２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

金沢大学

理系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
金 沢 大 学
理系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された金沢大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta)=\frac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\frac{t^3-3t}{2}=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。　[2013]

2　関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a \geqq 0$ とする。　[2007]

3　関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

4　以下の問いに答えよ。

(1)　次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

　(i)　$y=1-|x|$　　　(ii)　$y=\frac{1}{1+|x|}$

(2)　区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において不等式 $(ax+b)(1-x^2) \leqq 1-|x|$ が成り立つとき，定数 a, b の満たす条件を求めよ。

(3)　a, b が (2) で求めた条件を満たすとき，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で $y=1-|x|$ と $y=(ax+b)(1-x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2003]

■ 図形と式

1 座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。 [2017]

2 座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (0<b<1)$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。 [2010]

3 $0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 $\mathrm{O'AB}$，$\mathrm{A'OB}$，$\mathrm{B'OA}$ を考える。ここで，辺 AB, OB, OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 $\mathrm{O'}$ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 $\mathrm{A'}$ は第 2 象限に，点 $\mathrm{B'}$ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$ の座標を，r, t の式で表せ。

(2) 直線 $\mathrm{AA'}$，および直線 $\mathrm{BB'}$ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3) 2 直線 $\mathrm{AA'}$ と $\mathrm{BB'}$ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4) 点 $\mathrm{O'}$ の座標を r, t の式で表し，3 直線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{OO'}$ が 1 点で交わることを示せ。 [2009]

4　xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

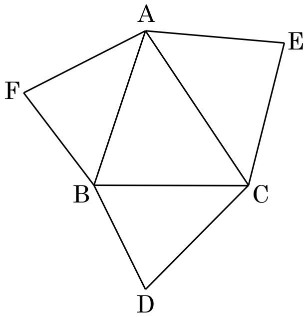
(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle\mathrm{QAR}$ を二等分する直線の方程式を求めよ。　[2008]

■ 図形と計量

1　右の図は，ある四面体 T の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$，および $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ である。このとき，三角形 ABC の面積および四面体 T の体積を求めよ。　[2024]



2　xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q，R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS，QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3)　(2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。　[2006]

■ ベクトル

1 実数$m>1$について，座標平面上に 3 点$A(1,\ 0)$，$B(m,\ 0)$，$C(m^2,\ 0)$をとる。点$P(x,\ y)$は$AP:CP=1:m$を満たしながら動くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点$P(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2) 次の等式を証明せよ。　$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=m(m+1)(m-x)$

(3) $y\neq 0$とする。点$P(x,\ y)$に対して$\angle APB=\angle BPC$が成り立つことを示せ。

[2025]

2 座標空間において，平面$z=2$上の点 P と，平面$z=1$上の円板

$$B:x^2+y^2\leqq 1,\ z=1$$

を考える。点 Q は平面$z=0$ (xy 平面)上にあるとし，与えられた P に対して，線分 PQ と B が共有点をもつような Q 全体からなる図形を D とする。次の問いに答えよ。

(1) P の座標が$(0,\ 0,\ 2)$であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(2) r を正の定数とする。P の座標が$(r,\ 0,\ 2)$であるとき，D を xy 平面上に図示せよ。

(3) $r>2$を満たす定数 r に対して，平面$z=2$上の円$C:x^2+y^2=r^2$，$z=2$を考える。P が C 上を動くとき，D が通過する部分の面積を求めよ。　[2023]

3 座標空間において，原点$(0,\ 0,\ 0)$と点$(1,\ 1,\ -3)$を通る直線を l，2 つの点$(-6,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 2,\ 1)$を通る直線を m とする。直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q を，直線 PQ が直線 $l,\ m$ のいずれにも直交するようにとる。次の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$を求めよ。

(2) A を直線 l 上の点，B を直線 m 上の点とする。ただし，$A\neq P$とする。このとき，$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$であることを示せ。

(3) 直線 l 上の 2 点 A, C をそれらの中点が P となるようにとる。同様に，直線 m 上の 2 点 B, D をそれらの中点が Q となるようにとる。$\left|\overrightarrow{PA}\right|=a$，$\left|\overrightarrow{QB}\right|=b$のとき，三角形 BDP の面積と四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2018]

4 四面体 OABC において，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はどの 2 つも互いに垂直であり，$h>0$ に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=h$ とする。3 点 O, A, B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，α と β を h を用いて表せ。

(2)　直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。

(3)　△PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。　[2015]

5 a を実数とする。このとき，座標空間内の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と直線 $l: (x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　S と l が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2)　a の値が(1)で求めた範囲にあるとき，S と l の 2 つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。

(3)　(2)の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。　[2014]

6 正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$ かつ△ABC の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\angle\mathrm{ACB}$ の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

(2)　a, b, c の値を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。また，原点 O から△ABC に下ろした垂線の長さを求めよ。　[2013]

7 直線 $l: (x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 P_0，直線 $m: (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 Q_0 があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1)　P_0，Q_0 の座標を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3)　直線 l 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16$ であることを示せ。　[2012]

8 座標空間において，中心が $A(0,\ 0,\ a)$ $(a>0)$ で半径が r の球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ は，点 $B(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$ と点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

(1) r と a の値を求めよ。

(2) 点 $P(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ について，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ。

(3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表せ。また，t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，S の最小値と，そのときの t の値を求めよ。 [2010]

9 3 点 $A(6,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また，線分 HO 上の点で，H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H, O は除くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標と，t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2005]

■ 整数と数列

1 次の式によって与えられる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{x_n\}$ がある。

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k\ ,\ \ b_n=\sum_{k=1}^{n}k^2\ ,\ \ x_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{b_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ。

(2) $x_n=\dfrac{1}{2}({a_n}^2+b_n)$ を示せ。

(3) $\dfrac{x_n}{a_n}$ が整数となる n をすべて求めよ。 [2025]

2　複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ と自然数 L をとる。次の問いに答えよ。

(1)　$k,\ m$ が整数ならば，$|k+m\omega|^2$ も整数であることを示せ。

(2)　$|k|\leqq L$ を満たす整数 k に対して，$|k+\omega|$ の最大値を求めよ。

(3)　整数 $k,\ m$ が $|k|\leqq L$，$|m|\leqq L$，$|k-m|\leqq L$ を満たすとき，$|k+m\omega|\leqq L$ を示せ。

