を使って表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。　[2017]

4　座標空間に 8 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $P(1,\ 0,\ 0)$, $Q(1,\ 1,\ 0)$, $R(0,\ 1,\ 0)$, $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 1)$, $D(0,\ 1,\ 1)$をとり, 線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を$N(0,\ 1,\ t)$とし, 3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1)　K の座標を t で表せ。

(2)　四面体 OKLP の体積を$V(t)$とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき, $V(t)$の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。　[2010]

5　三角形 ABC で辺 AC を$s:1-s$に内分する点を P, 辺 BC を$t:1-t$に内分する点を Q, 線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき,

$$\triangle\text{APR の面積} = 2\times(\triangle\text{BQR の面積})$$

が成り立っているとする。

(1)　s を t を用いて表せ。

(2)　極限$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$を求めよ。ただし, t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき, $t\to+0$ と表す。　[2008]

6　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で, 動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速$\frac{1}{2}$で, 動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で, 動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速$\frac{1}{2}$で, 同時に動き出す。

(1)　動き出してから t 秒後$(0\leqq t\leqq 1)$のベクトル$\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$および t を用いて表せ。

(2)　線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t(0\leqq t\leqq 1)$の値を求め, ベクトル$\overrightarrow{OM}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。　[2005]

7　$\triangle$ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は$\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$を満たす正数であるとする。また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A′, B′, C′とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}$, α, β, γ を用いて$\overrightarrow{OA'}$を表せ。

(2)　$\triangle$A′B′C′の外心が O に一致すれば$\alpha=\beta=\gamma$であることを示せ。　[2001]

■ 整数と数列

1　整数 a, b, c に対し次の条件を考える。　　(＊)　$a \geqq b \geqq 0$ かつ $a^2 - b^2 = c$

以下の問いに答えよ。

(1)　$c = 24$, 25, 26 それぞれの場合に条件(＊)をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

(2)　p は 3 以上の素数, n は正の整数, $c = 4p^{2n}$ とする。このとき, 条件(＊)をみたす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2025]

2　$0 \leqq a < 1$ を満たす実数 a に対し, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = 3\left[a_n + \frac{1}{2}\right] - 2a_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

という漸化式で定める。ただし $[x]$ は x 以下の最大の整数を表す。以下の問いに答えよ。

(1)　a が $0 \leqq a < 1$ の範囲を動くとき, 点 $(x,\ y) = (a_1,\ a_2)$ の軌跡を xy 平面上に図示せよ。

(2)　$a_n - [a_n] \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば, $a_n < a_{n+1}$ であることを示せ。

(3)　$a_n > a_{n+1}$ ならば, $a_{n+1} = 3[a_n] - 2a_n$ かつ $[a_{n+1}] = [a_n] - 1$ であることを示せ。

(4)　ある 2 以上の自然数 k に対して, $a_1 > a_2 > \cdots > a_k$ が成り立つとする。このとき a_k を a の式で表せ。　[2021]

3　3 つの数 2, $m^2 + 1$, $m^4 + 1$ が相異なる素数となる正の整数 m が 1 つ固定されているものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　3 つの数 2, $m^2 + 1$, $m^4 + 1$ のうち, 1 つを a とし, 残り 2 つを b, c とする。このとき $a^2 < bc$ となる a をすべて求めよ。

(2)　正の整数 x, y が $(x + y)(x^2 + 2y^2 + 2xy) = 2(m^2 + 1)(m^4 + 1)$ をみたしているとき x, y を求めよ。　[2020]

4　正の整数 n の正の平方根 $\sqrt{n}$ は整数ではなく, それを 10 進法で表すと, 小数第 1 位は 0 であり, 第 2 位は 0 以外の数であるとする。

(1)　このような n の中で最小のものを求めよ。

(2)　このような n を小さいものから順に並べたときに 10 番目にくるものを求めよ。

[2019]

5　p を素数, a, b を整数とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$(a+b)^p - a^p - b^p$ は p で割り切れることを示せ。

(2)　$(a+2)^p - a^p$ は偶数であることを示せ。

(3)　$(a+2)^p - a^p$ を $2p$ で割ったときの余りを求めよ。　[2018]

6　次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(*)\begin{cases}2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である。}\\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である。}\\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である。}\end{cases}$$

(2)　2 つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$は, 次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について, a_n, b_n は整数であり, 2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}, b_{n+1} である。

このとき,

(i)　正の整数 m で, $|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$の組をすべて求めよ。　[2016]

7　負でない整数 N が与えられたとき, $a_1=N$, $a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は, 実数 a の整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。

(1)　$a_3=1$ となるような N をすべて求めよ。

(2)　$0 \leqq N < 2^{10}$ を満たす整数 N のうちで, N から定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3)　0 から $2^{100}-1$ までの 2^{100} 個の整数から等しい確率で N を選び, 数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

(＊)　数列$\{a_n\}$のある項が m となる確率が $\dfrac{1}{100}$ 以下となる。　[2014]

8　$x>0$ とし, $f(x)=\log x^{100}$ とおく。

(1)　次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{100}{x+1} < f(x+1)-f(x) < \dfrac{100}{x}$

(2)　実数 a の整数部分($k \leqq a < k+1$ となる整数 k)を$[a]$で表す。整数$[f(1)]$, $[f(2)]$, $[f(3)]$, $\cdots$, $[f(1000)]$のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば, $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。　[2013]

9　$k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,\ S_k(1) = 1\ (k \geqq 0)$$
$$T_m(n) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n)$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n)\quad (m \geqq 2)$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

10　m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m + 1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s = 3^{r-1}m$ とする。$2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

11　a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし, x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

12　x, y を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x + 3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。　[2009]

13　次の問いに答えよ。

(1)　$3x + 2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

14　正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$，$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}\ (n \geqq 2)$ で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。 [2004]

15　関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする。 [2002]

■ 確率

1　コイン①, …, ⑥が右図のようにマス目の中に置かれている。

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える。例えば，①を選べば，②，④を裏返し，②を選べば，①，③，⑤を裏返す。最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする。正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　コイン①, …, ⑥をグループ A, B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる。

　　n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる。

　どのようにグループ分けすればよいかを答えよ。

(3)　p_4 を求めよ。 [2025]

2　袋の中にいくつかの赤玉と白玉が入っている。すべての玉に対する赤玉の割合を p $(0 \leqq p \leqq 1)$ とする。袋から無作為に玉を 1 つ取り出して袋に戻す試行を行う。試行を n 回行うとき，赤玉を k 回以上取り出す確率を $f(k)$ とおく。

(1)　$n \geqq 2$ に対して，$f(1)$ と $f(2)$ を求めよ。

(2)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $f(k)=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\displaystyle\int_0^p x^{k-1}(1-x)^{n-k}dx$ を示せ。

