２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

神戸大学

理系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
神 戸 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された神戸大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

3　2018 年度以降に出題された問題は，その解答例の動画解説を YouTube で配信しています。リンク元は，解答編の 解答例＋映像解説 です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$a,\ b$ を実数とする。整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める。以下の問いに答えよ。ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。　[2023]

2　a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を a を用いて表せ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ。　[2016]

3　a は正の無理数で，$X=a^3+3a^2-14a+6$，$Y=a^2-2a$ を考えると，X と Y はともに有理数である。以下の問いに答えよ。

(1)　整式 $x^3+3x^2-14x+6$ を整式 x^2-2x で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　X と Y の値を求めよ。

(3)　a の値を求めよ。ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

[2011]

4　$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（p,q は実数）を求めよ。

(2)　整数 $a,\ b,\ c$ を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

■ 図形と式

1　a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c,\ \ l_1 : y = -3x + 3,\ \ l_2 : y = x + 3$$

で定める。l_1，l_2 がともに C に接するとき，以下の問いに答えよ。

(1)　b を求めよ。また c を a を用いて表せ。

(2)　C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　C と l_1 の接点を P，C と l_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする。a が(2)の条件を満たしながら動くとき，$\triangle$PQR の重心 G の軌跡を求めよ。　[2024]

2　m を実数とする。座標平面上の放物線 $y = x^2$ と直線 $y = mx + 1$ の共有点を A, B とし，原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　3 点 A, B, O を通る円の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y = x^2$ と(2)の円が A，B，O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。　[2021]

3　p，r を $-r < p < r$ を満たす実数とする。4 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(r,\ p^2)$，$\mathrm{R}(r,\ r^2)$，$\mathrm{S}(p,\ r^2)$ に対し，線分 PR の長さは 1 であるとする。このとき，長方形 PQRS の面積の最大値と，そのときの P，R の x 座標をそれぞれ求めよ。　[2013]

4　座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1)　l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2)　l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3)　l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　[2012]

5　以下の問いに答えよ。

(1)　t を正の実数とするとき，$|x| + |y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　a を $a \geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

$$ax + (2-a)y \geqq 2,\ \ y \geqq 0$$

を満たすとき，$|x| + |y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3)　a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。　[2011]

6　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ \sqrt{3})$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A，B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。

(3)　A，B，C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。　[2008]

7　xy 平面において，O を原点，P を第 1 象限内の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 点 O，P を頂点とし，y 軸上に底辺をもつ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。

(2)　T を(1)で求めた軌跡とし，a を実数とする。このとき，軌跡 T と直線 $y=a(x-1)$ が第 1 象限内で交点をもつような, a の範囲を求めよ。　[2007]

8　a を実数とし，$a>1$ とする。点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を通り，円 $C: x^2+y^2=1$ と接する 2 本の直線のうち，$x=1$ とは異なる直線を l とする。l と x 軸の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。線分 QA の長さ L を a を用いて表せ。

(2)　三角形 PQA の面積を S とする。a が $a>1$ の範囲を動くとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2005]

■ 図形と計量

1 三角形 ABC があり，$AB=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle CAB>\dfrac{\pi}{4}$ とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，$\angle CAH=\alpha$ とする。辺 AB の中点を M とする。線分 AM 上に A と異なる点 X をとる。3 点 A, X, H を通る円の中心を P，半径を r，$\angle PAH=\theta$ とする。この円と直線 AC との交点で，A と異なる点を Y とする。次の問いに答えよ。

(1) $\cos\theta$ を r を用いて表せ。

(2) $AX+AY$ を r と α を用いて表せ。

(3) X のとり方によらず，$AX+AY$ がつねに一定の値になるときの α の値を求めよ。

[2003]

■ ベクトル

1 s，t を実数とする。座標空間に 3 点 $A(-4,\ -1,\ 0)$，$B(-3,\ 0,\ -1)$，$P(s,\ t,\ -2s+t-1)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 A, B, P は一直線上にないことを示せ。

(2) 点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする。点 H の座標を s を用いて表せ。

(3) s, t が変化するとき，三角形 ABP の面積の最小値を求めよ。 [2025]

2 四面体 OABC があり，辺 OA, OB, OC の長さはそれぞれ $\sqrt{13}$，5，5 である。$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=1$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-11$ とする。頂点 O から△ABC を含む平面に下ろした垂線とその平面との交点を H とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の長さを求めよ。

(2) 実数 s，t を $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ をみたすように定めるとき，s と t の値を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2023]

3 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直であるとする。$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}|=y$ とするとき，$\sin^2\theta$ を x, y を用いて表せ。

(2) θ の最大値を求めよ。 [2021]

4　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=2$ を満たす△PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ。

(3)　点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を満たすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ。ただし，$0<\angle\mathrm{ABG}<\pi$ とする。　[2019]

5　t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3)　t が(2)で求めた値をとるとき，△PQR の面積を求めよ。　[2018]

6　四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点，R を辺 BC の中点とする。P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。[2016]

7　空間において，原点 O を通らない平面 α 上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が，平面 α と垂直であることを示せ。　[2014]

8 空間において，2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3) R, S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

9 四面体 ABCD において，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき，線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。 [2007]

10 平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle\mathrm{XOY}<180°$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおくとき，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および 3 辺の長さ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|\vec{b}-\vec{a}|$ を用いて表せ。 [2006]

11　O を原点とする空間の 3 点 A$(1,\ 1,\ 1)$，B$(1,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$がある。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を満たす点を D とする。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1)　D の座標を求めよ。

(2)　2 つの実数 s と t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たす点を P とする。$t$ を固定して考えたとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$を最小にする s を t を用いて表せ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$を最小にする s と t の値を求めよ。

(4)　(3)で求めた s と t の値をそれぞれs_0とt_0とする。s_0とt_0に対し，P_0を$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_0\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を満たす点とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}=\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$となることを示せ。　[2005]

12　正の整数 n に対して，連立不等式 $0<x\leqq n,\ x\leqq y\leqq 3x$ の表す領域を D_n とする。次の問いに答えよ。

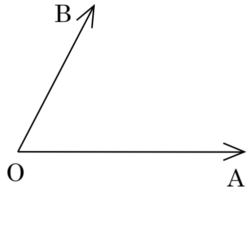
(1)　領域 D_n 内にある格子点 P$(x,\ y)$の個数を S_n とする。S_n を n で表せ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。

(2)　原点 O$(0,\ 0)$を始点とし，領域 D_n 内の格子点 P$(x,\ y)$を終点とする位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は，ベクトル$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{v_3}=(1,\ 3)$と 0 以上の整数 m_1，m_2，m_3 を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$と表せることを証明せよ。　[2002]

13　3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P を$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$t$ で表せ。

(2)　点 Q を$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t, s が $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



[2001]

■ 整数と数列

1　実数 a に対して，a を超えない最大の整数を k とするとき，$a-k$ を a の小数部分という。n を自然数とし，$a_n=\sqrt{n^2+1}-n$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$0<a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2)　b_n を $\left(3n-\dfrac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする。b_n を n を用いて表せ。

(3)　b_n を(2)で定めたものとする。m，n を異なる 2 つの自然数とするとき，$a_m+b_n\neq 1$ であることを示せ。　[2025]

2　c を正の実数とする。各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。a_1 は関数 $y=x+\sqrt{c-x^2}$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{c})$ が最大値をとるときの x の値とする。a_{n+1} は関数 $y=x+\sqrt{a_n-x^2}$ $(0\leqq x\leqq\sqrt{a_n})$ が最大値をとるときの x の値とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log_2 a_n$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を c を用いて表せ。

(2)　b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ。　[2024]