(4)　$|k+m\omega|\leqq L$ を満たす整数の組 $(k,\ m)$ の個数を N とする。不等式 $N\geqq 3L^2+3L+1$ を示せ。　[2023]

3　自然数 n の正の約数全体の集合を A_n とし，A_n のすべての要素の逆数の 2 乗の和を s_n とする。例えば，

$$A_3=\{1,\ 3\},\ s_3=1+\frac{1}{3^2},\ A_4=\{1,\ 2,\ 4\},\ s_4=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}$$

である。p と q は異なる素数とし，k と l は自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　s_8，s_{12} の値を求めよ。

(2)　$n=p^k$ について，A_n の要素の個数を求めよ。

(3)　$n=p^kq^l$ について，$s_n<\dfrac{3}{2}$ を示せ。　[2022]

4　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を，初項 $a_1=-1$，$b_1=2$ と漸化式

$$a_{n+1}=a_n-4b_n,\ b_{n+1}=a_n+5b_n$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=a_{n+1}-3a_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ が漸化式 $c_{n+1}=3c_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$d_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，数列 $\{d_n\}$ が満たす漸化式を導き，数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。　[2021]

5　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $25x+9y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2)　方程式 $25x+9y=33$ の整数解をすべて求めよ。さらに，これらの整数解のうち，$|x+y|$ の値が最小となるものを求めよ。

(3)　2 つの方程式 $25x+9y=33$，$xy=-570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ。

[2016]

6 自然数が1つずつ書かれている玉が，

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように1列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1) 数100が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数nに対し，$2n^2$番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1番目から$2n^2$番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から2つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。 [2014]

7 次の問いに答えよ。

(1) 条件$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n+2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定められる数列$\{x_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 条件$y_1=\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{4}{y_n}+\dfrac{3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定められる数列$\{y_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $\{x_n\}$，$\{y_n\}$をそれぞれ(1), (2)の数列とする。2つのベクトル

$$\overrightarrow{a_n}=\left(16-\frac{1}{x_n},\ \frac{16}{x_n}-1\right),\ \overrightarrow{b_n}=\left(\frac{x_n}{4},\ \frac{1}{y_n}\right)$$

が垂直であるときの正の整数nの値を求めよ。 [2006]

8 数列$\{a_n\}$が$a_1=36$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定められているとする。

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$とおくときb_nとb_{n+1}の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $a_n>a_{n+1}$となるようなnの値の範囲およびa_nが最小となるようなnの値を求めよ。

(3) $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$とおくときS_nが最小となるようなnの値をすべて求めよ。

[2003]

9　n を自然数とする。数 w は,

$$w=2^i+2^j+2^k\ \ (i,\ j,\ k\text{ は自然数で }1\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n=7$ とする。w の値が 2^8, 2^6+2^4 となるそれぞれの場合について, $(i,\ j,\ k)$ をすべて求めよ。

(2)　n を一般の自然数とする。2^r+2^s（$r,\ s$ は自然数で $r<s$）の形で表される w の値は全部で何個あるか。

(3)　一般の自然数 n に対し, w の値は全部で何個あるか。　[2001]

■ 確率

1　K を自然数とする。2 つの箱 A と B があり, A に赤玉 1 個, B に白玉 K 個が入っている。A の中の 1 個の玉と B の中の 1 個の玉の交換を繰り返し行う。n 回目の交換が終わったときに A の中の玉が赤玉である確率を求めよ。　[2023]

2　1 個のサイコロを 3 回投げ, 出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。座標平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 1)$, $\mathrm{B}(-b,\ 0)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$ を定め, それらを頂点とする△ABC を考える。ただし, サイコロは 1 から 6 までの目が同じ確率で出るものとする。次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積の値が整数となる確率を求めよ。

(2)　△ABC が直角三角形となる確率を求めよ。

(3)　△ABC が二等辺三角形となる確率を求めよ。　[2020]

3　1 個のサイコロを 4 回続けて投げて出た目の数を順に a, b, c, d とおき, 2 直線 l_1, l_2 を $l_1: y=ax+b$, $l_2: y=cx+d$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　l_1 と l_2 が一致する確率を求めよ。

(2)　l_1 と l_2 が 1 点で交わる確率を求めよ。

(3)　l_1 と l_2 が 1 点で交わり, その交点の x 座標, y 座標がともに整数となる確率を求めよ。　[2018]

4　$n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回，しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求め，$p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。

(3)　$s_n=p_3+p_4+\cdots+p_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることは使ってよい。　[2012]

5　A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A, B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ，1 の目が出たら A だけに 3 点，3 の目が出たら A だけに 2 点を与え，2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら，A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し，先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき，$n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず，n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2)　$q_n=9p_{n+2}-6p_{n+1}+p_n$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}p_n$ を求めよ。

(3)　$\alpha=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k}p_n-\alpha\right|$ を求めよ。ただし，必要ならば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。　[2009]

6　1 つの袋に 5 個の玉が入っており，それぞれに，0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれている。この袋から玉を 1 つ取り出し，もとに戻すという試行をくり返していき，取り出した玉に書かれた数字と直前の試行で取り出した玉の数字との和が 4 となったとき終了する。$n \geqq 2$ とする。n 回以下の試行で終了したときは，最後に取り出した玉に書かれた数字を得点とし，n 回の試行では終了しない場合の得点は 0 とする。このようにして定まる得点の期待値を E_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$2 \leqq k \leqq n$ とする。ちょうど k 回目の試行で終了する確率を P_k とするとき，P_2，P_3，P_4 を求めよ。また，P_k を k を用いて表せ。

(2)　E_2，E_3 を求めよ。また，E_n を n を用いて表せ。

(3)　極限値 $\alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}E_n$ を求め，さらに $E_n \geqq \alpha-\dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。　[2007]

7　座標平面上で動点 P が, x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し, y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し, 停留することを文字 c で表す。a, b, c からなる文字列が与えられたとき, 点 P は原点を出発し, その文字列に従って移動する。たとえば, 長さ 4 の文字列 acab に対しては, 点 P は原点$(0,\ 0)$から出発して, $(1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$と移動し, 点$(2,\ 1)$が到達点となる。長さ n の文字列のなかで, 点 P の到達点が$(p,\ q)$となる文字列の個数を$F_n(p,\ q)$とする。