(3)　自然数 k に対して，定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^k(1-x)^k dx$ を求めよ。　[2024]

3　1 つのサイコロを 3 回投げる。1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。なおサイコロは 1 から 6 までの目が等しい確率で出るものとする。

(1)　$ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。　[2022]

4　1 から 12 までの数字が右の図のように並べて書かれている。以下のルール(a)，(b)と(終了条件)を用いたゲームを行う。ゲームを開始すると，最初に(a)を行い，(終了条件)が満たされたならゲームを終了する。そうでなければ(終了条件)が満たされるまで(b)の操作を繰り返す。ただし(a)と(b)における数字を選ぶ操作はすべて独立な試行とする。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10	11			
12				

(a)　1 から 12 までの数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，右の図において選んだ数字を丸で囲み，その上に石を置く。

(b)　石が置かれた位置の水平右側または垂直下側の位置にある数字のどれか 1 つを等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。例えば，石が 6 の位置に置かれているときは，その水平右側または垂直下側の位置にある数字 7, 8, 9, 10, 12 のどれか 1 つの数字を等しい確率で選び，その数字を丸で囲み，そこに石を移して置く。

(終了条件)　5, 9, 11, 12 の数字のどれか 1 つが丸で囲まれ石が置かれている。

ゲーム終了時に数字 j が丸で囲まれている確率を p_j とする。以下の問いに答えよ。

(1)　確率 p_2 を求めよ。

(2)　確率 p_5 と p_{11} を求めよ。

(3)　確率 p_5，p_9，p_{11}，p_{12} のうち最も大きいものの値を求めよ。　[2021]

5　2名が先攻と後攻にわかれ，次のようなゲームを行う。

(i)　正方形の4つの頂点を反時計回りにA, B, C, Dとする。両者はコマを1つずつ持ち，ゲーム開始時には先攻の持ちゴマはA，後攻の持ちゴマはCに置いてあるとする。

(ii)　先攻から始めて，交互にサイコロを振る。ただしサイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。出た目を3で割った余りが0のときコマは動かさない。また余りが1のときは，自分のコマを反時計回りに隣の頂点に動かし，余りが2のときは，自分のコマを時計回りに隣の頂点に動かす。もし移動した先に相手のコマがあれば，その時点でゲームは終了とし，サイコロを振った者の勝ちとする。

ちょうど n 回サイコロが振られたときに勝敗が決まる確率を p_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。

(3)　このゲームは後攻にとって有利であること，すなわち2以上の任意の整数 N に対して，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} p_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} p_{2m}$ が成り立つことを示せ。ただし正の実数 a に対し $[\,a\,]$ は，その整数部分（$k \leqq a < k+1$ となる整数 k）を表す。　[2020]

6 正の整数 n に対して $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を一列に並べた順列を考える。そのような順列は $n!$ 個ある。このうち 1 つを等確率で選んだものを $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ とする。この $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ に対し，各添字 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，a_i の値が j であるとき，その j を添字にもつ a_j の値が k であることを $a_i=j \to a_j=k$ と書くことにする。ここで，$a_i=j \to a_j=k \to a_k=l \to \cdots$ のようにたどり，それを続けていく。

例えば，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7)=(2,\ 5,\ 6,\ 1,\ 4,\ 3,\ 7)$ のとき，

(i) $a_1=2 \to a_2=5 \to a_5=4 \to a_4=1 \to a_1=2$

(ii) $a_3=6 \to a_6=3 \to a_3=6$

(iii) $a_7=7 \to a_7=7$

となり，どの i から始めても列は必ず一巡する。この一巡するそれぞれの列をサイクル，列に現れる相異なる整数の個数をサイクルの長さと呼ぶ。上の(i)，(ii)，(iii)は長さがそれぞれ 4, 2, 1 のサイクルになっている。

(1) $n=3$ とする。選んだ順列が長さ 1 のサイクルを含む確率を求めよ。

(2) $n=4$ とする。長さ 4 のサイクルを含む順列をすべて挙げよ。

(3) n 以下の正の整数 k に対して，$\displaystyle\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j} > \log(n+1)-\log k$ を示せ。

(4) n を奇数とする。選んだ順列が長さ $\dfrac{n+1}{2}$ 以上のサイクルを含む確率 p は，$p>\log 2$ を満たすことを示せ。 [2019]

7　図 1 のように 2 つの正方形 ABCD と CDEF を並べた図形を考える。2 点 P, Q が 6 個の頂点 A, B, C, D, E, F を以下の規則(a), (b)に従って移動する。

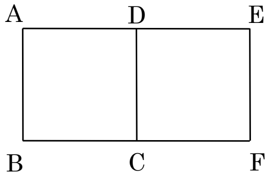


図 1

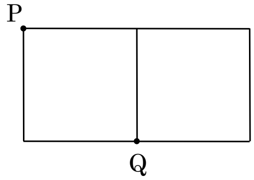


図 2

(a)　時刻 0 では図 2 のように点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 C にいる。

(b)　点 P, Q は時刻が 1 増えるごとに独立に，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。

時刻 n まで 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もない確率を p_n と表す。また時刻 n までに 2 点 P, Q が同時に同じ頂点にいることが一度もなく，かつ時刻 n に 2 点 P, Q がともに同じ正方形上にいる確率を a_n と表し，$b_n = p_n - a_n$ と定める。このとき，次の問いに答えよ。

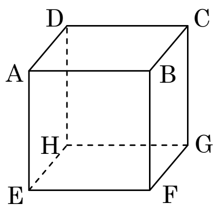
(1)　時刻 1 での点 P, Q の可能な配置を，図 2 にならってすべて図示せよ。

(2)　a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(4)　$p_n \leqq \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ を示せ。　[2018]

8　右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。　[2017]

9 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。 [2016]

10 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば，確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点} k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{にあるならば，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k-1 \text{に，確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k+1 \text{に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば，確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 $(n\geqq1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。 [2015]

11 3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1，q_1 を求めよ。

(2) p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。 [2013]

12　n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=j$ かつ $Y=j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。　[2012]

13　はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1)　a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3)　a_n，b_n，c_n を求めよ。　[2010]

14　さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）投げるとき，出る目の積の一の位が j（$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$）となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1)　$p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4)　$p_n(5)$ を求めよ。　[2009]

15　袋 A の中に赤玉と白玉がそれぞれ 4 つ入っていることと，袋 B の中に赤玉 3 つと白玉 2 つが入っていることが分かっている。

(1)　袋 B から 2 つの玉を取り出すとき，取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2)　袋 A から 3 つの玉を取り出し，そのあと袋 B から 2 つの玉を取り出す。その 5 つの玉のうち赤玉が 3 つである確率を求めよ。

