２０２６ 入試対策

過去問ライブラリー

千葉大学

文系数学 25か年

２００１ － ２０２５

外林 康治　編著

電送数学舎

2026 入試対策
千 葉 大 学
文系数学 25 か年

ま え が き

本書には，2001 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は出題範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の［1］，［2］,…などの問題番号，解答編の［問 題］の文字です。

目　　次

分野別問題一覧 …… 3

分野別問題と解答例 …… 25

関　数 …… 26

微分と積分 …… 36

図形と式 …… 61

図形と計量 …… 71

ベクトル …… 83

整数と数列 …… 94

確　率 …… 112

論　証 …… 142

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　12^{77} の桁数および最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2025]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在するような，a の値の範囲を求めよ。

(2)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である三角形が存在するような，x の値の範囲を求めよ。

(3)　ある二等辺三角形の 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ であるとき，x の値を求めよ。　[2024]

3　a を実数とする。$f(x)=x^2-ax+a^2-2$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつような，a の値の範囲を求めよ。

(2)　k を正の実数とし，$g(x)=kx$ とする。a が(1)の範囲にあるとき，$y=|f(x)|$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ。

[2024]

4　p を実数とする。曲線 $y=|x^2+x-2|$ と直線 $y=x+p$ の共有点の個数を求めよ。

[2023]

5　定数 a は $\frac{1}{6}<a<\frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

・2 点 A, B は放物線 $y=-x^2+2a$ 上にある。

・2 点 C, D は放物線 $y=2x^2-a$ 上にある。

・2 点 A, D の x 座標は等しく，かつ正である。

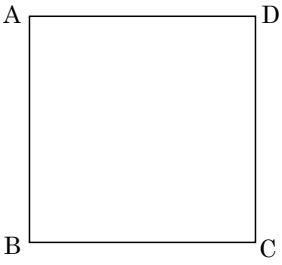
・点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

(1)　S を t の式で表せ。

(2)　S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2021]

6　右図のような 1 辺の長さ10cm の正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm 進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm 進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。　[2014]



7　a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

8　a を実数とする。x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。　[2007]

9　実数 a に対し，2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1\leqq\alpha<\beta\leqq3$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

■ 微分と積分

1　a を実数とする。方程式 $x^3-3ax+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$ が虚数解をもつ a の範囲を求めよ。

[2025]

2　等式 $f(x)=x^2+\displaystyle\int_{-1}^{2}(xf(t)-t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　[2023]

3　次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフの交点の個数が最大となる a の範囲を求めよ。

(2)　$0\leqq a\leqq2$ とする。$S(a)$ を $y=ax$ のグラフと $y=x|x-2|$ のグラフで囲まれる図形の面積とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[2022]

4　k を定数とし，$f(x)=x^3-kx$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に原点と異なる点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ をとる。点 P を通り曲線 C とちょうど 2 点を共有する 2 つの直線のうち，傾きが大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。さらに，C と l_1 の共有点のうち P と異なるものを Q_1，C と l_2 の共有点のうち P と異なるものを Q_2 とする。l_1 および l_2 の方程式と，Q_1 および Q_2 の座標を求めよ。　[2020]

5　a は 0 でない実数とし，$f(x)=ax^3+3ax^2+3x+3$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフ C と導関数 $y=f'(x)$ のグラフ C' が相異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲にあるとき C と C' で囲まれた 2 つの図形の面積の和を求めよ。

[2019]

6　a を正の数とし，t は $0 \leqq t < a$ を満たす数とする。点 $(t,\ (t-a)^2)$ における曲線 $y=(x-a)^2$ の接線と，x 軸および y 軸で囲まれた領域を $D(t)$ とする。

(1)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積を a および t を用いて表せ。

(2)　領域 $D(t)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの t の値を a を用いて表せ。

(3)　s は $0 \leqq s \leqq t$ を満たす数とする。領域 $D(t)$ と領域 $D(s)$ を合わせてできる領域 $D(t) \cup D(s)$ の表す図形の面積の最大値，およびそのときの s と t の値を a を用いて表せ。　[2018]

7　座標平面上の点 $(a,\ b)$ から曲線 $y=x^3-3x$ に引ける接線の本数を n とする。

(1)　$n=3$ を満たすような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

(2)　$-3a<b$ かつ $n \leqq 2$ を満たすように点 $(a,\ b)$ が動くとき，$b-3a$ の最小値を求めよ。　[2017]

8　a は $0<a<2$ を満たす定数とする。$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。　[2016]

9　m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。　[2015]

10　実数 a に対し，関数 $f(x)=\int_x^{x+1}|t+1|dt+a$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2014]