(1)　$F_n(p,\ q)$を p, q, n を用いて表せ。ただし, n は自然数, p, q は $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q \leqq n$ の範囲の整数とする。

(2)　自然数 n が与えられているとき, $F_n(p-1,\ q) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ $(p \geqq 1,\ q \geqq 0,\ p+q \leqq n)$ の範囲を図示せよ。また, $F_n(p,\ q-1) \leqq F_n(p,\ q)$ を満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ $(p \geqq 0,\ q \geqq 1,\ p+q \leqq n)$の範囲を図示せよ。

(3)　$n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n が与えられているとき, $F_n(p,\ q)$が最大になる自然数 p, q の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。　[2004]

■ 論証

1　p を 2 より大きい素数, n を正の整数とする。$1 \leqq k \leqq p^n$ を満たす整数 k で, p と互いに素であるもの全体の集合を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　$p=3$, $n=2$のとき, 集合 A を求めよ。

(2)　A に属する整数の個数, および A に属するすべての整数の和を求めよ。

(3)　A に属する整数 k に対して, $kl-1$ が p^n の倍数となるような A に属する整数 l が存在し, それはただ 1 つであることを示せ。ただし, 整数 a と b が互いに素であるとき, 1 次不定方程式 $ax+by=1$ は, 整数解をもつことが知られている。必要ならばこの事実を利用してよい。

(4)　A に属するすべての整数 k についての $\dfrac{1}{k}$ の和を既約分数で表したとき, 分子は p^n の倍数となることを示せ。　[2019]

2 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log\frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 [2002]

■ 複素数

1 虚数単位を i とし，複素数 α を，$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ とする。また，実数 u, v に対し，複素数 w, z を，$w = u + vi$，$z = \alpha w$ とする。次の問いに答えよ。

(1) z の実部と虚部，および $|z|$ を，それぞれ u と v を用いて表せ。

(2) $u + \sqrt{3}v - 1 = 0$ のとき，実数 s, t を $s + ti = z^2$ で定める。$t^2 = s + \dfrac{1}{4}$ であることを示せ。

(3) $u + \sqrt{3}v - 1 = 0$ のとき，実数 a, b を $a + bi = w^2$ で定める。xy 平面において，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と直線 $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ の距離は，P と原点の距離に等しいことを示せ。

[2024]

2 方程式 $z^4 + 4 = 0$ について，次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1) 複素数 -4 を極形式で表し，$z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数をすべて求めよ。

(2) $|w|^2 = 3$ を満たす複素数 w と，$z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数 α について，$|\alpha + iw|^2 + |\alpha - iw|^2$ を求めよ。

(3) t を実数とする。複素数平面における円 $|z - t - 5i| = 5$ の内部(ただし，境界線は含まない)に．$z^4 + 4 = 0$ を満たす複素数がちょうど 1 つ含まれるように，t の範囲を定めよ。 [2022]

3　実数 k と複素数 z（ただし，$z \neq -1$）に対して，$w=\dfrac{z+k}{z+1}$ とする。また，i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　$k=0$ とする。$z=0$ に対する w の値を α，$z=1$ に対する w の値を β，$z=\sqrt{3}i$ に対する w の値を γ とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。

(2)　$k=-1$ とする。点 z が複素数平面の原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(3)　$k \neq 1$ とする。複素数平面において，点 z が虚軸上を動くとき，点 w の描く図形を F とする。F が半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周に含まれるときの k の値をすべて求めよ。

[2020]

4　k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2-2kz+1=0$ が虚数解をもつとし，虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

(1)　k の値の範囲を求めよ。また，$|\alpha|$ を求めよ。

(2)　$\cos\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

(3)　複素数平面において，α^3 が第 3 象限にあり，かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ。ただし，座標軸の点は，どの象限にも属さない。

(4)　(3)において求めた範囲に α があるとき，$|1-\alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。　[2019]

5　次の問いに答えよ。

(1)　$z^6+27=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(2)　(1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1，z_2，…とするとき，z_1，z_2 と積 z_1z_2 を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。

[2017]

6 数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は

$$a_1=b_1=2,\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n,\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。a_nを実部としb_nを虚部とする複素数をz_nで表すとき，次の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1}=wz_n$を満たす複素数wと，その絶対値$|w|$を求めよ。

(2) 複素数平面上で，点z_{n+1}は点z_nをどのように移動した点であるか答えよ。

(3) 数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(4) 複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1}を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形をT_nとする。このとき，複素数平面上でT_1，T_2，…，T_n，…によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。 [2016]

7 複素数平面上で中心が 1，半径 1 の円をCとする。以下，iは虚数単位とする。

(1) C上の点$z=1+\cos t+i\sin t\ (-\pi<t<\pi)$について，$z$の絶対値および偏角を$t$を用いて表せ。また$\dfrac{1}{z^2}$を極形式で表せ。

(2) zが円C上の 0 でない点を動くとき，$w=\dfrac{2i}{z^2}$は複素数平面上で放物線を描くことを示し，この放物線を図示せよ。 [2004]

8 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$を$r>1$かつ$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$を満たす複素数とする。複素数平面において，$z$，$\dfrac{1}{z}$，$\overline{z}$，$\dfrac{1}{\overline{z}}$を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし，$\overline{z}$はzと共役な複素数を表す。

(1) 点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。

(2) 直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき，rをθの関数として表し，θの動きうる区間$(\alpha,\ \beta)$を求めよ。

(3) (2)において，原点と点$\cos\beta+i\sin\beta$を通る直線をlとし，点 P とlの距離をdとする。$\theta\to\beta$のとき，dは 0 に収束することを示せ。 [2002]

■ 曲線

1　$a,\ b,\ c$ を正の数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が，4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S，楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき，不等式 $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。 [2018]

2　曲線 $C:x^2+4y^2=4$ 上を動く点 P と，C 上の定点 Q$(2,\ 0)$，R$(0,\ 1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　△PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。 [2016]

3　$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を Q$(-s,\ t)$，R$(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 P$(0,\ 1)$ に対して，△PQR の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle$PRT の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1)で求めた点 R に対して求めよ。 [2007]

■ 極限

1 実数$a>0$に対し，座標平面上の点$\mathrm{P}(a,\ 0)$をとる。曲線$y=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(x\geqq 0)$を C とする。点 Q が曲線 C 上を動くとき，PQ^2の最小値を与える点 Q の x 座標を$F(a)$とし，PQ^2の最小値を$G(a)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $F(a)$を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{F(a)-a}{a^2}$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{G(a)}{a^3}$を求めよ。 [2025]