(3)　袋 A から 3 つの玉を取り出したあとで，2 つの玉を袋 A から取り出すかあるいは 2 つの玉を袋 B から取り出すかのどちらかを選択できるとする。できるだけ多くの赤玉を取り出そうと選択したとき，最終的に取り出される赤玉の個数の期待値を求めよ。　[2008]

16　袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　連比 $p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)$ を求めよ。

(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ $(1\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。　[2007]

17　正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1:a_2:a_3:a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n\geqq 1)$ で表す。

(1)　$n\geqq 1$ のとき，$q_n=p_n(1)+p_n(6)$，$r_n=p_n(2)+p_n(5)$，$s_n=p_n(3)+p_n(4)$ を求めよ。

(2)　$p_n(m)$ $(n\geqq 1,\ m=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を求めよ。　[2006]

18 整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i) ある時刻で $x=m$ $(m\neq 0)$ のとき，1 秒後に $x=m+1$，$x=m-1$ である確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

(ii) ある時刻で $x=0$ のとき，1 秒後に $x=1$ である確率は q，$x=-1$ である確率は $1-q$ である $(0\leqq q\leqq 1)$。$x=0$ から始めて，n 秒後 $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x=m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1) $p_3(1)+p_3(-1)$ を求めよ。

(2) すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q によらない。

(3) $p_n(0)$ を求めよ。 [2005]

19 サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1) p_2 を求めよ。

(2) p_3 を求めよ。

(3) 4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。 [2004]

20 サイコロを n 回投げて，3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について，$P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし，このような k が複数あるときは，最も大きいものを $N(n)$ とする。

(1) $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n と，そのときの $\dfrac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ を求めよ。 [2003]

21　数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば$+1$，裏が出れば-1，それぞれ駒を進めるとする。ただし，点-1または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

(1)　k 回目に硬貨を投げた後，駒が点 1 にある確率を求めよ。

(2)　k 回目に硬貨を投げた後，駒がある点 X_k の期待値 $E[\,X_k\,]$ を求めよ。　[2001]

■ 論証

1　n を正の整数とし，n 次の整式 $P_n(x)=x(x+1)\cdots(x+n-1)$ を展開して $P_n(x)=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m x^m$ と表す。

(1)　等式 $\displaystyle\sum_{m=1}^{n}{}_n\mathrm{B}_m=n!$ を示せ。

(2)　等式 $P_n(x+1)=\displaystyle\sum_{m=1}^{n}\left({}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_1\,x+\cdots+{}_n\mathrm{B}_m\cdot{}_m\mathrm{C}_m\,x^m\right)$ を示せ。ただし，${}_m\mathrm{C}_0$，${}_m\mathrm{C}_1$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_m$ は二項係数である。

(3)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，等式 $\displaystyle\sum_{j=k}^{n}{}_n\mathrm{B}_j\cdot{}_j\mathrm{C}_k={}_{n+1}\mathrm{B}_{k+1}$ を示せ。　[2023]

2　n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I), (II), (III)を満たしている。

(I)　集合 M は n 個の要素からなる。

(II)　集合 M の要素 z に対して，$\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III)　集合 M の要素 z, w に対して，その積 zw は集合 M の要素である。ただし，$z=w$ の場合も含める。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　1 および-1は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

(4)　$n=6$ のとき，集合 M は一通りに定まることを示し，その要素をすべて求めよ。

[2017]

3　xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2)　a, b は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば，無限個存在することを示せ。　[2010]

4　$f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする。$a_1=1$ とし，順に，$a_m=\displaystyle\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により数列 $\{a_m\}$ を定める。

(1)　$m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ $a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$ となることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ。　[2002]

■ 複素数

1　c を 1 より大きい実数とする。また，i を虚数単位として，$\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ とおく。複素数 z に対して，

$$P(z)=z^3-3z^2+(c+2)z-c,\ \ Q(z)=-\alpha^7z^3+3\alpha^6z^2+(c+2)\alpha z-c$$

と定める。

(1)　方程式 $P(z)=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを複素数平面上に図示せよ。

(2)　方程式 $Q(z)=0$ を満たす複素数 z のうち実部が最大のものを求めよ。

(3)　複素数 z についての 2 つの方程式 $P(z)=0$，$Q(z)=0$ が共通解 β をもつとする。そのときの c の値と β を求めよ。　[2024]

2　実数係数の 4 次方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ は相異なる複素数 α，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ を解にもち，それらはすべて複素数平面において，点 1 を中心とする半径 1 の円周上にあるとする。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ α，β と共役な複素数を表す。

(1)　$\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ を示せ。

(2)　$t=\alpha+\overline{\alpha}$，$u=\beta+\overline{\beta}$ とおく。p, q, r, s をそれぞれ t と u で表せ。

(3)　座標平面において，点 $(p,\ s)$ のとりうる範囲を図示せよ。　[2023]

3 複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている。ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O, A, B, C, D, E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が，

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi,\ 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0$$

$$2\gamma^2 - (3\alpha + \beta + 2)\gamma + (\alpha + 1)(\alpha + \beta) = 0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ。

(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ。 [2022]

4 次の問いに答えよ。ただし，偏角 θ は，$0° \leqq \theta < 360°$ の範囲で考えるものとする。

(1) $|z + i| = |z - i|$ を満たす複素数 z は，実数に限ることを示せ。

(2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数 $z + i$ の偏角 $\arg(z + i)$ の動く範囲を求めよ。

(3) z を未知数とする方程式 $(z + i)^9 = (z - i)^9$ のすべての解 z について $z + i$ の偏角 $\arg(z + i)$ を求めよ。 [2002]

5 n を 3 以上の自然数とする。有限複素数列 z_1，z_2，…，z_n の各項はいずれも方程式 $z^6 = 1$ の解の 1 つであり，かつ関係式 $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$ を満たしているとする。

(1) z_1，z_2，…，z_n の中に 1 が含まれ，-1 が含まれていないとすれば，$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1，z_2，…，z_n の中に含まれることを示せ。

(2) $n = 6$ のとき，(1)のような複素数列 z_1，z_2，…，z_6 のとり方の個数を求めよ。

[2001]

■ 曲線

1 　双曲線 $x^2-y^2=1$ の $x>0$ の部分を C_1，$x<0$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $ax-by=1$ が C_1，C_2 の両方と 1 点ずつで交わるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　$a,\ b$ は(1)で求めた条件をみたすものとする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとり，直線 $ax-by=1$ と C_1，C_2 の交点をそれぞれ P，Q とする。このとき△APQ の面積 S を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　面積 S の最小値を求めよ。また，その最小値をとるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

[2020]

2 　$a>0,\ b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1)　$r,\ s,\ t$ を，a と b を用いて表せ。

(2)　△ABC が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ。

[2009]

3 　$a,\ b$ を正数とし，xy 平面で不等式 $\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$ の表す領域 D と，不等式 $x^2+y^2\leqq 1$ の表す領域 E を考える。