3　関数 $f(x)$ を，$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} & (x\leqq 1)\\ 2x-1 & (x>1)\end{cases}$ で定める。a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　すべての実数 x について $f(x)\geqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a\leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n\leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ。　[2023]

4　数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n について $a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。b_n の値を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2022]

5　a, b を実数，p を素数とし，$1 < a < b$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　x, y, z を 0 でない実数とする。$a^x = b^y = (ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ であることを示せ。

(2)　$m,\ n$ を $m > n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ とする。$m,\ n$ の値を p を用いて表せ。

(3)　m, n を自然数とし，$a^m = b^n = (ab)^p$ とする。b の値を a, p を用いて表せ。

[2022]

6　i を虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ。　[2021]

7　p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p + 1},\ \ x_{n+1} = \left|2x_n - 1\right| \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　$p = 3$ のとき，x_n を求めよ。

(2)　$x_{p+1} = x_1$ であることを示せ。　[2020]

8　次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする。

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

すなわち，$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_3 = 4$ で, 4 以上の自然数 n に対し，$a_n = a_{n-3}$ とする。この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ。

(3)　どのような自然数 k に対しても，$S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ。

[2019]

9 約数，公約数，最大公約数を次のように定める。

・ 2 つの整数 a, b に対して，$a = bk$ を満たす整数 k が存在するとき，b は a の約数という。

・ 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という。

・ 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という。

以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, p は 0 でない整数で $a = pb + c$ を満たしているとする。

(i) $a = 18$，$b = 30$，$c = -42$，$p = 2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ。

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする。M と N は等しいことを示せ。ただし，a, b, c, p は 0 でない任意の整数とする。

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を，$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$，$a_1 = 3$，$a_2 = 4$ で定める。

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ。

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2016]

10 a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(∗)を考える。

(∗) 3 辺の長さが a, b, c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) $a = b > c$ であり，かつ条件(∗)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2) $a > b > c$ であり，かつ条件(∗)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3) 条件(∗)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。　[2015]

11 m，$n\,(m < n)$ を自然数とし，$a = n^2 - m^2$，$b = 2mn$，$c = n^2 + m^2$ とおく。3 辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ。

(2) r を m, n を用いて表せ。

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。　[2014]

12 p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

(1) $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(2) $a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

(3) a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。 [2010]

13 t を実数として, 数列 a_1, a_2, …を

$$a_1=1\,,\ \ a_2=2t\,,\ \ a_{n+1}=2ta_n-a_{n-1}\quad (n\geqq 2)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 1$ ならば, $0<a_1<a_2<a_3<\cdots$ となることを示せ。

(2) $t\leqq -1$ ならば, $0<|a_1|<|a_2|<|a_3|<\cdots$ となることを示せ。

(3) $-1<t<1$ ならば, $t=\cos\theta$ となる θ を用いて,

$$a_n=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\quad (n\geqq 1)$$

となることを示せ。 [2009]

14 1 から n までの自然数 1, 2, 3, … , n の和を S とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば, S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

[2008]

15 座標平面上の点 $(p,\ q)$ で, p と q がともに整数であるものを格子点という。次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し, $p+2q=n$, $p>0$, $q>0$ を満たす格子点 $(p,\ q)$ の個数を a_n とする。a_n を求めよ。

(2) 自然数 n に対し, $p+2q<n$, $p>0$, $q>0$ を満たす格子点 $(p,\ q)$ の個数を b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$ を求めよ。 [2003]

■ 確率

1　n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ。

(2)　1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ。

(3)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ。

[2024]

2　n を 2 以上の整数とする。袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている。以下の問いに答えよ。

(1)　この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

(2)　この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ。

(3)　この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n+1$ 以上である確率を求めよ。 [2023]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(2)　和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(3)　和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。 [2020]

4　n を 2 以上の整数とする。2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　P_2，P_3，P_4 を求めよ。

(2)　$n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ。

(3)　$P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ。 [2019]

5　さいころを 3 回ふって, 1 回目に出た目の数を a, 2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし, 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ ……(＊)を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　(＊)が $x=1$ を解にもつ確率を求めよ。

(2)　(＊)が整数を解にもつとする。このとき(＊)の解はともに正の整数であり, また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ。

(3)　(＊)が整数を解にもつ確率を求めよ。　[2018]

6　$\vec{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$, $\vec{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$, $\vec{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする。座標空間内の動点 P が原点 O から出発し, 正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{4}$ で出る）をふるごとに, 出た目が $k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\vec{v_k}$ だけ移動する。すなわち, サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として, サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば, $\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\vec{v_k}$ である。ただし, $\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ。

(3)　4 点 P_0, P_1, P_2, P_3 が同一平面上にある確率を求めよ。

(4)　n を 6 以下の自然数とする。$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となる確率を求めよ。　[2017]

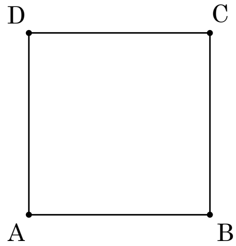
7　n を自然数とする。1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ, よくかき混ぜて n 枚を取り出し, 取り出した n 枚のカードの数字の合計を A, 残された n 枚のカードの数字の合計を B とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　n が奇数のとき, A と B が等しくないことを示せ。

(2)　n が偶数のとき, A と B の差は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき, A と B が等しい確率を求めよ。　[2014]

8 動点 P が，図のような正方形 ABCD の頂点 A から出発し，さいころをふるごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する。



出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する。

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する。

n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n, C にいる確率を c_n とする。次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいることを証明せよ。

(3) a_n，c_n を n を用いてそれぞれ表せ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ をそれぞれ求めよ。 [2013]

9 N を自然数とする。赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする。2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する。赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n=0,\ 1,\ \cdots,\ N$ に対して，$X=n$ となる確率 p_n を求めよ。

(2) X の期待値を求めよ。

(3) $n=0,\ 1,\ \cdots,\ N$ に対して，$Y=n$ となる確率 q_n を求めよ。 [2010]

10　大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて，大きいサイコロの出た目の数 A，および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える。ただし，このゲームには 6 種類の得点 X_n $(1 \leqq n \leqq 6)$ があって，それぞれ，次の規則で定められているとする。

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geqq n\text{のとき}) \\ B & (A < n\text{かつ}A \neq B\text{のとき}) \\ aA + b & (A < n\text{かつ}A = B\text{のとき}) \end{cases}$$

ここで，a，b は実数の定数である。また，得点 X_n の期待値を E_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　A, B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を，答案用紙の表にそれぞれ記入せよ。

(2)　$E_4 - E_3$ を求めよ。

(3)　$E_1 = E_2 = \cdots = E_6$ となるような a，b はあるか。あれば求めよ。なければ，そのことを示せ。　[2009]

11　次の問いに答えよ。

(1)　1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚，2 の数字を書いたカードを 3 枚，3 の数字を書いたカードを 3 枚，計 9 枚用意する。この中から無作為に，一度に 3 枚のカードを選んだとき，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2007]

12 A, B, C, D 4 つの袋の中にそれぞれ 6 枚のカードが入っている。それぞれのカードには 1 から 9 までの数字の 1 つが書かれている。A, B, C, D の袋の中のカードは次の 4 つの条件を満たしているとする。

(i) 袋の中からカードを無作為に 1 枚抜いたとき，カードに書かれている数字の期待値は, A, B, C, D すべて同じである。

(ii) $p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=p(\mathrm{B},\ \mathrm{C})=p(\mathrm{C},\ \mathrm{D})=p(\mathrm{D},\ \mathrm{A})=\dfrac{2}{3}$ である。ここで，$p(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ は袋 X と袋 Y からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に抜いたとき，X から抜いたカードに書かれている数字が Y から抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す。

(iii) A, B, C の袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ 2 種類で, D の袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている。