2 n を自然数とする。3 辺の長さが$\sqrt{a_n}$，$\sqrt{a_{n+1}}$，$\sqrt{a_{n+1}}$である二等辺三角形の面積が$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$となる数列$\{a_n\}$を考える。次の問いに答えよ。

(1) 3 辺の長さが$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{b}$である二等辺三角形の面積を求めよ。

(2) 漸化式$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$を示せ。また，$a_{n+1}\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であることを示せ。

(3) 等式$a_{n+1}-1=\dfrac{a_n-3}{4a_n}(a_n-1)$を示せ。

(4) $|a_1-1|\leqq\dfrac{1}{4}$とする。このとき，すべての n について，$|a_{n+1}-1|\leqq\dfrac{3}{4}|a_n-1|$が成り立つことを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$を求めよ。 [2024]

3 n を 2 以上の自然数とし，点 O を中心とする半径 1 の円周上にすべての頂点をもつ正$2n$角形を考える。そのうちの 1 つの頂点を A とし, A とそれ以外の頂点を結ぶ線分が点 O を中心とする半径$\dfrac{1}{2}$の円と共有点をもつような頂点の個数をa_nとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_2，a_3，a_4を求めよ。

(2) a_{2021}を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$を示せ。 [2021]

4　数列$\{a_n\}$を，$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{7}{a_n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_n>\sqrt{7}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2)　数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定めるとき，$b_{n+1}={b_n}^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$を求めよ。　[2017]

5　関数$y=\log_3 x$とその逆関数$y=3^x$のグラフが，直線$y=-x+s$と交わる点をそれぞれ$\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　線分PQの中点の座標は，$\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$であることを示せ。

(2)　s, t, uは$s=t+u$，$u=\log_3 t$であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to3}\frac{su-k}{t-3}$が有限な値となるように，定数$k$の値を定め，その極限値を求めよ。

[2015]

6　$a>1$とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$$

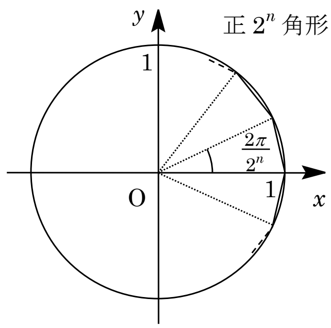
が収束するとき，その和を$S(x)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　この無限等比級数が収束するような実数xの値の範囲を求めよ。また，そのときの$S(x)$を求めよ。

(2)　xが(1)で求めた範囲を動くとき，$S(x)$のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$I(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)dx$とおくとき，極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)$を求めよ。　[2015]

7　半径 1 の円に内接する正2^n角形$(n\geqq2)$の面積をS_n，周の長さをL_nとする。次の問いに答えよ。



(1)　$S_n=2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n=2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$を示せ。

(2)　$\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$を求めよ。　[2012]

8　次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n})=a$ を満たすとする。このとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 $L,\ n$ に対して，$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{L}\dfrac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ。

(3)　b は定数で，$b>1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{ L \,\middle|\, L \text{ は} \sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b \text{を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{L_n}{\sqrt{n}}=b$ が成り立つことを示せ。［2008］

9　1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$M_n=\dfrac{1}{a_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3)　(2)の M_n について，$\lim_{n\to\infty}M_n$ を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つことを用いてもよい。［2005］

10　関数 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$ に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$，$f'(0)$ および $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ。

(2)　O を原点，P を曲線 $y=f(x)$ 上の点，Q を x 軸上の点とする。P，Q の x 座標がともに正で，OP = OQ の関係を保ちながら P，Q が動くとき，直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする。

(i)　P の x 座標を t，R の y 座標を $g(t)$ とおくとき，

$$g(t)=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii)　P が O に限りなく近づくとき，R が近づく点を求めよ。［2003］

■ 微分法

1　関数 $F(x)=\sin x-\log(1+x)$ と $f(x)=F'(x)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$f'(\alpha)=0$ となる α が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(2)　$f(\beta)=0$ となる β が開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ に 1 つだけあることを示せ。

(3)　開区間 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ において，$F(x)>0$ であることを示せ。ただし，自然対数の底 e が $e>2.7$ を満たすことを用いてもよい。

(4)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において，曲線 $y=\sin x$，曲線 $y=\log(1+x)$，および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2023]

2　k を正の実数とし，$x>0$ で定義された関数 $y=k(\log x)^2$ のグラフを C とする。y 軸上に点 $\mathrm{A}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e\right)$ をとる。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $(p,\ k(\log p)^2)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A を通って，C にちょうど 2 本の接線が引けることを示せ。

(3)　点 A を通る C の 2 本の接線が垂直に交わるような k の値を求めよ。さらに，それぞれの接点の x 座標 $p,\ q$ を求めよ。ただし，$p<q$ とする。

(4)　(3)で求めた $k,\ p,\ q$ に対し，定積分 $\displaystyle\int_p^q k(\log x)^2dx$ を求めよ。　[2022]

3　実数 $p,\ q$ を係数とする 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が，実数解 α，β をもち，$\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=3$ を満たすとする。ただし，$\alpha\leqq\beta$ とする。このとき，

$$M=\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+1)(\beta^2+1)}$$

を q の式で表し，M のとりうる最大値および最小値と，そのときの α，β の値を求めよ。　[2022]

4　n を 2 以上の自然数とし，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{\log x}{x^n}$ $(x>1)$ と定める。$y=f_n(x)$ で表される曲線を C とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x>1$ のとき，$\log x<x-1$ を示せ。また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f_n(x)=0$ を示せ。

(2)　関数 $f_n(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(3)　曲線 C の変曲点を求めよ。また，その変曲点における接線と y 軸との交点を $(0,\ y_n)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ。　[2021]

5　平面上に 2 つの定点 O と U があり，$\mathrm{OU}=3$ を満たしている。点 O を中心とする半径 1 の円 C と 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形△STU があり，辺 ST の中点が線分 OU 上にあるものとする。

△STU の内部または周上の点 P から円 C へ異なる 2 本の接線を引き，それらの接点をそれぞれ A, B とする。△OAB を直線 OP のまわりに 1 回転してできる円すいの体積を V とする。点 P が△STU の内部および周上を動くとき，V の最大値と最小値を求めよ。また，V の最大値，最小値をとるような点 P の存在範囲をそれぞれ△STU の内部および周上に図示せよ。　[2020]