(1)　$a=2,\ b=1$ の場合に，領域 D を図示せよ。

(2)　D が E に含まれるための $a,\ b$ の条件を求め，ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ。

[2002]

■ 極限

1　自然数 n に対し，定積分 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(2)　$0 \leqq I_{n+1} \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} nI_n$ を求めよ。

(4)　$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k}$ とする。このとき(1), (2)を用いて $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。　[2018]

2　e を自然対数の底とし，t を $t > e$ となる実数とする。このとき，曲線 $C : y = e^x$ と直線 $y = tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P, Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha < \beta)$ とする。また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，曲線 C, x 軸および 2 つの直線 $x = \alpha$，$x = \beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2)　$\alpha < \frac{e}{t}$，$\beta < 2\log t$ となることを示し，$\lim_{t\to\infty} \frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば，$x > 0$ のとき $e^x > x^2$ であることを証明なしに用いてよい。　[2015]

3 xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。 [2014]

4 xy 平面上に曲線 $C : y = \log x \ (x > 0)$ を考える。

(1) 曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) 平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$，$\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき，A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし，B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき，2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。 [2006]

■ 微分法

1 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 x を変数とする関数 $f(x)$ が導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち，すべての x に対し $f''(x)>0$ をみたすとする。さらに以下の極限値 a，b $(a<b)$ が存在すると仮定する。

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=a\,,\ \ \lim_{x\to\infty} f'(x)=b$$

このとき，$a<c<b$ をみたす任意の実数 c に対し，関数 $g(x)=cx-f(x)$ の値を最大にする $x=x_0$ がただひとつ存在することを示せ。

(2) 実数 x を変数とする関数 $f(x)=\log\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)$ はすべての x に対し $f''(x)>0$ をみたすことを示せ。また，この f に対し小問(1)の極限値 a, b を求めよ。

(3) 小問(2)の関数 f および極限値 a，b を考える。$a<c<b$ をみたす任意の実数 c に対し小問(1)の x_0 および $g(x_0)$ を c を用いて表せ。 [2025]

2 関数 $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$ に対して，$y=f(x)$ のグラフを C とする。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) x 軸上の点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ から C にちょうど 2 本の接線を引くことができるとする。そのような実数 t の値の範囲を求めよ。

(3) (2)において，C の 2 つの接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。α，β がともに整数であるような組 $(\alpha,\ \beta)$ をすべて求めよ。 [2024]

3 $0<b<a$ とする。xy 平面において，原点を中心とする半径 r の円 C と点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 b の円 D が 2 点で交わっている。

(1) 半径 r の満たすべき条件を求めよ。

(2) C と D の交点のうち y 座標が正のものを P とする。P の x 座標 $h(r)$ を求めよ。

(3) 点 $\mathrm{Q}(r,\ 0)$ と点 $\mathrm{R}(a-b,\ 0)$ をとる。D の内部にある C の弧 PQ，線分 QR，および線分 RP で囲まれる図形を A とする。xyz 空間において A を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 $V(r)$ を求めよ。ただし，答えに $h(r)$ を用いてもよい。

(4) $V(r)$ の最大値を与える r を求めよ。また，その r を $r(a)$ とおいたとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(r(a)-a\right)$ を求めよ。 [2023]

4　(1)　方程式 $e^x = \dfrac{2x^3}{x-1}$ の負の実数解の個数を求めよ。

(2)　$y = x(x^2-3)$ と $y = e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点の個数を求めよ。

(3)　a を正の実数とし，関数 $f(x) = x(x^2-a)$ を考える。 $y = f(x)$ と $y = e^x$ のグラフの $x<0$ における共有点は 1 個のみであるとする。このような a がただ 1 つ存在することを示せ。 [2023]

5　a, b を実数とする。

(1)　整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2)　実数を係数とする 2 次式 $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x + b$ とする。b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。 [2022]

6　a を正の実数とする。放物線 $y = x^2$ を C_1，放物線 $y = -x^2 + 4ax - 4a^2 + 4a^4$ を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(t,\ t^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 が異なる 2 つの共通接線 l，l' をもつような a の範囲を求めよ。ただし C_1 と C_2 の共通接線とは，C_1 と C_2 の両方に接する直線のことである。

以下，a は(2)で求めた範囲にあるとし，l，l' を C_1 と C_2 の異なる 2 つの共通接線とする。

(3)　l，l' の交点の座標を求めよ。

(4)　C_1 と l，l' で囲まれた領域を D_1 とし，不等式 $x \leqq a$ の表す領域を D_2 とする。 D_1 と D_2 の共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5)　$S(a)$ を(4)の通りとする。a が(2)で求めた範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。 [2021]

7　a を 1 より大きい実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は，存在すれば直線 $y = x$ 上にあることを示せ。

(2)　関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 2 個以下であることを示せ。

(3)　関数 $y = a^x$ と $y = \log_a x$ のグラフの共有点は 1 個であるとする。このときの共有点の座標と a の値を求めよ。 [2018]

8　2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2)　(1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3)　点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2)，(3)においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。　[2016]

9　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x\quad(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。　[2015]

10　関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2)　$a>0$ とする。点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

11　曲線 $C:y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P，Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P，Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

[2008]

12　(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$ （a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。　[2007]

13　放物線 $R: y=-x^2+3$ と直線 $l: y=2x$ との交点を A, B とする。直線 $y=2x+t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。　[2005]

14　(1)　x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。　[2002]

15　e を自然対数の底とする。$e\leqq p<q$ のとき不等式 $\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$ が成り立つことを証明せよ。　[2001]

■ 積分法

1　関数$f(x)$は区間$x \geqq 0$において連続な増加関数で$f(0)=1$を満たすとする。ただし$f(x)$が区間$x \geqq 0$における増加関数であるとは，区間内の任意の実数x_1，x_2に対し$x_1 < x_2$ならば$f(x_1) < f(x_2)$が成り立つときをいう。以下，nは正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}dx=\infty$を示せ。

(2)　区間$y>2$において関数$F_n(y)$を$\displaystyle F_n(y)=\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{x-2}dx$と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}F_n(y)=\infty$を示せ。また$2+\dfrac{1}{n}$より大きい実数$a_n$で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n}\frac{f(x)}{2-x}dx=0$$

を満たすものがただ1つ存在することを示せ。

(3)　(2)のa_nについて，不等式$a_n<4$がすべてのnに対して成り立つことを示せ。

[2022]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)$は，区間$0 \leqq x \leqq 2\pi$で第2次導関数$f''(x)$をもち$f''(x)>0$をみたしているとする。区間$0 \leqq x \leqq \pi$で関数$F(x)$を

$$F(x)=f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)$$

と定義するとき，区間$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$で$F(x) \geqq 0$であることを示せ。

(2)　$f(x)$を(1)の関数とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos x\,dx \geqq 0$を示せ。