(iv) A の袋の中のカードに書かれている数字の種類は 3 と 9 である。

次の問いに答えよ。

(1) A の袋の中の 3 の書かれているカードの枚数と，D の袋の中のカードに書かれた数字を求めよ。

(2) B の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。

(3) C の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。 [2005]

13 次のようなゲームを考える。右のように 1 から 9 までの数字が書かれている表を用意する。

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方，9 枚のカードがあり 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれている。これらのカードをよくまぜ，順に並べる。カードを並べた順に見て，カードに書いてある数字を表から消し，かわりに＊印を書き込む。この表で縦，横あるいは斜めのいずれかに＊印が 3 つ初めて並んだとき，その時点で表にある＊印の個数を得点とする。

たとえば，最初の 4 枚のカードが，順に 5, 4, 6, 9 であれば，下のように変化する。

＊	2	8
1	9	3
7	4	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	＊

＊	2	8
1	＊	3
7	＊	＊

その結果，＊印が初めて 3 つ並んだ。このとき，得点は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ。また，得点が最小となる確率を求めよ。

(2) このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ。また，得点が最大となる確率を求めよ。　[2004]

14 数字 1, 2, …, N の書かれたカードが 1 枚ずつ N 枚入っている箱から，元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで，$2 \leqq k \leqq N$ とする。引いたカードの順に，書かれている数字を x_1，x_2，…，x_k とする。次の問いに答えよ。

(1) $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$，すなわち k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。

(2) i は整数で，$2 \leqq i \leqq k$ を満たすとする。$x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1}$，$x_{i-1} > x_i$ である確率，すなわち k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き，i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。

(3) N は 5 以上の整数で，$k=5$ とする。$2 \leqq i \leqq 5$ を満たす各整数 i について上の(2)の事象が起こるとき，得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき，得点の期待値を求めよ。　[2002]

15　白球 3 個，赤球 2 個，青球 1 個合計 6 個の球の入っている袋がある。最初に A 君が，つぎのルール(i)，(ii)に従って袋から球を 1 個または 2 個取り出す。次に B 君が同じルールに従って，袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す。ただし，いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする。

(i)　取り出した 1 個目が赤球ならば，2 個目を取り出すことはできない。

(ii)　取り出した 1 個目が赤球以外ならば，さらに 1 個だけ取り出す。

白球は 1 点，赤球は 2 点，青球は 3 点とし，取り出した球の合計点を各自の得点とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ。

(2)　A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ。　[2001]

■ 論証

1　実数 x，y に関する次の各命題の真偽を答えよ。さらに，真である場合は証明し，偽である場合は反例をあげよ。

(1)　$x>0$ かつ $xy>0$ ならば，$y>0$ である。

(2)　$x\geqq 0$ かつ $xy\geqq 0$ ならば，$y\geqq 0$ である。

(3)　$x+y\geqq 0$ かつ $xy\geqq 0$ ならば，$y\geqq 0$ である。　[2008]

2　関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $x=a$ において微分可能であることの定義を述べよ。

(2)　次の 2 つの命題のうち正しいものを選び，それが正しい理由を示せ。

(i)　$f(x)$ が $x=a$ において連続ならば，必ず，$f(x)$ は $x=a$ において微分可能である。

(ii)　$f(x)$ が $x=a$ において連続であっても，$f(x)$ は $x=a$ において微分可能であるとは限らない。

(3)　関数 $f(x)=\cos x$ が $x=a$ において微分可能であることを，(1)で答えた定義を用いて証明せよ。　[2002]

3 次の問いに答えよ。

(1) a, b, c を整数とする。x に関する 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が有理数の解をもつならば，その解は整数であることを示せ。ただし，正の有理数は 1 以外の公約数をもたない 2 つの自然数 m, n を用いて $\dfrac{n}{m}$ で表せることを用いよ。

(2) 方程式 $x^3+2x^2+2=0$ は，有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

[2001]

■ 複素数

1 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で，3 次の係数は 1，定数項は -3 とする。方程式 $f(x)=0$ は, 1 と虚数 α，β を解にもつとし，α の実部は 1 より大きく，α の虚部は正とする。複素数平面上で α，β，1 が表す点を順に A，B，C とし，原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) α の絶対値を求めよ。

(2) θ を α の偏角とする。$\triangle$ABC の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ。

[2018]

2 $i=\sqrt{-1}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 α，β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して，$z=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$ とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ。

(3) 2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

が成り立つことを示せ。

[2011]

3　$\alpha=\cos\dfrac{360^\circ}{5}+i\sin\dfrac{360^\circ}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。100 個の複素数 z_1，z_2，…，z_{100} を，$z_1=\alpha$，$z_n={z_{n-1}}^3$ $(n=2,\ \cdots,\ 100)$ で定める。次の問いに答えよ。

(1)　z_5 を α を用いて表せ。

(2)　$z_n=\alpha$ となるような n の個数を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ。　[2004]

4　次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　複素数 z に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき，複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2)　複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{z+i}$ とする。$z\neq\pm i$ のとき，複素数平面上で w_1 を表す点を P，w_2 を表す点を Q とする。P, Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。　[2003]

5　0 でない複素数 z に対して，$w=u+iv$ を $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし, u, v は実数，i は虚数単位である。

(1)　複素数平面上で, z が単位円 $|z|=1$ 上を動くとき, w はどのような曲線を描くか。u, v が満たす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

(2)　複素数平面上で，z が実軸からの偏角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。u，v が満たす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。
[2002]

■ 曲線

1　a を正の実数とし，双曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする。線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

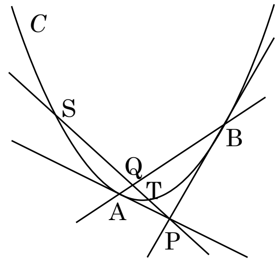
(2)　s, t の値を a を用いて表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ。

(4)　t の値を s を用いて表せ。　[2022]

2　xy 平面において放物線 $C : y=x^2$ と，その下側にある点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ $(q<p^2)$ を考える。P を通るような C の 2 つの接線を考え，その接点をそれぞれ A，B とする。また, P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S, T で交わるとする。

点 A, B の x 座標をそれぞれ a，b とし，点 S，T の x 座標をそれぞれ s，t とする。次の問いに答えよ。



(1)　$a+b$，ab を p, q で表せ。

(2)　$s+t$，st を p, q, m で表せ。

(3)　直線 AB と直線 ST の交点を Q とし，Q の x 座標を u とする。右図のように $s<u<t<p$ となる場合について，等式 $\frac{1}{\mathrm{PS}}+\frac{1}{\mathrm{PT}}=\frac{2}{\mathrm{PQ}}$ が成立することを示せ。　[2006]

■ 極限

1 m を 3 以上の自然数，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする。円 C_1 に内接する（すべての頂点が C_1 上にある）正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する（P_1 のすべての辺と接する）円を C_2 とする。同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする。C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}s_n$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) r_n，s_n の値を θ, n を用いて表せ。

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f(m)$ を求めよ。

ただし，必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ を用いてよい。 [2022]

2 k を 2 以上の整数とする。また，$f(x)=\dfrac{1}{k}\Big((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\Big)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1>1$，$x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとき，$x_n>1$ を示せ。

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，$x_{n+1}-1<\dfrac{k-1}{k}(x_n-1)$ を示せ。また $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。

[2018]

3 n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

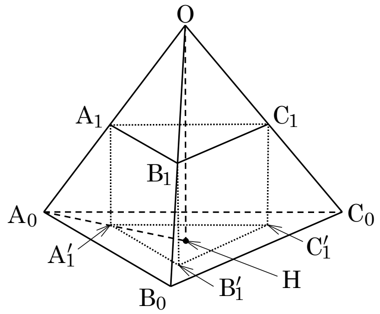
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-S=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式 $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。 [2017]