6　座標平面に 2 曲線 $C_1: y=\sqrt{x}-4$ $(x>0)$ と $C_2: y=-\sqrt{1-x}$ $(x<1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 は区間 $x>0$ で上に凸であることを示せ。

(2)　点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ に関して，点 P と対称な点を Q とする。点 P が C_1 上を動くとき，点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ。

(3)　C_1 上の点 A における法線 l が点 F を通るとし，l と C_2 の共有点を B とする。このとき，A の座標 $(x_1,\ y_1)$ および B の座標 $(x_2,\ y_2)$ をそれぞれ求めよ。

(4)　C_1 上に点 X_1，C_2 上に点 X_2 をとる。線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値を求めよ。

[2019]

7 $0<a<3$ とし，$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で 2 つの関数 $f(x)=3-a\sin x$，$g(x)=2\cos^2 x$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)\geqq g(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ が，ちょうど 2 つの共有点をもつとき，共有点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ と a の値を求めよ。また，そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。

(3) (2)のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。 [2017]

8 a，b を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし，x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 [2016]

9 座標平面上に点 $\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{B}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ がある。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC と x 軸の交点を P とする。P の座標を θ で表せ。

(2) $\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) 面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。 [2011]

10 a $(a>0)$ を定数とし，$f(x)=2a\log x-(\log x)^2$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフは, x 軸と点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ $(x_1<x_2)$ で交わっている。次の問いに答えよ。

(1) x_1，x_2 の値を求めよ。また，$y=f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2) 点 P_1，P_2 における $y=f(x)$ の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。l_1 と l_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}X(a)$ を求めよ。

(3) $a=1$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2010]

11　座標平面上で，半径 r の 2 つの円 O_1，O_2 の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし，領域 D の面積を S とする。以下，r は $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

(1)　円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。

(2)　円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P，Q で交わるとする。$\theta=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{PO_1Q}$ とおいて，半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。

(3)　面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。　[2004]

■ 積分法

1　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ と $g(x)=e^{-x}\cos x$ の導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ を求めよ。

(2)　整数 k に対し，定積分 $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$ を求めよ。

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|\,dx$ を求めよ。　[2024]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$f(t)$ を $0\leqq t\leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x=t$ とおいて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 f(t)\,dt$ であることを示せ。

(2)　(1)を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$ の値を求めよ。また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx\leqq\frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3)　0 以上の整数 n と $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n}x}{\cos^2 x}=1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x$$

であることを示せ。

(4)　(2)と(3)を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。　[2012]

3　次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $1-\cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2)　$I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。さらに，等式 $I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ。

(3)　I_2，I_3，I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4)　不等式 $\displaystyle\int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq -2e^2+30$ を示せ。　[2011]

4　次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$ を求めよ。また，$\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2)　2 以上の自然数 n に対して，$\log(n+1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\log n$ を示せ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。　[2011]

5　関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt$ を示せ。

(2)　関数 $F(x) = -\displaystyle\int_{-1}^1 |t-x|\,f(t)\,dt$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$ について

$$F'(x) = -\int_{-1}^x f(t)\,dt + \int_x^1 f(t)\,dt,\quad F''(x) = -2f(x)$$

を示せ。

(3)　関数 $f(x)$ は，さらに等式 $f(x) = -\displaystyle\int_{-1}^1 |t-x|\,f(t)\,dt$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$ を満たすとする。このとき，$g(x) = f(x) - f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0) = g'(0) = 0,\quad \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2 + g(x)^2\right)' = 0$$

が成り立つことを示し，$f(x) = f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。　[2009]

6　a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a \geqq 0$ のとき，$S(a)=\int_0^1 |x^3-3ax^2+2a^2x|dx$ を求めよ。

(2)　a が $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。　[2008]

7　関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x)=\sin x$ とおき，$x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx$ と $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$ の値を求めよ。

(2)　定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ の値を求めよ。

(3)　$a>0$ について，$T(a)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{2af(x)+\frac{1}{a}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$ とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。　[2005]

8　以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$g_a(r)=\int_{-1}^{r}\left(\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$ とする。ただし，$a>0$ である。このとき，$\lim\limits_{r\to\infty}g_a(r)$ を求めよ。

(3)　$h(a)=\lim\limits_{r\to\infty}g_a(r)$ とおく。このとき，$\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{h(a)}{a}$ を求めよ。　[2004]

9　整式 $f(x)$ は関係式 $\int_0^x f(x)dx=x^3-3x^2-9x+2\int_x^0 f(x)dx$ を満たしている。また $r \geqq 0$ に対し，$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求め，$y=|f(x)|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(r)$ を求めよ。

(3)　$\int_0^2 F(r)dr$ を求めよ。　[2001]

■ 積分の応用

1　座標平面上の $0 \leqq x \leqq 2\log 2$ の範囲において，曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = 2 - e^{2x}$，直線 $x = 2\log 2$ で囲まれた図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2025]

2　底面の半径が 1 で高さが 1 である直円柱を考える。直円柱の底面の直径を含みこの底面と 30° の傾きをなす平面により，直円柱を 2 つの立体に分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。　[2021]

3　$-2\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき，関数 $f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{3}\right) + \dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{3}$ を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，$\pi^2 < 10$ を用いてよい。

(1)　$f(x)$ は閉区間 $[-2\pi,\ \pi]$ で増加することを示せ。

(2)　開区間 $(-2\pi,\ \pi)$ で，つねに $f(x) > x$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ について，定積分 $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(\pi)} f^{-1}(x)\,dx$ の値を求めよ。

(4)　$f(x)$ とその逆関数 $f^{-1}(x)$ について，2 つの曲線

$$C_1 : y = f(x)\ (0 \leqq x \leqq \pi),\quad C_2 : y = f^{-1}(x)\ \left(f(0) \leqq x \leqq f(\pi)\right)$$

を考える。C_1，C_2 および直線 $x + y = f(0)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2020]

4　座標平面において，

$$x = \sin t,\quad y = \cos t - \sin t\quad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C_1 とし，x 軸に関して C_1 と対称な曲線を C_2 とする。C_1 で囲まれる図形と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S を求めよ。　[2019]