(3)　関数$g(x)$は，区間$0 \leqq x \leqq 2\pi$で導関数$g'(x)$をもち$g'(x)<0$をみたしているとする。このとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi}g(x)\sin x\,dx \geqq 0$を示せ。

[2020]

3　$f_0(x)=xe^x$として，正の整数nに対して，$\displaystyle f_n(x)=\int_{-x}^{x}f_{n-1}(t)dt+f_{n-1}{}'(x)$により実数$x$の関数$f_n(x)$を定める。

(1)　$f_1(x)$を求めよ。

(2)　$\displaystyle g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt$とするとき，定積分$\displaystyle\int_{-c}^{c}g(x)dx$を求めよ。ただし，$a$，$b$，$c$は定数とする。

(3)　正の整数nに対して，$f_{2n}(x)$を求めよ。

[2012]

4　関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1)　導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ を求めよ。

(3)　$y=g(\theta)$ のグラフをかけ。　[2009]

5　(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，$\int_{0}^{\pi}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。　[2005]

6　多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

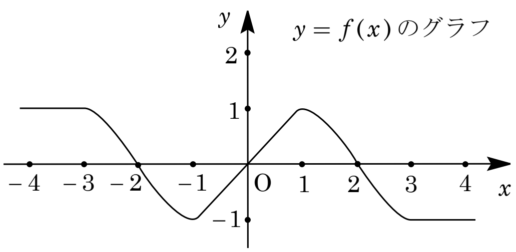
を満たすとする。

(1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2004]

7　各点で微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき，$y=f'(x)$ と $y=\displaystyle\int_{0}^{x}f(t)\,dt$ のグラフの概形を描け。また，そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。



[2003]

8　閉区間 $[0,\ 2\pi]$ 上で定義された x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_{0}^{\pi}\sin\left(|t-x|+\frac{\pi}{4}\right)dt$ の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。　[2001]

■ 積分の応用

1 以下の問いに答えよ。

(1) 実数 r, α は $0 < r \leqq 1$，$0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする。xy 平面内で，点 $(1,\ 0)$ を中心にもつ半径 r の円周およびその内部を C とする。C を原点 $(0,\ 0)$ を中心に反時計まわりに角度 α だけ回転させるとき，C が通過する領域の面積を求めよ。

(2) 実数 R, α は $0 < R \leqq 1$，$0 \leqq \alpha < \pi$ をみたすとする。xyz 空間内で，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心にもつ半径 R の球面およびその内部を B とする。B を z 軸のまわりに角度 α だけ回転させるとき，B が通過する領域の体積を求めよ。ただし，回転の向きは回転後の B の中心が $(\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0)$ になるように選ぶものとする。 [2025]

2 正の整数 n に対し，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\cos^n\theta}$ とする。

(1) I_1 を求めよ。必要ならば $\dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$ を使ってよい。

(2) $n \geqq 3$ のとき，I_n を I_{n-2} と n で表せ。

(3) xyz 空間において xy 平面内の原点を中心とする半径 1 の円板を D とする。D を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を C とする。C を平面 $x = \dfrac{1}{2}$ で 2 つの部分に切断したとき，小さい方を S とする。z 軸に垂直な平面による切り口を考えて S の体積を求めよ。 [2019]

3 不等式 $0 < a < 1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C : y = a - 1 - \log x \ (x > 0)$ を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a - 1 - \log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする。このとき，次の問いに答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$ を証明なしで使ってよい。

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ。

(2) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

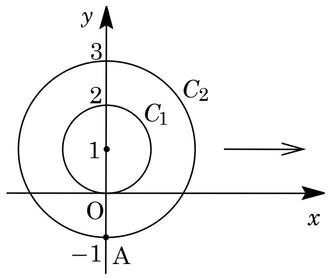
(3) 関数 $t = u(s)$，$t = v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

4　空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1)　B の中心と l との距離を求めよ。

(2)　l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2014]

5　半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0,\ -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。



(1)　時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す。$(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2)　$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標をすべて求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2013]

6　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2)　b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3)　C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。　[2012]

7　$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\left\{(x,\ y,\ 0)\ \middle|\ 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\right\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。　[2011]

8　数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ を次の規則によって定める。

$$a_1=1,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

曲線 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と，x 軸および 2 直線 $x=a_n$，$x=a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$ を求めよ。　[2007]

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが，答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

（不等式）

1. $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$　（a, b, c は正または 0）
2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

（三角形）

3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
5. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$　$\left(s = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\right)$

（図形と式）

6. 数直線上の 2 点 x_1，x_2 を $m:n$ に内分する点，および外分する点：
   $\dfrac{mx_2+nx_1}{m+n}$，$\dfrac{mx_2-nx_1}{m-n}$
7. 点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ との距離，および点 $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ との距離：$\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\dfrac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
8. だ円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$
9. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線：$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

（ベクトル）

10. 2 つのベクトルのなす角：$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

（複素数）

11. 極形式表示：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$　$(r=|z|,\ \theta = \arg z)$
12. $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ に対し，
    $z_1z_2 = r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$
13. ド・モアブルの公式：$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ に対し，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

（解と係数の関係）

14. $x^2+px+q=0$ の解が α，β のとき，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$

15. $x^3+px^2+qx+r=0$ の解が α, β, γ のとき,

$\alpha+\beta+\gamma=-p$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$, $\alpha\beta\gamma=-r$

（対　数）

16. $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$

（三角関数）

17. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

18. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

19. $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

20. $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

21. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$, $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$, $\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

22. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

（数　列）

23. 初項 a, 公差 d, 項数 n の等差数列の和：

$S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$ $\ (l=a+(n-1)d)$

24. 初項 a, 公比 r, 項数 n の等比数列の和： $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\ (r\neq 1)$

25. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

（極　限）

26. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots\cdots$

27. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

（微積分）

28. $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$

29.　$x=f(y)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^{-1}$

30.　$x=x(t)$，$y=y(t)$ のとき $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$

31.　$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

32.　$x=g(t)$ のとき $\displaystyle\int f(g(t))g'(t)dt=\int f(x)dx$

33.　$\displaystyle\int f'(x)g(x)dx=f(x)g(x)-\int f(x)g'(x)dx$

34.　$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$

35.　$\displaystyle\int \log x\,dx=x\log x-x+C$

36.　$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\pi a^2$　$(a>0)$，　$\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{4a}$　$(a\neq 0)$

$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

37.　回転体の体積：$V=\pi\displaystyle\int_a^b \{f(x)\}^2dx$

38.　曲線の長さ：$\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$(x=x(t),\ y=y(t),\ a=x(\alpha),\ b=x(\beta))$

（順列・組合せ）

39.　${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$　$(1\leqq r\leqq n-1)$

40.　$(a+b)^n=\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r\,a^{n-r}b^r$