4　1 辺の長さが a_0 の正四面体 $\mathrm{OA_0B_0C_0}$ がある。図のように，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上の点 $\mathrm{A_1}$，辺 $\mathrm{OB_0}$ 上の点 $\mathrm{B_1}$，辺 $\mathrm{OC_0}$ 上の点 $\mathrm{C_1}$ から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A_1B_1C_1}$-$\mathrm{A_1'B_1'C_1'}$ は正三角柱になるとする。ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする。同様に，点 $\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，…を次のように定める。正四面体 $\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ において，辺 OA_k 上の点 A_{k+1}，辺 OB_k 上の点 B_{k+1}，辺 OC_k 上の点 C_{k+1} から平面 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$ に下ろした垂線をそれぞれ $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+1}'$，$\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}'$，$\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}'$ としたとき，三角柱 $\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$-$\mathrm{A}_{k+1}'\mathrm{B}_{k+1}'\mathrm{C}_{k+1}'$ は正三角柱になるとする。辺 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ の長さを a_k とし，正三角柱 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$-$\mathrm{A}_k'\mathrm{B}_k'\mathrm{C}_k'$ の体積を V_k とするとき，以下の問いに答えよ。



(1)　点 O から平面 $\mathrm{A_0B_0C_0}$ に下ろした垂線を OH とし，$\theta=\angle\mathrm{OA_0H}$ とするとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　a_1 を a_0 を用いて表せ。

(3)　V_k を a_0 を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V_k$ を求めよ。　[2017]

5　a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k=\dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x_k=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}+\dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a, b を用いて表せ。

(2)　$b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ を求めよ。また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k$ を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ の和を求めよ。　[2015]

6　n を 2 以上の自然数として，$S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k\log k}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x}$ を求めよ。

(2)　k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。　[2011]

7　a を正の実数とする。xy 平面上の放物線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{A}(-a,\ a^2)$ をとる。$s>0$ のとき, x 軸上の点 $\mathrm{P}(s,\ 0)$ に対して, 直線 AP と C の 2 つの交点のうち, A とは異なる交点を $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ とする。Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $\mathrm{P}'(t,\ 0)$ とする。いま, x 軸上の点 $\mathrm{P}_1(c,\ 0)$ $(c>0)$ から出発して, 点 P に対して点 Q, P′ を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1，P_2 を定め, 同様に P_2 から点 Q_2，P_3 を定め, この方法を繰り返して，P_1，P_2，P_3，…と Q_1，Q_2，Q_3，…を定める。次の問いに答えよ。

(1)　t を a と s を用いて表せ。

(2)　点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の x 座標を x_n とする。数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \dfrac{1}{x_n}$ で定める。$\{u_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　直角三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n で表す。自然数 r を選んで, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる。このような r の値とそのときの極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ を求めよ。　[2005]

8　t を正の実数とし, k を自然数とする。無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき, それを t と k を用いて表せ。

(2)　$x>0$ のとき，$F_k(x) = \displaystyle\int_1^x f_k(t)\,dt$ を計算せよ。

(3)　$x>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} F_k(x)$ を求めよ。　[2004]

■ 微分法

1 k を実数とする。$f(x)$ と $g(x)$ を，$f(x)=\left|x^3-x\right|$，$g(x)=k(x+1)$ とおき，曲線 $y=f(x)$ を C，直線 $y=g(x)$ を l とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。ただし，関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない。

(2) 曲線 C と直線 l がちょうど 4 つの共有点をもつような k の値を求めよ。 [2025]

2 α は実数とし，$f(x)$ は係数が実数である 3 次式で，次の条件(i)，(ii)をみたすとする。

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は 1 である。

(ii) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，$f(\alpha)=f'(\alpha)=0$ が成り立つ。

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ。

(2) $f(\alpha+2)=0$ とする。$f'(x)=0$ かつ $x\neq\alpha$ をみたす x を α を用いて表せ。

(3) (2)の条件のもとで $\alpha=0$ とする。xy 平面において不等式

$$y\geqq f(x)\ \text{かつ}\ y\geqq f'(x)\ \text{かつ}\ y\leqq 0$$

の表す部分の面積を求めよ。 [2020]

3 n を自然数とし，$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ に対して $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) (1)の x の値を x_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ。 [2020]

4 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の $x>0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2) a を $a\neq1$ を満たす正の実数とする。曲線 $y=e^x$ と曲線 $y=x^a$ $(x>0)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする。点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ。

(3) a と t を(2)で求めた実数とする。x を $x\neq t$ を満たす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ。 [2019]

5　n を自然数とする。$f(x)=\sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$ とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\frac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。

(2)　方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ1つもつことを示せ。

(3)　(2)における解を x_n とする。$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示し，$\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ。

[2017]

6　r，c，ω は正の定数とする。座標平面上の動点 P は時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする。また，動点 Q は時刻 $t=0$ のとき点 $(0,\ -r)$ にあるとする。点 P から見て，動点 Q が点 P を中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　時刻 t における動点 Q の座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2)　動点 Q の描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1 \neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1)) \neq (x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r，c，ω を用いて与えよ。

[2017]

7　座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ を C とする。$a>2$，$0<\theta<\pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする。点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする。このとき，$0<\theta<\pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする。このとき，$0<\theta<\pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ。

[2015]

8　a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を，$y=x^4-2(a+1)x^3+3ax^2$ で定める。曲線 C が 2 つの変曲点 P, Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする。三角形 PQR の面積を求めよ。

(3)　曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点をP' とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点をQ' とする。線分 $\mathrm{P}'\mathrm{Q}'$ の中点の x 座標を求めよ。

[2015]

9　a を実数とし，$f(x)=xe^x-x^2-ax$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点$(0,\ f(0))$に おける接線の傾きを-1とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　b を実数とするとき，2 つの曲線 $y=xe^x$ と $y=x^2+ax+b$ の $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ。　[2014]

10　a, b を正の実数とし，xy 平面上に 3 点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ b)$をとる。三角形 OAB を，原点 O を中心に90°回転するとき，三角形 OAB が通過してできる図形を D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　D を xy 平面上に図示せよ。

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

(3)　$a+b=1$ のとき，(2)で求めた V の最小値と，そのときの a の値を求めよ。

[2014]

11　以下の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq 1$ において，$x>2\log x$ が成り立つことを示せ。ただし，e を自然対数の底とするとき，$2.7<e<2.8$ であることを用いてよい。

(2)　自然数 n に対して，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ が成り立つことを示せ。　[2011]

12　a を実数とする。関数 $f(x)=ax+\cos x+\dfrac{1}{2}\sin 2x$ が極値をもたないように，a の値の範囲を定めよ。　[2010]

13　$a,\ b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log\big(ax+b(1-x)\big)-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし, log は自然対数を表す。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 c が, $0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 x に対して，$ax+b(1-x)\geqq a^xb^{1-x}$ が成り立つ。　[2009]

14　$f(x)=x^3-3x+1$，$g(x)=x^2-2$ とし，方程式 $f(x)=0$ について考える。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$f(x)=0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。

(2)　α が $f(x)=0$ の解ならば，$g(\alpha)$ も $f(x)=0$ の解となる。

(3)　$f(x)=0$ の解を小さい順に α_1，α_2，α_3 とすれば,

$$g(\alpha_1)=\alpha_3,\quad g(\alpha_2)=\alpha_1,\quad g(\alpha_3)=\alpha_2$$

となる。　[2009]

15　$f(x)=e^x-x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　実数 x について $f(x)\geqq 1$ であることを示せ。

(2)　t は実数とする。このとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。　[2007]

16　a を正の定数とする。不等式 $a^x\geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。　[2004]

17　関数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2-3x+18}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極小値をすべて求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。ただし，必要ならば $e>2.7$ を用いてよい。　[2003]