5　$a,\ k$ を定数とし，曲線 $C_1 : y = e^x$ および曲線 $C_2 : y = k\sqrt{x-a}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの曲線 C_1，C_2 が共有点をもつための，a, k が満たすべき条件を求めよ。

以下，2 つの曲線 C_1，C_2 が共有点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ において同一の直線 l に接しているとする。

(2)　a と k を t を用いて表せ。

(3)　直線 l が原点を通るとする。このとき，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2018]

6　関数 $f(x) = xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$，$\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$ をそれぞれ求めよ。

(3)　$0 \leqq t \leqq 1$ に対し，$g(x) = f(x) - f(t)$ とおく。$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(4)　(3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ。ただし，a の値は求める必要はない。　[2015]

7　関数 $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1)　C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta = e^b$ を満たす θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3)　上の b に対する直線 $x = b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2014]

8　$a>0$ とする。$x\geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

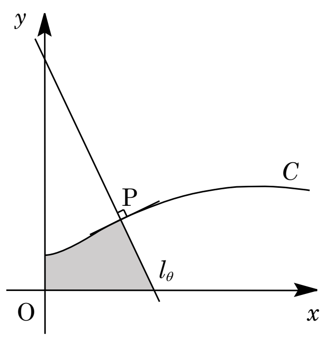
(3)　曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。　[2013]

9　次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の直線 $l: y=mx+\dfrac{1}{3}$ が曲線 $C: y=x^{\frac{2}{3}}$ $(x\geqq 0)$ に接するとき，直線 l の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた m の値に対する直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2007]

10　xy 平面上に媒介変数 t で表された曲線 $C: x=2t-\sin t$，$y=2-\cos t$ がある。$t=\theta$ $(0<\theta<\pi)$ のときの点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における C の法線を l_θ とする。l_θ と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(\theta)$ とし，その三角形と曲線 C の下側にある部分との共通部分（図の網点部）の面積を $T(\theta)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　直線 l_θ を求めよ。

(2)　$S(\theta)$ を求めよ。

(3)　$T(\theta)$ を求めよ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$ を求めよ。　[2006]

$\boxed{11}$　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y=a\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を C とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき，接点を P とする。

(1)　l の方程式および P の座標を求めよ。

(2)　直線 $x=-1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を求めよ。

(3)　直線 l と直線 $x=-1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1=2S_2$ が成り立つことを示せ。　[2002]

$\boxed{12}$　2 次関数 $y=f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り $(p>0)$，曲線 $y=e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1，F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。このとき V_1，V_2 の値を, p を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。　[2001]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta) = \frac{2}{3}\sin 3\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\frac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ となり，$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{6} \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{5}{6}\pi$

よって，$-1 \leqq t \leqq 2$ である。

(2) $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta$

$= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta = 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta$

$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \cdots\cdots\cdots(*)$

また，$(*)$より $t^3 - 3t = 8\sin^3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -2\sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$ となり，

$$\frac{t^3 - 3t}{2} = -\sin 3\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin(3\theta + \pi) = \sin 3\theta$$

(3) (2)より，$f(\theta) = \frac{2}{3}\sin 3\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \frac{2}{3}\cdot\frac{t^3 - 3t}{2} - t = \frac{1}{3}t^3 - 2t$

ここで，$g(t) = f(\theta)$ とおくと，

$g'(t) = t^2 - 2$

すると，$-1 \leqq t \leqq 2$ における $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\frac{5}{3}$	$\searrow$	$-\frac{4}{3}\sqrt{2}$	$\nearrow$	$-\frac{4}{3}$

よって，$f(\theta)$ の最大値は $\frac{5}{3}$ であり，このとき $t = -1$ より，

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$，$\theta = -\frac{\pi}{2}$

また，$f(\theta)$ の最小値は $-\frac{4}{3}\sqrt{2}$ であり，このとき $t = \sqrt{2}$ より，

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\theta = -\frac{\pi}{12}$，$\frac{5}{12}\pi$

コメント

三角関数の計算問題です。なお，(2)は合成した式を利用して証明していますが，もとの式を変形しても構いません。少し計算量が多くなりますが。

問　題

関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a\geqq 0$ とする。 [2007]

解答例

条件より，$f(x)=0$ すなわち $x^3-3ax+2b=0$ の解を $x=\alpha$，α，β とおくと，解と係数の関係より，

$$2\alpha+\beta=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ \alpha^2+2\alpha\beta=-3a\cdots\cdots\cdots②,\ \ \alpha^2\beta=-2b\cdots\cdots\cdots③$$

①より $\beta=-2\alpha$ となり，②③に代入すると，

$$\alpha^2-4\alpha^2=-3a,\ \ -2\alpha^3=-2b$$

すると，$\alpha^2=a$ かつ $\alpha^3=b$ から，$a^3=b^2$ となる。

コメント

高次方程式の解を題材とした基本的な問題です。

問　題

関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3) $f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

解答例

(1) $t=\sin\theta+\cos\theta$ より，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$ なので，

$$f(\theta)=t+\sqrt{2}(t^2-1)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ から $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。

(2) $f(\theta)=0$ から $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$，$(\sqrt{2}t-1)(t+\sqrt{2})=0$ より，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$

(i) $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{6}\pi$，$2\pi+\dfrac{1}{6}\pi$ より，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(ii) $t=-\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

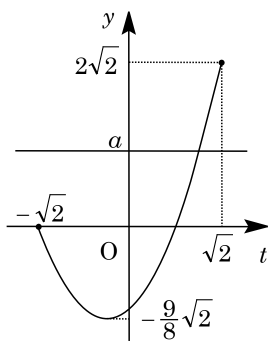
すると，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

(i)(ii)より，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(3) $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)(0\leqq\theta<2\pi)$ より，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき θ は 1 個，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき θ は 2 個存在する。

さて，$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=a$ を満たす t の個数は，放物線 $y=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

この放物線を $y=\sqrt{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$ と変形すると，$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a\leqq2\sqrt{2}$ のとき t は 1 個，$-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}<a\leqq0$ のとき t は 2 個存在する。



よって，$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるのは，$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a<2\sqrt{2}$ のときである。

コメント

三角方程式の解の個数についての頻出問題です。グラフを書いて処理をしています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