（確　率）

41.　確率 p の事象が n 回の試行中 r 回起こる確率：$P_n(r)={}_n\mathrm{C}_r\,p^rq^{n-r}$　$(q=1-p)$

42.　期待値：$E(X)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$

ただし p_i は確率変数 X が値 x_i をとる確率で，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ を満たすとする。

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

4 つの実数を $\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$，$\delta=\dfrac{3}{2}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\alpha\beta\gamma=1$ を示せ。

(2)　α，β，γ，δ を小さい順に並べよ。

(3)　$p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ とし，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ とする。このとき $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(-1)$ および $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ の正負を判定せよ。　[2021]

解答例＋映像解説

(1)　$\alpha=\log_2 3$，$\beta=\log_3 5$，$\gamma=\log_5 2$ のとき，$\alpha\beta\gamma=\log_2 3\cdot\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}\cdot\dfrac{1}{\log_2 5}=1$

(2)　まず，$\alpha=\log_2 3>\log_2 2=1$，$\beta=\log_3 5>\log_3 3=1$ であり，

$$0=\log_5 1<\log_5 2<\log_5 5=1,\quad 0<\gamma<1$$

また，$\alpha-\delta=\log_2 3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}(2\log_2 3-3)=\dfrac{1}{2}(\log_2 9-\log_2 8)>0$

$$\beta-\delta=\log_3 5-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(2\log_3 5-3)=\frac{1}{2}(\log_3 25-\log_3 27)<0$$

これより，$\alpha>\delta$，$1<\beta<\delta$ となり，$\gamma<\beta<\delta<\alpha$ である。

(3)　$p=\alpha+\beta+\gamma$，$q=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$ のとき，(1)より $\alpha\beta\gamma=1$ なので，

$$q=\frac{\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$$

すると，$f(x)=x^3+px^2+qx+1$ に対して，

$$f(x)=x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+\alpha\beta\gamma$$
$$=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

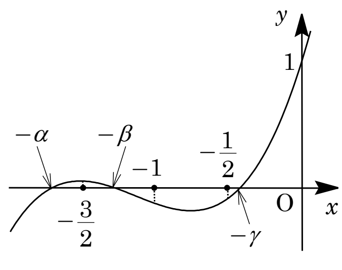
これより，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $x=-\alpha$，$-\beta$，$-\gamma$ となる。

さて，(2)より $0<\gamma<1<\beta<\dfrac{3}{2}<\alpha$ なので，$-\alpha<-\dfrac{3}{2}<-\beta<-1<-\gamma<0$

また，$\gamma-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(2\log_5 2-1)=\dfrac{1}{2}(\log_5 4-\log_5 5)<0$

から，$0<\gamma<\dfrac{1}{2}$ となり，

$$-\alpha<-\frac{3}{2}<-\beta<-1<-\frac{1}{2}<-\gamma<0$$



したがって，右図より，

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)<0,\quad f(-1)<0,\quad f\left(-\frac{3}{2}\right)>0$$

コメント

対数計算と高次方程式が融合した丁寧な誘導のついた問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた $f(x)=0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

[2015]

解答例

(1)　$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ より，両辺を 2 乗すると，

$$(\alpha-\sqrt{13})^2=\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2,\ \ \alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$$

まとめると，$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$ となり，さらに両辺を 2 乗すると，

$$\alpha^4-10\alpha^2+25=52(\alpha^2+2\alpha+1),\ \ \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって，α は 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0$ の解である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$ であり，

$$f(x)=(x^2-5)^2-\{2\sqrt{13}(x+1)\}^2$$
$$=\{x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)\}\{x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)\}$$

ここで，$f(x)=0$ とすると，

$$x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots①,\ \ x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots②$$

①より，$x^2-2\sqrt{13}x-2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}=\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

②より，$x^2+2\sqrt{13}x+2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}}=-\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

以上より，4 次方程式 $f(x)=0$ の 4 個の解は，

$$\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \ \sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$
$$-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \ -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

そして，$f(x)=0$ の解の個数は 4 なので，上記以外の数は解ではない。

(3)　(2)より $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\beta=\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\gamma=-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\delta=-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおく。

すると，$8<2\sqrt{17}<9$ より，$\sqrt{17}<\sqrt{9+2\sqrt{17}}<\sqrt{18}$，$0<\sqrt{9-2\sqrt{17}}<1$ となり，

$$\alpha-\gamma=2\sqrt{13}+2\sqrt{9-2\sqrt{17}}>0\,,\ \gamma-\beta=-2\sqrt{13}+2\sqrt{9+2\sqrt{17}}>0$$

$$\beta-\delta=2\sqrt{13}-2\sqrt{9-2\sqrt{17}}>0$$

よって，α，β，γ，δ の大小関係は，$\alpha>\gamma>\beta>\delta$ である。

コメント

高次方程式の問題です。(1)はよくみかけるものですが，そのプロセスを誘導として(2)に適用させるところが，問題のねらいになっています。なお，(3)の大小関係については，予め図を書いて予測しています。

問　題

(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$ （p, q は実数）のうち, 次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件： x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が, 整数の解を少なくとも 1 つもつ。　[2005]

解答例

(1)　$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ より, $(z+2)(z^4+4z^2+16)=0$ から,

$$(z+2)(z^4+8z^2+16-4z^2)=0,\ (z+2)(z^2+4+2z)(z^2+4-2z)=0$$

よって, $z=-2,\ -1\pm\sqrt{3}i,\ 1\pm\sqrt{3}i$

(2)　(i)　$z=-2$ のとき　このとき, $x^3+2=0$ となり, 整数解は存在しない。

(ii)　$z=-1+\sqrt{3}i$ のとき　$x^3+3x+4=0$, $(x+1)(x^2-x+4)=0$

よって, 整数解 $x=-1$ をもつ。

(iii)　$z=-1-\sqrt{3}i$ のとき　$x^3-3x+4=0$, $x(3-x^2)=4$ ………①

これより, ①が整数解をもつならば 4 の約数となり, 整数解として $x=\pm1,\ \pm2,\ \pm4$ の場合を調べればよい。ここで, $f(x)=x^3-3x+4$ とおくと,

$$f(1)=2,\ f(-1)=6,\ f(2)=6,\ f(-2)=2,\ f(4)=56,\ f(-4)=-48$$

よって, $f(x)=0$ は整数解をもたない。

(iv)　$z=1+\sqrt{3}i$ のとき　$x^3+3x+2=0$, $x(-3-x^2)=2$ ………②

これより, ②が整数解をもつならば 2 の約数となり, 整数解として $x=\pm1,\ \pm2$ の場合を調べればよい。ここで, $g(x)=x^3+3x+2$ とおくと,

$$g(1)=6,\ g(-1)=-2,\ g(2)=16,\ g(-2)=-12$$

よって, $g(x)=0$ は整数解をもたない。

(v)　$z=1-\sqrt{3}i$ のとき　$x^3-3x+2=0$, $(x-1)^2(x+2)=0$

よって, 整数解 $x=1,\ -2$ をもつ。

(i)～(v)より, 求める z は, $z=-1+\sqrt{3}i,\ 1-\sqrt{3}i$

コメント

すべての場合をチェックするのは面倒ですが, しかし, それは時間の問題にすぎません。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式