18　関数 $f(x)=1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\log x}{x}\ (x>0)$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数 $\log x$ の底である。

(1)　$f(x)$ の極値と変曲点を求め，グラフの概形を描け。ここで $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。また，グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2001]

■ 積分法

1　連続関数 $f(x)$ は $x\geqq 0$ で $f(x)\geqq 0$ を満たし，$x>0$ で微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする。$t\geqq 1$ を満たす t に対して，原点 O と点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ の距離を $g(t)$ とする。また，$t>1$ を満たす t に対して，$y=f(x)\ (1\leqq x\leqq t)$ で表される曲線の長さを $h(t)$ とし，$t=1$ のときは $h(1)=0$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$t>1$ とする。開区間 $(1,\ t)$ で常に $f(x)-xf'(x)=0$ が成り立つならば，閉区間 $[1,\ t]$ で $\dfrac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ。

(2)　$t\geqq 1$ を満たす任意の t に対して，$g(t)=h(t)+2$ が成り立つとする。このとき，$f(1)$ の値を求めよ。また，$t\geqq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ。　[2025]

2　0 以上の実数 x に対して，$f(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-x}^{x}\dfrac{1}{1+u^2}\,du$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して，$f(\tan\alpha)$ を求めよ。

(2)　xy 平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ f(x)+f(y)\leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ。　[2024]

3　次の定積分を求めよ。

(1)　$I=\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(2)　$J=\displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$　[2021]

4　a, b を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=a\cos x+b$ が，$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3dx$ を満たすとする。このとき，a, b が満たす関係式を求めよ。

(2)　(1)で求めた関係式を満たす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ。

[2013]

5　$x>0$ に対し，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ と定め，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{d}{dx}f(x)$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{d}{dx}g(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を求めよ。　[2012]

6　自然対数の底を e とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$e<3$ であることを用いて，不等式 $\log 2>\dfrac{3}{5}$ が成り立つことを示せ。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-x$ の導関数を求めよ。

(3)　積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx$ の値を求めよ。

(4)　(3)で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ。　[2012]

7　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \text{ または } x>2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0\leqq x\leqq 2 \text{ のとき}\end{cases}$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=f(f(x))$ とおく。関数 $y=g(x)$ のグラフをかけ。

(2)　n を自然数とする。$\displaystyle\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}dx$ を求めよ。　[2005]

8　$f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0)=0$，$f(\pi)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=-\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx$ を示せ。

(2)　$f(x)=x(x-\pi)$ のとき，実数 a に対し，$F(a)=\displaystyle\int_0^{\pi}\{af(x)-\sin x\}^2dx$ とする。a を変化させたとき，$F(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[2003]

■ 積分の応用

1　媒介変数 θ を用いて，$x=\sin\theta$，$y=\cos\theta+|\sin\theta|$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形をかけ。

(2)　曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2025]

2　1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち，高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を，頂点の座標がそれぞれ A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(-1,\ 0,\ 0)$，D$(0,\ -1,\ 0)$，E$(1,\ 0,\ 1)$，F$(0,\ 1,\ 1)$，G$(-1,\ 0,\ 1)$，H$(0,\ -1,\ 1)$ になるように xyz 空間内におく。以下の問いに答えよ。

(1)　直方体 ABCD-EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし，また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする。X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ。

(2)　$0\leqq t\leqq 1$ とする。平面 $x=t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ。

(3)　直方体 ABCD-EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする。X_3 の体積 V_3 を求めよ。　[2024]

3　媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{dx}{dt}=0$ または $\dfrac{dy}{dt}=0$ となる t の値を求めよ。

(2)　C の概形を xy 平面上に描け。

(3)　C の $y\leqq 0$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2023]

4　a を実数，$0<a<1$ とし，$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$f(1)=0$ とする。曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2022]

5　座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P と原点 O との距離を求めよ。

(2)　点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ。　[2021]

6　θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点 O，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ を頂点とする△OAB の内接円の中心を P とする。また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ。

(2)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2020]

7　媒介変数表示　$x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$　$(0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2)　C の凹凸を調べ，C の概形を描け。

(3)　C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。　[2019]

8　座標空間において，O を原点とし，$A(2,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 2,\ 0)$，$C(1,\ 1,\ 0)$ とする。$\triangle$OAB を直線 OC のまわりに 1 回転してできる回転体を L とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 OC 上にない点 $P(x,\ y,\ z)$ から直線 OC に下ろした垂線を PH とする。$\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{HP}$ を x, y, z の式で表せ。

(2)　$P(x,\ y,\ z)$ が L の点であるための条件は，$z^2 \leqq 2xy$ かつ $0 \leqq x+y \leqq 2$ であることを示せ。

(3)　$1 \leqq a \leqq 2$ とする。L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y,\ z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ。　[2018]

9　a を正の定数とし，2 曲線 $C_1 : y=\log x$，$C_2 : y=ax^2$ が点 P で接しているとする。以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標と a の値を求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 と x 軸で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2016]

10　極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta \to \pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3)　曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4)　曲線 C の長さを求めよ。　[2016]

11　座標平面上の 2 つの曲線 $y=\dfrac{x-3}{x-4}$，$y=\dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2015]

12　c を $0<c<1$ を満たす実数とする。$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y=f(x)$ が 3 点 $(0,\ 0)$，$(c,\ c^3-2c)$，$(1,\ -1)$ を通るとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=x^3-2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S を最小にするような c の値を求めよ。　[2013]

13　座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0\leqq t\leqq 1$ を用いて

$$x=1-t^2,\quad y=t-t^3$$

と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2012]

14　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$，$g(x)=\dfrac{2\log x}{x^2}$　$(x>0)$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，自然対数の底 e について，$e=2.718\cdots$ であること，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることを証明なしで用いてよい。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(2)　区間 $x>0$ において，関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の増減，極値を調べ，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。

(3)　区間 $1\leqq x\leqq e$ において，2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$，および直線 $x=e$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

15　a を $0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y=\cos(x-a)$，$y=-\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　図形 G の面積を S とする。S を a を用いた式で表せ。

(2)　a が $0\leqq a<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，S を最大にするような a の値と，そのときの S の値を求めよ。

(3)　図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。V を a を用いた式で表せ。　[2009]

16 xy 平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ 2)$，$\mathrm{C}(2,\ 1)$，$\mathrm{D}(4,\ 1)$，$\mathrm{P}(0,\ 3)$ をとる。点 P を通り傾き a の直線 l が，線分 BC と交わり，その交点は B, C と異なるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 直線 l と線分 AB, 線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1，直線 l と線分 BC, 線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき，それらの和 $V=V_1+V_2$ を a の式で表せ。

(3) (1)で求めた a の値の範囲で，(2)で求めた V は，$a=-\dfrac{3}{4}$ のとき最小値をとることを示せ。 [2008]

17 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$で表される曲線を C とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。 [2007]

18 xyz 空間に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{R}(-1,\ 1,\ 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) t を $0<t<2$ を満たす実数とするとき，平面 $z=t$ と，$\triangle\mathrm{PQR}$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。 [2006]

19 正の実数 a, b に対して，2 つの曲線 $C_1 : ay^2=x^3\ (x \geqq 0,\ \ y \geqq 0)$，$C_2 : bx^2=y^3$ $(x \geqq 0,\ \ y \geqq 0)$ の原点 O 以外の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 交点 P の座標を求め，2 つの曲線 C_1，C_2 の概形を描け。

(2) 2 つの曲線 C_1，C_2 で囲まれる部分の面積を a と b で表せ。また，この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。 [2002]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$a,\ b$ を実数とする。整式 $f(x)$ を $f(x)=x^2+ax+b$ で定める。以下の問いに答えよ。ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。

(3)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ。　[2023]