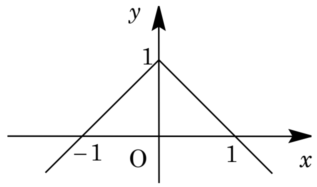
(i)　$y=1-|x|$　　　(ii)　$y=\dfrac{1}{1+|x|}$

(2)　区間 $-1\leqq x\leqq 1$ において不等式 $(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$ が成り立つとき，定数 a, b の満たす条件を求めよ。

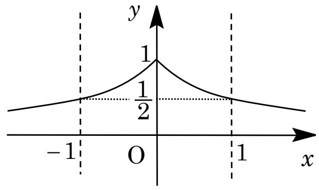
(3)　$a,\ b$ が(2)で求めた条件を満たすとき，区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で $y=1-|x|$ と $y=(ax+b)(1-x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$y=1-|x|$ に対して，$x\geqq 0$ のとき $y=1-x$，$x<0$ のとき $y=1+x$ となるので，グラフは右図のようになる。



また，$y=\dfrac{1}{1+|x|}$ に対して，$x\geqq 0$ のとき $y=\dfrac{1}{1+x}$，$x<0$ のとき $y=\dfrac{1}{1-x}$ となるので，グラフは右下図の実線のようになる。



(2)　$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$ ……①が，$-1\leqq x\leqq 1$ において成立する条件は，

(a)　$x=\pm 1$ のとき

①の両辺とも 0 となり，任意の a, b で成立する。

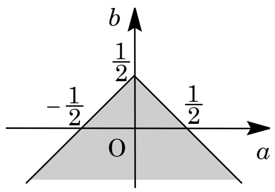
(b)　$-1<x<1$ のとき

$1-x^2>0$ より，不等式①は，$ax+b\leqq\dfrac{1-|x|}{1-x^2}$ ………②

さて，$1-x^2=1-|x|^2=(1-|x|)(1+|x|)$ と変形すると，不等式②は，

$$ax+b\leqq\frac{1}{1+|x|}\ \text{………③}$$

ここで，$f(x)=ax+b$ とおくと，③は $-1<x<1$ において，$y=f(x)$ のグラフが $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ の下方にあることに等しいので，$a>0$ のとき $f(1)=a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a=0$ のとき $b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a<0$ のとき $f(-1)=-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



(a)(b)より，求める条件は，$a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$

(3)　求める図形の面積を S とすると,

$$S=\int_{-1}^{1}\{1-|x|-(ax+b)(1-x^2)\}dx=\int_{-1}^{1}\{1-|x|+ax^3+bx^2-ax-b\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(1-|x|+bx^2-b)dx=2\int_{0}^{1}(bx^2-x+1-b)dx$$

$$=2\left(\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}+1-b\right)=-\frac{4}{3}b+1$$

コメント

$x^2=|x|^2$ に気付くことがポイントです。(1)で $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ のグラフを書かせる設問が, このヒントとなっています。

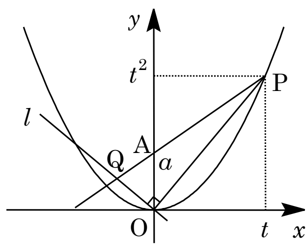
問　題

座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。　[2017]

解答例



(1) $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{A}(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は，

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より，

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\ \ y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $\mathrm{Q}(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2) 点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより，(1)から，

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdots\cdots\cdots ③,\ \ \frac{a}{t^2-a+1}=1\cdots\cdots\cdots ④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から，

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\cdots\cdots ⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\cdots\cdots ⑥$

すると，$v \neq 0$ から $t = -\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から，

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\ \ 3u^2+v^2=2v,\ \ 3u^2+(v-1)^2=1$$

ここで，⑤を $u = -\dfrac{2}{3t+\dfrac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t} \geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq u < 0$ となり，

また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

コメント

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

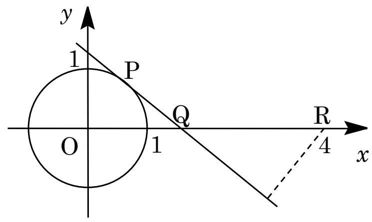
問　題

座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (0<b<1)$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　△PQR の面積を求めよ。　[2010]

解答例



(1)　円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 l は，

$$ax+by=1\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$a^2+b^2=1\cdots\cdots②$である。

さて，$\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 から，①より，

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\,,\ \ |4a-1|=2\sqrt{a^2+b^2}$$

②より，$|4a-1|=2$ となり，$4a-1=\pm2$，$a=\dfrac{3}{4}$，$-\dfrac{1}{4}$

すると，$0<b<1$ から，$a=\dfrac{3}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって，点 P の座標は，$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$または$\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$である。

(2)　$\mathrm{P}(a,\ b)$のとき，①より $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$となり，②から，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+b^2}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$$

(i)　$a=\dfrac{3}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{\dfrac{16}{9}-1}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(ii)　$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

コメント

円と直線に関する基本題です。計算に複雑なところもありません。

問　題

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形O$'$AB，A$'$OB，B$'$OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点O$'$は直線 AB に対して点 O と反対側に，点A$'$は第 2 象限に，点B$'$は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

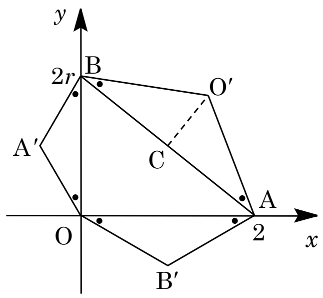
(1)　点A$'$，B$'$の座標を，r，t の式で表せ。

(2)　直線AA$'$，および直線BB$'$の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線AA$'$とBB$'$の交点をM$(x_0,\ y_0)$とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r，t の式で表せ。

(4)　点O$'$の座標を r，t の式で表し，3 直線AA$'$，BB$'$，OO$'$が 1 点で交わることを示せ。　[2009]