(i)　$x+y-2z=3a$，$2x-y-z=3b$，$x-5y+4z=3c$

および

(ii)　$x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1)　方程式(i)が解をもつための $a,\ b,\ c$ に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ。

(2)　方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき，その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。　[2004]

解答例

(1)　$x+y-2z=3a$ ……①，$2x-y-z=3b$ ……②，$x-5y+4z=3c$ ……③に対して，

②より，$z=2x-y-3b$ ………④

④を①に代入して，$x+y-2(2x-y-3b)=3a$，$x-y=-a+2b$ ………⑤

④を③に代入して，$x-5y+4(2x-y-3b)=3c$，$x-y=\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}c$ ………⑥

⑤⑥が解をもつ条件は，

$-a+2b=\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}c$，$3a-2b+c=0$ ………⑦

⑦が成り立つとき，⑤と⑥は一致し，t を実数として，

$x=t$，$y=t+a-2b$

④より，$z=2t-(t+a-2b)-3b=t-a-b$ となり，

$(x,\ y,\ z)=(t,\ t+a-2b,\ t-a-b)$ ………⑧

(2)　⑧を $x^2+y^2+z^2=1$ に代入すると，$t^2+(t+a-2b)^2+(t-a-b)^2-1=0$

$3t^2-6bt+(2a^2-2ab+5b^2-1)=0$ ………⑨

t がただ 1 つ存在する条件は，$D/4=9b^2-3(2a^2-2ab+5b^2-1)=0$

$2a^2-2ab+2b^2-1=0$ ………⑩

このとき，⑨の解は $t=b$ となるので，$(x,\ y,\ z)=(b,\ a-b,\ -a)$

すると，⑩より，

$2x^2+2xy+2y^2=2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2=2a^2-2ab+2b^2=1$

コメント

①，②，③を平面の方程式とみなし，その法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ とおくと，$\overrightarrow{n_3}=-3\overrightarrow{n_1}+2\overrightarrow{n_2}$ から，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ が 1 次独立ではありません。この点が本問の背景となっています。

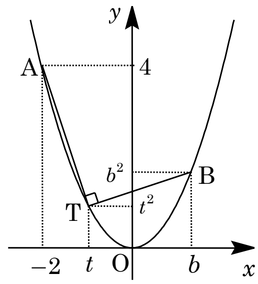
問　題

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

解答例



$\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+2,\ t^2-4)=(t+2)(1,\ t-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-2)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-2)t-2b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$(*)$を満たす t が $-2<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\dfrac{b-2}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+4b}{4}$ とおくと，

$$f(-2)=-4b+9,\ f(b)=2b^2-4b+1=2(b-1)^2-1$$

これより，$b>\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)\geqq0$ となり，また $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(b)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b$ のとき $f(b)\geqq0$

(i)　$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)\geqq0$ より，求める条件は，

$$-2<-\frac{b-2}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+4b}{4}\leqq0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-2<4$ となり，$\dfrac{2}{3}<b<6$

②より，$b(b+4)\geqq0$ となり，$b\leqq-4,\ 0\leqq b$

$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ と合わせると，適する b は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)<0$ より適する。

(iii)　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2)\geqq0$ かつ $f(b)\geqq0$ から，(i)と同様である。

求める条件は，①②より $\dfrac{2}{3}<b<6$ かつ $(b\leqq-4,\ 0\leqq b)$ となり，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ と合わせると，適する b は $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ である。

(iv)　$b > \dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2) < 0$ かつ $f(b) > 0$ より適する。

(i)～(iv)より，求める条件は，$b > \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ となる。

コメント

図形的な条件を数式化した後は，2 次方程式の解の配置の問題になります。$f(-2)$，$f(b)$ の符号をもとに場合分けをしています。

問　題

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

解答例

2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は，

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\ \ y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，(*)の x の値を $x=a$ と固定し，y のとり得る値の範囲を求める。

ここで，$y=f(t)$ とおくと，

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

さて，t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，

(i)　$a\leqq -\frac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii)　$-\frac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

(iii)　$0\leqq a\leqq \frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\frac{2a-1}{2}\right)=a^2+\frac{1}{4}$

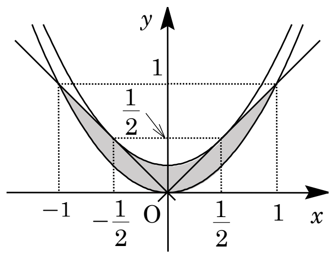
(iv)　$a\geqq \frac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)～(iv)より，直線 l が通過してできる領域は，

$$x\leqq y\leqq -x\ \left(x\leqq -\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ \ x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(0\leqq x\leqq \frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ \ -x\leqq y\leqq x\ \left(x\geqq \frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

これを利用すると，線分 PQ が通過してできる図形は，直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分なので，図示すると右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。この図形の面積 S は，y 軸に関する対称性より，



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)\,dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

コメント

線分の通過領域についての頻出問題です。文系と異なり，誘導は付いていません。

問　題

xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある。

(1) $a>0$ とする。OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a>0,\ b>0$ とする。OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための $a,\ b$ に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。 [2011]

解答例

(1) O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$ に対し，OP : AP $=1:a$ を満たす点 P$(x,\ y)$ は，AP $=a$OP，AP$^2=a^2$OP^2 より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(i) $a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii) $a\neq 1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2) OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，(1)より，$a=1$ のとき直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$a\neq 1$ のとき中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円である。

また，O$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ に対し，OP : BP $=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$b=1$ のとき直線 $y=\dfrac{1}{2}$，$b\neq 1$ のとき中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円である。

よって，OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

(i) $a=1$ かつ $b=1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を満たす点 P$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ が存在する。

(ii) $a=1$ かつ $b\neq 1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$ で半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円を満たす点 P が存在するには，

$$\frac{b}{|b^2-1|}\geqq\frac{1}{2},\ |b^2-1|\leqq 2b$$

$b>0$ から，$-2b\leqq b^2-1\leqq 2b$ となり，$b^2+2b-1\geqq 0$ かつ $b^2-2b-1\leqq 0$ より，

$$-1+\sqrt{2}\leqq b\leqq 1+\sqrt{2}\quad (b\neq 1)$$

(iii) $a\neq 1$ かつ $b=1$ のとき

(ii)と同様にして，$-1+\sqrt{2}\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}\quad (a\neq 1)$