解答例＋映像解説

(1)　$f(x)=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b$ に対し，$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつ条件は，$y=f(x)$ のグラフの頂点が $\left(-\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4}+b\right)$ であることに注意して，

$$-\frac{a}{2}>0,\ -\frac{a^2}{4}+b<0,\ f(0)=b>0$$

まとめると，$a<0$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ である。

(2)　$f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに 0 より小さくなる条件は，

(i)　異なる実数解をもつ $\left(b<\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき　$-\dfrac{a}{2}<0,\ f(0)=b>0$ より，

$$a>0 \text{ かつ } 0<b<\frac{a^2}{4}$$

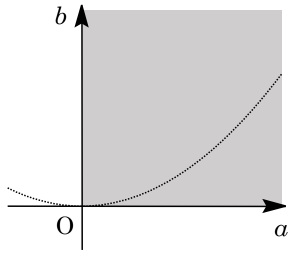
(ii)　重解をもつ $\left(b=\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき　$-\dfrac{a}{2}<0$ より，$a>0$ かつ $b=\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii) 虚数解をもつ $\left(b>\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

解の実部は $-\dfrac{a}{2}$ から $-\dfrac{a}{2}<0$ となり，

$$a>0 \text{ かつ } b>\frac{a^2}{4}$$

(i)～(iii)より，点 $(a,\ b)$ は右図の網点部に存在する。ただし，境界は含まない。



(3)　$f(x)=0$ の 2 つの解の実部がともに -1 より大きく，0 より小さくなる条件は，

(i)　異なる実数解をもつ $\left(b<\dfrac{a^2}{4}\right)$ とき

$$-1<-\frac{a}{2}<0,\ f(-1)=1-a+b>0,\ f(0)=b>0$$

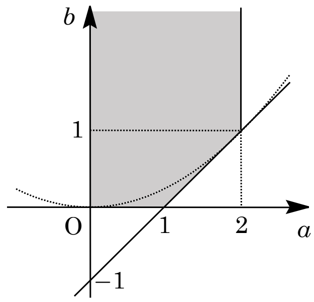
まとめると，$0<a<2$ かつ $0<b<\dfrac{a^2}{4}$ かつ $b>a-1$ である。

(ii)　重解をもつ$\left(b=\dfrac{a^2}{4}\right)$とき　$-1<-\dfrac{a}{2}<0$ より，$0<a<2$ かつ $b=\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii) 虚数解をもつ$\left(b>\dfrac{a^2}{4}\right)$とき

解の実部は$-\dfrac{a}{2}$から$-1<-\dfrac{a}{2}<0$となり，

$$0<a<2 \text{ かつ } b>\frac{a^2}{4}$$



(i)～(iii)より，点$(a,\ b)$は右図の網点部に存在する。

ただし，境界は含まない。

コメント

2 次方程式の解の配置の問題です。(2)と(3)では，問題文の「解の実部」という表現により，場合分けをしています。

問　題

a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を a を用いて表せ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域を ab 平面上に図示せよ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2016]

解答例

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|=\left|(x+a)^2-a^2+a\right|$ に対して，

(i)　$-a^2+a<0\ (a>1)$ のとき

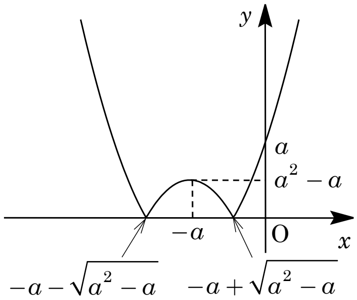
$-a-\sqrt{a^2-a}<x<-a+\sqrt{a^2-a}$ において，

$$f(x)=-x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a$$

$x\leqq -a-\sqrt{a^2-a}$，$-a+\sqrt{a^2-a}\leqq x$ において，

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

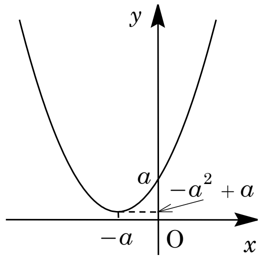
よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(ii)　$-a^2+a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



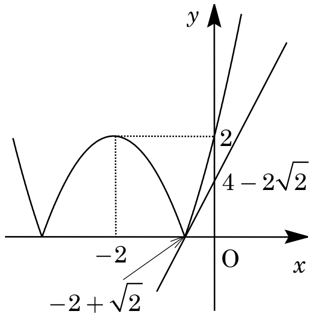
(2)　$a=2$ のとき，$f(x)=\left|x^2+4x+2\right|$ となる。

さて，$y=x^2+4x+2$ のグラフ上の $x=t$ における接線の傾きが 2 とすると，$y'=2x+4$ から，

$$2t+4=2,\ t=-1$$

すると，$-1<-2+\sqrt{2}$ から，$y=f(x)$ のグラフがつねに直線 $y=2x+b$ の上側にあり，しかも b の値が最大になるのは，右図の位置関係の場合である。

すなわち，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b のとり得る値は，$b\leqq 4-2\sqrt{2}$ である。



(3)　(a)　$0<a\leqq 1$ のとき

(1)(ii)の場合から $f(x)=x^2+2ax+a$ となり，$y=f(x)$ のグラフ上の $x=t$ において接線の傾きが 2 とすると，$f'(x)=2x+2a$ から，

$$2t+2a=2,\ t=1-a$$

ここで，直線 $y=2x+b$ が点 $(1-a,\ f(1-a))=(1-a,\ -a^2+a+1)$ を通るとき，

$$-a^2+a+1=2(1-a)+b,\ \ b=-a^2+3a-1$$

よって，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b の条件は，

$$b\leqq -a^2+3a-1$$

(b)　$1<a\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

(a)より，$y=x^2+2ax+a$ のグラフと直線 $y=2x+b$ の接点は $x=1-a$ となり，まず，この値と $x=-a+\sqrt{a^2-a}$ との大小関係を調べると，

$$-a+\sqrt{a^2-a}-(1-a)=\sqrt{a^2-a}-1=\sqrt{\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}-1\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}-1<0$$

これより，$-a+\sqrt{a^2-a}<1-a$ となり，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=2x+b$ がただ 1 つの共有点をもつとき，この点は $y=x^2+2ax+a$ 上の接点である。

すると，(a)と同様に，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b の条件は，

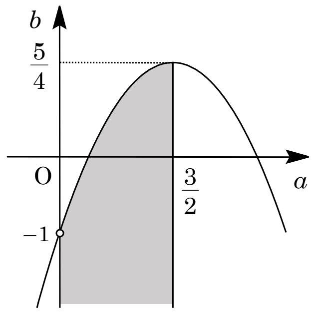
$$b\leqq -a^2+3a-1$$

(a)(b)より，求める条件は，$0<a\leqq\dfrac{3}{2}$ において，

$$b\leqq -a^2+3a-1=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

この条件を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，b 軸以外の境界線は領域に含む。



コメント

絶対値つきの関数のグラフについての基本問題です。(2)(3)では，図だけで処理をするには微妙な感じでしたので，まず数式を用いて確認をしています。

問　題

a は正の無理数で，$X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$，$Y = a^2 - 2a$ を考えると, X と Y はともに有理数である。以下の問いに答えよ。

(1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) X と Y の値を求めよ。

(3) a の値を求めよ。ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

[2011]