解答例



(1)　A$'(x_1,\ y_1)$，B$'(x_2,\ y_2)$，$\angle\mathrm{A'OB}=\theta$ とおくと，

$$x_1=-r\tan\theta=-rt,\quad y_1=r$$

$$x_2=1,\quad y_2=-\tan\theta=-t$$

よって，A$'(-rt,\ r)$，B$'(1,\ -t)$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=(-rt-2,\ r)$ より，直線AA$'$の法線ベクトルの成分を$(r,\ rt+2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=(1,\ -2r-t)$ より，直線BB$'$の法線ベクトルの成分を$(2r+t,\ 1)$とすることができる。これより，直線AA$'$，BB$'$の方程式は，

$$\mathrm{AA'}:r(x-2)+(rt+2)y=0,\quad rx+(rt+2)y=2r\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\mathrm{BB'}:(2r+t)x+(y-2r)=0,\quad (2r+t)x+y=2r\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　2 直線AA$'$とBB$'$の交点がM$(x_0,\ y_0)$より，①②から，

$$rx_0+(rt+2)y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots③,\quad (2r+t)x_0+y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-r-t)x_0+(rt+1)y_0=0$，$(r+t)x_0=(rt+1)y_0$ となり，

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{r+t}{rt+1}$$

(4)　まず，辺 AB の中点を C とするとC$(1,\ r)$となり，$\mathrm{AC}=\sqrt{1+r^2}$ から，

$$\mathrm{CO'}=\mathrm{AC}\tan\theta=t\sqrt{1+r^2}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2(1,\ -r)$ より，直線 AB の法線ベクトルの成分を$(r,\ 1)$とすることができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CO'}}=(1,\ r)+t\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r,\ 1)=(rt+1,\ r+t)$$

これより，$\mathrm{O'}(rt+1,\ r+t)$となり，直線$\mathrm{OO'}$の方程式は$y=\dfrac{r+t}{rt+1}x$である。

よって, (3)から，直線$\mathrm{OO'}$上に2直線$\mathrm{AA'}$と$\mathrm{BB'}$の交点$\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$が存在することになる。すなわち, 3直線$\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{OO'}$は1点で交わる。

コメント

座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって，計算量を減らすことがポイントです。

問　題

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle\mathrm{QAR}$ を二等分する直線の方程式を求めよ。　[2008]

解答例

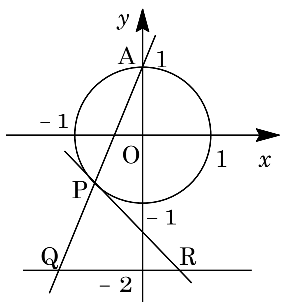
(1)　$C: x^2+y^2=1$ ……①と $l: y=ax+1$ ……②の交点は，

$$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$$

$x\neq 0$ の解は，$x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$

②より，$y=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$となり，点 P における円



①の接線 m の方程式は，

$$-\frac{2a}{a^2+1}x+\frac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1\ \text{………③}$$

(2)　②において，$y=-2$ とすると $x=-\dfrac{3}{a}$ から，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③において，$y=-2$ とすると $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ から，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$\mathrm{QR}=\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geqq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$

ここで，等号が成立するのは，$a=\dfrac{3}{a}\ (a=\sqrt{3})$ のときである。

よって，線分 QR の長さは，$a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき，②より，直線 $\mathrm{AQ}: \sqrt{3}x-y+1=0$

また，$\mathrm{R}(0,\ -2)$ から，直線 $\mathrm{AR}: x=0$

すると，$\angle\mathrm{QAR}$ の二等分線は，2 直線 AQ, AR から等距離にあることより，

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=|x|,\ \sqrt{3}x-y+1=\pm 2x$$

∠QAR の二等分線の傾きは正より，$y=(2+\sqrt{3})x+1$

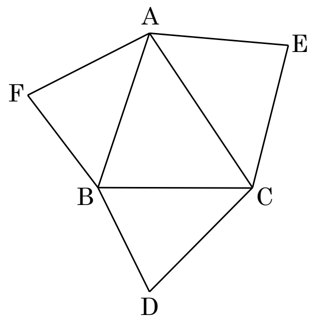
コメント

(3)では，線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め，内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

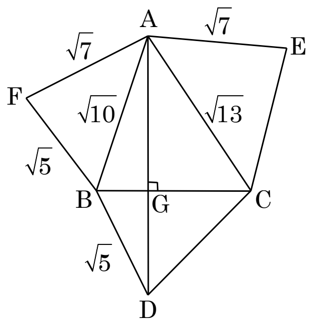
問　題

右の図は，ある四面体 T の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$，および $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ である。このとき，三角形 ABC の面積および四面体 T の体積を求めよ。

[2024]



解答例



右の四面体 T の展開図において，$\mathrm{AB}=\sqrt{10}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{13}$，$\mathrm{BF}=\sqrt{5}$，$\mathrm{AF}=\sqrt{7}$ である。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=7$ より，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{10\cdot 13-7^2}=\frac{9}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，△ABC に余弦定理を適用すると，

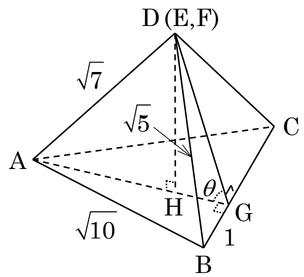
$$\mathrm{BC}^2=10+13-2\cdot 7=9,\ \mathrm{BC}=3$$

そして，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となり，線分 AD と BC の交点を G とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AG}=\frac{3}{2}\mathrm{AG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②から，$\frac{3}{2}\mathrm{AG}=\frac{9}{2}$ となり，$\mathrm{AG}=3$ から，

$$\mathrm{BG}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AG}^2}=\sqrt{10-9}=1,\ \mathrm{DG}=\sqrt{\mathrm{DB}^2-\mathrm{BG}^2}=\sqrt{5-1}=2$$



さて，四面体 T において，点 D から AG に下ろした垂線の足 H に対し $\mathrm{DH}\perp\mathrm{AG}$ ……③である。また，$\mathrm{DG}\perp\mathrm{BC}$ かつ $\mathrm{AG}\perp\mathrm{BC}$ より，平面 DAG は辺 BC と垂直になるので，$\mathrm{DH}\perp\mathrm{BC}$ ……④である。

すると，③④から DH は平面 ABC に垂直である。

そこで，$\angle\mathrm{DGA}=\theta$ とおくと，余弦定理から，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AG}^2+\mathrm{DG}^2-\mathrm{DA}^2}{2\mathrm{AG}\cdot\mathrm{DG}}=\frac{9+4-7}{2\cdot 3\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{DH}=\mathrm{DG}\sin\theta=2\sqrt{1-\cos^2\theta}=2\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$$

したがって，四面体 T の体積 V は，$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DH}=\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

コメント

四面体の展開図を題材にした計量問題で，2009 年に北大で類題出ています。