(iv)　$a\neq 1$かつ$b\neq 1$のとき

中心$\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$で半径$\dfrac{a}{|a^2-1|}$の円と，中心$\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$で半径$\dfrac{b}{|b^2-1|}$の円

を満たす点Pが存在するには，

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

$$\big|a|b^2-1|-b|a^2-1|\big|\leqq\sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2}\leqq a|b^2-1|+b|a^2-1|$$

この不等式の各辺を2乗すると，次の連立不等式に等しく，

$$\{a|b^2-1|-b|a^2-1|\}^2\leqq(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\cdots\cdots\cdots②$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\leqq\{a|b^2-1|+b|a^2-1|\}^2\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab|a^2-1||b^2-1|\leqq 0\cdots\cdots\cdots$④

③より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab|a^2-1||b^2-1|\geqq 0\cdots\cdots\cdots$⑤

(iv-i)　($a>1$ かつ $b>1$)または($0<a<1$ かつ $0<b<1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab\leqq 0$ となり，$(a-b)^2\leqq 2$，$|a-b|\leqq\sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab\geqq 0$ となり，$(a+b)^2\geqq 2$，$a+b\geqq\sqrt{2}$

(iv-ii)　($a>1$ かつ $0<b<1$)または($0<a<1$ かつ $b>1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab\geqq 0$ となり，$(a+b)^2\geqq 2$，$a+b\geqq\sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab\leqq 0$ となり，$(a-b)^2\leqq 2$，$|a-b|\leqq\sqrt{2}$

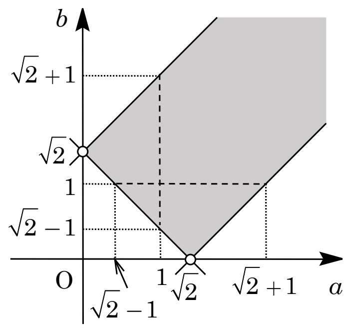
(iv-i) (iv-ii)より，$a\neq 1$かつ$b\neq 1$のとき，

$|a-b|\leqq\sqrt{2}$，$a+b\geqq\sqrt{2}$

(i)～(iv)をまとめると，求める条件は，

$a>0$，$b>0$，$|a-b|\leqq\sqrt{2}$，$a+b\geqq\sqrt{2}$

これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含むが，白丸は領域に含まない。



コメント

アポロニウスの円を題材として，さらに2円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に並々ならぬ注意力が必要です。

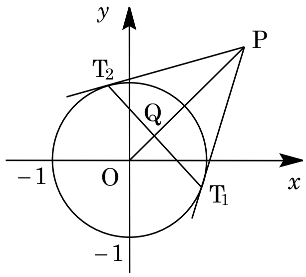
問　題

原点$O(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円に，円外の点$P(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1)　2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。また$OP\cdot OQ=1$であることを示せ。

(2)　点 P が直線$x+y=2$上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2007]

解答例



(1)　2 つの接点を$T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$とおくと，接線の方程式はそれぞれ，

$$s_1x+t_1y=1,\ s_2x+t_2y=1$$

点$P(x_0,\ y_0)$を通ることより，

$$s_1x_0+t_1y_0=1\cdots\cdots①,\ s_2x_0+t_2y_0=1\cdots\cdots②$$

ここで，方程式$x_0x+y_0y=1$ ……③は直線を表し，①から$T_1(s_1,\ t_1)$，②から$T_2(s_2,\ t_2)$を通過することがわかる。

すなわち，③は直線T_1T_2を表す。

さて，直線T_1T_2の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP}=(x_0,\ y_0)$となり，2 直線 OP，$T_1T_2$は直交する。言い換えると，2 点$T_1$，$T_2$の中点 Q は 2 直線 OP，$T_1T_2$の交点である。

ここで，直線 OP は，kを実数として，

$$(x,\ y)=k(x_0,\ y_0),\ y_0x-x_0y=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$，$y=\dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}$となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2},\ \dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)$

$$OP\cdot OQ=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{\frac{x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}+\frac{y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}}$$
$$=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{x_0^2+y_0^2}}=1$$

(2)　$Q(x_1,\ y_1)$より，$x_1=\dfrac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{x_0^2+y_0^2}$ ………⑤

(1)から$OP\cdot OQ=1$なので，$(x_0^2+y_0^2)(x_1^2+y_1^2)=1$となり，⑤より，

$$x_0=x_1(x_0^2+y_0^2)=\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},\ y_0=y_1(x_0^2+y_0^2)=\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件より，$x_0+y_0=2$なので，⑥より$\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2}+\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}=2$

$$2x_1^2+2y_1^2-x_1-y_1=0,\ (x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$$

すると，$\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

コメント

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

問　題

座標平面上に 3 点O(0, 0)，A(4, 2)，B(6, 0)を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

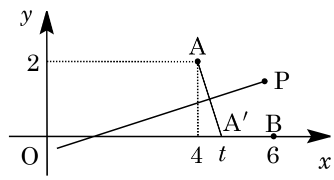
(1) 点P(p, q)を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を A′(t, 0) ($0 \leqq t \leqq 6$)とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点P(p, q)の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点P(p, q)を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点P(p, q)の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

解答例

(1) ピッタリ直線 l は，線分 AA′ の垂直二等分線より，PA = PA′ となり，



$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$
$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点A′(t, 0)が 2 つ存在するときで，このとき①は $0 \leqq t \leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20 \geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16 \geqq 0$ ………⑤

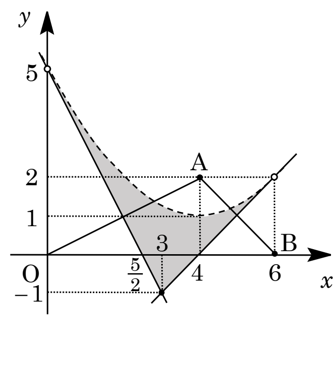
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③′

④より $q \geqq -2p+5$ ………④′，⑤より $q \geqq p-4$ ………⑤′

さて，領域③′ の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③′ と領域④′ の境界線，領域③′ と領域⑤′ の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③′④′⑤′ より，点P(p, q)の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1$，t_2 とおき，$A_1'(t_1, 0)$，$A_2'(t_2, 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA_1'}=(t_1-4,\ -2),\quad \overrightarrow{AA_2'}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{AA_1'}\cdot\overrightarrow{AA_2'}=0$ となり，

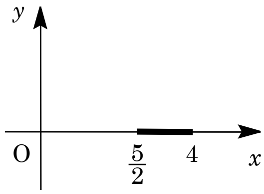
$$(t_1-4)(t_2-4)+4=0,\ t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$$t_1+t_2=2p,\ t_1t_2=8p+4q-20$$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



コメント

線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。