解答例

(1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ると，

$$x^3 + 3x^2 - 14x + 6 = (x^2 - 2x)(x + 5) - 4x + 6$$

よって，商は $x + 5$，余りは $-4x + 6$ である。

(2) (1)より，$X = Y(a + 5) - 4a + 6$ ……(＊)となり，

$$(-X + 5Y + 6) + (Y - 4)a = 0$$

X と Y は有理数, a は無理数から，$-X + 5Y + 6 = Y - 4 = 0$

よって，$X = 26$，$Y = 4$

(3) $Y = 4$ より，$a^2 - 2a - 4 = 0$ となり, $a > 0$ から，$a = 1 + \sqrt{5}$

このとき, (＊)から，$X = 26$ となる。

よって，$a = 1 + \sqrt{5}$

コメント

有理数と無理数を題材に，除法に関する等式をからめた問題です。計算も穏やかで文系風ですが，内容は受験生の意表を突くものです。

問　題

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（p, q は実数）を求めよ。

(2)　整数 a，b，c を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

解答例

(1)　実数係数の 2 次方程式の 1 つの解が $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ であるとき，もう 1 つの解は $\overline{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$ であるので，

$$\alpha+\overline{\alpha}=3,\ \ \alpha\overline{\alpha}=\frac{9+7}{4}=4$$

よって，α，$\overline{\alpha}$ を解とする 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$x^2-3x+4=0$$

(2)　まず，x^3+ax^2+bx+c を x^2-3x+4 で割ると，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3x+4)(x+a+3)+(3a+b+5)x+(-4a+c-12)$$

ここで，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は，解として α，$\overline{\alpha}$ をもつので，

$$3a+b+5=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ -4a+c-12=0\cdots\cdots\cdots②$$

このとき，もう 1 つの解は，$x=-a-3$ となり，条件より，

$$0\leqq -a-3\leqq 1,\ \ -4\leqq a\leqq -3$$

すると，a は整数より，$a=-4,\ -3$

$a=-4$ のとき，①より $b=7$，②より $c=-4$ となり，また $a=-3$ のとき，①より $b=4$，②より $c=0$ となり，b, c も整数である。

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-4,\ 7,\ -4)$，$(-3,\ 4,\ 0)$

コメント

複素数と方程式の基本題です。(2)では，3 次方程式の解と係数の関係を利用するという手もあります。

問　題

a, b, c は実数で，$a \neq 0$ とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c,\quad l_1 : y = -3x + 3,\quad l_2 : y = x + 3$$

で定める。l_1，l_2 がともに C に接するとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を求めよ。また c を a を用いて表せ。

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) C と l_1 の接点を P，C と l_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする。a が(2)の条件を満たしながら動くとき，△PQR の重心 G の軌跡を求めよ。 [2024]

解答例＋映像解説

(1) $C : y = ax^2 + bx + c$ ……①，$l_1 : y = -3x + 3$ ……②，$l_2 : y = x + 3$ ……③に対し，

$a \neq 0$ において①②を連立すると，$ax^2 + bx + c = -3x + 3$ となり，

$$ax^2 + (b+3)x + c - 3 = 0 \text{ ………④}$$

C と l_1 が接することより，$D = (b+3)^2 - 4a(c-3) = 0$ ………⑤

$a \neq 0$ において①③を連立すると，$ax^2 + bx + c = x + 3$ となり，

$$ax^2 + (b-1)x + c - 3 = 0 \text{ ………⑥}$$

C と l_2 が接することより，$D = (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0$ ………⑦

⑤⑦より，$(b+3)^2 - (b-1)^2 = 0$ となり，$4(2b+2) = 0$ から $b = -1$

⑤に代入して $4 - 4a(c-3) = 0$ となり，$a(c-3) = 1$ から $c = \dfrac{1}{a} + 3$

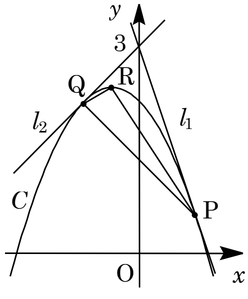
(2) (1)から，$C : y = ax^2 - x + \dfrac{1}{a} + 3$ となり，C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，

$ax^2 - x + \dfrac{1}{a} + 3 = 0$ は異なる 2 実数解をもつので，$D = 1 - 4a\left(\dfrac{1}{a} + 3\right) > 0$ から，

$$-3 - 12a > 0,\quad a < -\frac{1}{4}$$

よって，$-4 < \dfrac{1}{a} < 0$ である。

(3) $C : y = a\left(x - \dfrac{1}{2a}\right)^2 + \dfrac{3}{4a} + 3$ より，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2a},\ \dfrac{3}{4a} + 3\right)$



接点 P の x 座標は④の重解より，$x = -\dfrac{b+3}{2a} = -\dfrac{1}{a}$ となり，

②から $y = -3\left(-\dfrac{1}{a}\right) + 3 = \dfrac{3}{a} + 3$ なので，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{a},\ \dfrac{3}{a} + 3\right)$

接点 Q の x 座標は⑥の重解より，$x = -\dfrac{b-1}{2a} = \dfrac{1}{a}$ となり，

③から $y = \dfrac{1}{a} + 3$ なので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{a} + 3\right)$

したがって，△PQR の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ に対して，

$$x=\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}\Big)=\frac{1}{6a},\ \ y=\frac{1}{3}\Big(\frac{3}{a}+3+\frac{1}{a}+3+\frac{3}{4a}+3\Big)=\frac{19}{12a}+3$$

すると，$-4<\dfrac{1}{a}<0$ から $-\dfrac{2}{3}<x<0$ となり，また $y=\dfrac{19}{2}\cdot\dfrac{1}{6a}+3=\dfrac{19}{2}x+3$ なので，G の軌跡は線分 $y=\dfrac{19}{2}x+3\ \Big(-\dfrac{2}{3}<x<0\Big)$ である。

コメント

放物線と直線を題材にした軌跡の基本題です。

問　題

m を実数とする。座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A, B とし，原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　3 点 A, B, O を通る円の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y=x^2$ と(2)の円が A, B, O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ。　[2021]

解答例＋映像解説

(1)　放物線 $y=x^2$ ……①と直線 $y=mx+1$ ……②を連立して，

$$x^2=mx+1,\ \ x^2-mx-1=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③の判別式 $D=m^2+4>0$ から，実数解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha+\beta=m,\ \ \alpha\beta=-1\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると，①②の共有点は $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ となり，④から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=-1+1=0$$

よって，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

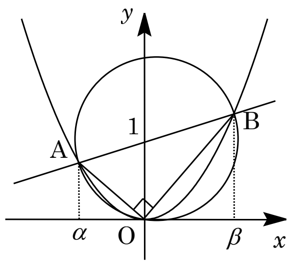
(2)　3 点 A, B, O を通る円の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，線分 AB が直径より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ となるので，

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\alpha^2)(y-\beta^2)=0$$

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2-(\alpha^2+\beta^2)y+\alpha^2\beta^2=0$$

④より，$x^2-mx-1+y^2-(m^2+2)y+1=0$ となり，

$$x^2+y^2-mx-(m^2+2)y=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$



(3)　放物線①と円⑤を連立すると，$x^2+x^4-mx-(m^2+2)x^2=0$ となり，

$$x\{x^3-(m^2+1)x-m\}=0,\ \ x(x+m)(x^2-mx-1)=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑥の解は $x=0,\ -m,\ \alpha,\ \beta$ となり，これが $x=0,\ \alpha,\ \beta$ だけであるのは，

(i)　$-m=0$ のとき　$m=0$ となり，⑥の解は $x=0,\ \pm1$ である。

(ii)　$-m=\alpha$ または $-m=\beta$ のとき　$x=-m$ は $x^2-mx-1=0$ の解となり，

$$m^2+m^2-1=0,\ \ m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(i)(ii)より，求める m の値は，$m=0,\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ である。

コメント

放物線と直線，および円の関係についての問題です。⑥の左辺の因数分解ように，見通しをもった計算が重要です。

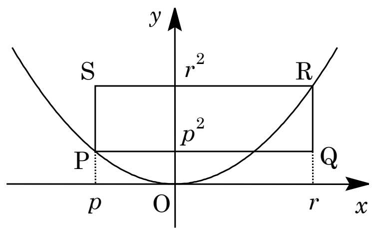
問　題

p, r を $-r<p<r$ を満たす実数とする。4 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(r,\ p^2)$, $\mathrm{R}(r,\ r^2)$, $\mathrm{S}(p,\ r^2)$ に対し，線分 PR の長さは 1 であるとする。このとき，長方形 PQRS の面積の最大値と，そのときの P, R の x 座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

解答例

$-r<p<r$ より，$r^2-p^2=(r+p)(r-p)>0$ となるので，長方形 PQRS の面積 A は，

$$A=(r-p)(r^2-p^2)\cdots\cdots\cdots①$$



ここで，PR = 1 より，

$$(r-p)^2+(r^2-p^2)^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

相加平均と相乗平均の関係を用いると，①②から，

$$A=\sqrt{(r-p)^2(r^2-p^2)^2}\leqq\frac{1}{2}\{(r-p)^2+(r^2-p^2)^2\}=\frac{1}{2}$$

等号成立は，$(r-p)^2=(r^2-p^2)^2=\dfrac{1}{2}$ のときである。すなわち，

$$r-p=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots③,\quad r^2-p^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$(r+p)(r-p)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，③を代入すると，$r+p=1\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，③⑤より，$p=\dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$，$r=\dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$ となり，このとき，A は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

相加平均と相乗平均の関係を利用すると，スッキリと解ける問題です。なお，対角線のなす角に注目する別解も考えられます。

問　題

座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l が線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　[2012]

解答例

(1) l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l : x = k$ とおくと，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1| \geqq |(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より，$l : y = mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

コメント

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　t を正の実数とするとき，$|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2)　a を $a\geqq 0$ を満たす実数とする。x, y が連立不等式

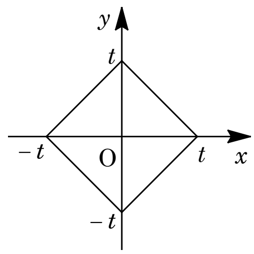
$$ax+(2-a)y\geqq 2,\ \ y\geqq 0$$

を満たすとき，$|x|+|y|$のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ。

(3)　a が $a\geqq 0$ の範囲を動くとき，(2)で求めた m の最大値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$t>0$ のとき，$|x|+|y|=t$ ……①に対して，



(i)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y=t$

(ii)　$x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y=t$

(iii)　$x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$-x-y=t$

(iv)　$x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$x-y=t$

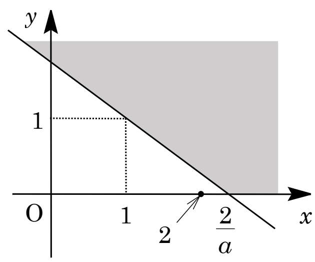
(i)～(iv)より，①で表される図形は右図の正方形である。

(2)　$a\geqq 0$ のとき，連立不等式$ax+(2-a)y\geqq 2$……②，$y\geqq 0$ ……③で表される領域は，まず②の境界線$ax+(2-a)y=2$…… ②′に対して，

$$a(x-y)+2y-2=0$$

すると，0 以上の任意の実数 a に対して，$x=y=1$ で成立することから，直線②′はつねに点$(1,\ 1)$を通る。また，直線②′は，$a=0$ のとき $y=1$ となり x 軸に平行になり，$a>0$ のとき x 軸と交わり，その交点は点$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$である。

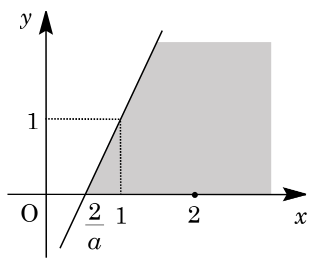
さらに，$x=y=0$ のとき②は成立しないので，不等式②の表す領域は，直線②′を境界線とする原点を含まない側である。



(i)　$a=0$ または$\dfrac{2}{a}\geqq 2$ $(0\leqq a\leqq 1)$のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，y 軸との交点$\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$で，$|x|+|y|$は最小値 $m=\dfrac{2}{2-a}$ をとる。

(ii)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$のとき

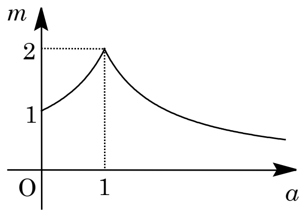


連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，x 軸との交点$\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$で，$|x|+|y|$は最小値$m=\dfrac{2}{a}$ をとる。

(i)(ii)より，$|x|+|y|$ の最小値 m は，

$$m=\frac{2}{2-a}\quad(0\leqq a\leqq 1),\quad m=\frac{2}{a}\quad(a\geqq 1)$$

(3)　(2)より，a と m の関係をグラフに表すと右図のようになり，$a=1$ のとき m は最大値 2 をとる。



コメント

不等式②で表される領域を把握するために，あの手この手を用いています。これは，極力，場合分けを避けるためです。

問　題

xy 平面上に 3 点 $A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3})$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。

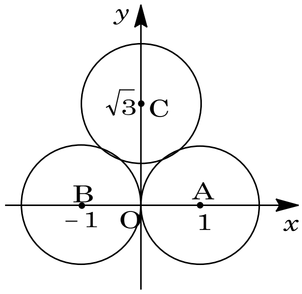
(2) (1)で求めた r の値について，C を中心とする半径 r の円が，A，B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。

(3) A，B，C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。　[2008]

解答例

(1) $A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$ を中心とする半径 r の 2 つの円が接するのは，外接する場合のみなので，

$$2r=2,\ r=1$$

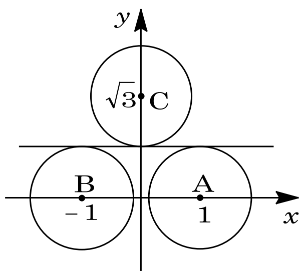


(2) $C(0,\ \sqrt{3})$ に対し，$AC=2$ より，C を中心とする半径 1 の円は，A を中心とする半径 1 の円に接する。

同様に，$BC=2$ より，C を中心とする半径 1 の円は，B を中心とする半径 1 の円に接する。

(3) 3 点 A, B, C を中心とする半径 s の 3 つの円を，それぞれ円 A, B, C とする。

さて，(2)より，$s=1$ のとき，3 円 $A,\ B,\ C$ は互いに外接し，3 円に接する接線は存在しない。また，$s>1$ のときは，3 円 A, B, C は互いに交わり，3 円に接する接線は存在しない。また，これより，3 円に接する直線 l は，$s<1$ のときに存在する。

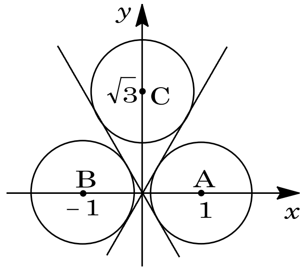


(i) 2 円 A, B の共通外接線に円 C が接するとき

2 円 $A,\ B$ の共通外接線は x 軸に平行になり，$l:y=s$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\sqrt{3}-s=s,\ s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l:y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。



(ii) 2 円 A, B の共通内接線に円 C が接するとき

まず，2 円 A, B の共通内接線は原点を通る。

ここで，x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると，

$$\sin\theta=s,\ \tan\theta=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

直線 l は $y=\pm\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}x$ すなわち $\pm sx-\sqrt{1-s^2}\,y=0$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\frac{\left|-\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{s^2+1-s^2}}=s,\quad 3(1-s^2)=s^2,\quad s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l: y=\pm\sqrt{3}x$ である。

コメント

(3)では，共通接線 l が 3 本存在しますが，対称性を考えると明らかでしょう。