11　a と k を正の実数とする。$y=\frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を a と k を用いて表せ。

(2)　$k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

[2009]

12　2 次関数 $f(x)$ は，$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+(x^2+x)\int_0^1 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $xf(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ。　[2008]

13　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

14　a は実数とする。2 つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。　[2005]

15　3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)-g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。　[2004]

16　実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|\,dx$ と定める。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2002]

17　実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1)　定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)\,dx$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が条件 $f(1) \leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2001]

18　a, b を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。　[2001]

■ 図形と式

1　座標平面上に点 O(0, 0)，A(0, 2)，B($\sqrt{2}$, 1) をとる。線分 OA 上に点 O，点 A と異なる点 P(0, p) をとり，線分 BP 上の点 Q を，△APQ と△OBQ の面積が等しくなるようにとる。

(1)　直線 BP を表す方程式を求めよ。

(2)　△OBQ の面積を p を用いて表せ。

(3)　p が $0<p<2$ の範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2023]

2　座標平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)$ $(0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x=1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1)　直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2)　線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3)　$\mathrm{EP}_1+\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の最大値と最小値を求めよ。　[2016]

3　座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(\text{ただし } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。　[2014]

4　a，b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\frac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \frac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_A と n_A，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_B と n_B とおいたとき，l_A と l_B が直交しているものとする。2 つの接線 l_A，l_B の交点を P とし，2 つの法線 n_A，n_B の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。　[2013]

5　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

6　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l : y = x$ と放物線 $C : y = ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)\left(\text{ただし } 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

[2011]

7　放物線 $C : y = x^2$ 上の 2 点 A, B は，直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき，直線 AB が通りうる点の範囲を求め，図示せよ。　[2003]

8　座標平面上に，中心がそれぞれ点 $(0,\ 1)$，点 $(2,\ 1)$ で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

(1)　2 円 C_1，C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。

(2)　さらに，2 円 C_1，C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。　[2002]

■ 図形と計量

1　座標平面において，原点 O と点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。$0<t<1$ に対し，線分 BO, OA, AB のそれぞれを $t : (1-t)$ に内分する点を P, Q, R とする。

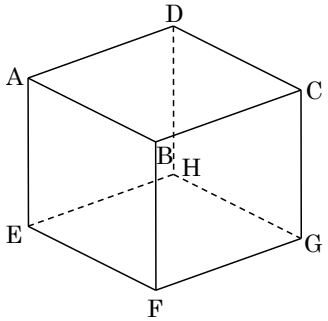
(1)　△PQR の面積を t の式で表せ。

(2)　△PQR が二等辺三角形になるときの t の値をすべて求めよ。

(3)　$\theta = \angle\mathrm{RPQ}$ とする。(2)のそれぞれの場合に $\cos\theta$ を求めよ。　[2022]

2　右図のような 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH に対して，対角線 AG と DF の交点を O とする。線分 AO 上の点 P と線分 DO 上の点 Q が $\mathrm{OQ} = 2\mathrm{AP} - 1$ を満たしながら動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。ただし，点 P, Q は点 O とは一致しないものとする。

[2018]



3　座標平面上に3点O(0, 0)，A(3, $\sqrt{3}$)，B(9, 0)がある。線分OB上に2点P，Qを$\angle PAQ = 90°$となるようにとる。ただし，点Qのx座標は点Pのx座標より大きいものとする。$\angle APQ = \theta$とし，$\triangle APQ$の面積をSとする。

(1)　Sをθを用いて表せ。

(2)　Sの最小値，およびそのときの点Pと点Qのx座標を求めよ。

(3)　Sが$\triangle AOB$の面積の$\dfrac{2}{3}$倍となるとき，点Pと点Qのx座標を求めよ。　[2017]

4　1辺の長さ1の正三角形ABCにおいて，BCを1 : 2に内分する点をD，CAを1 : 2に内分する点をE，ABを1 : 2に内分する点をFとし，さらにBEとCFの交点をP，CFとADの交点をQ，ADとBEの交点をRとする。このとき，$\triangle PQR$の面積を求めよ。　[2015]

5　1辺の長さが3の正四面体OABCにおいて，辺BCを1 : 2に内分する点をDとする。また，辺OC上に点Eをとり，$CE = t$とする。

(1)　ADの長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle DAE$をtを用いて表せ。

(3)　$\triangle ADE$の面積が最小になるときのtの値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

6　三角形ABCの面積は$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は1，$\angle BAC = 60°$，AB＞ACである。このとき，三角形ABCの各辺の長さを求めよ。　[2011]

7　$\triangle ABC$において，頂点Aから直線BCに下ろした垂線の長さは1，頂点Bから直線CAに下ろした垂線の長さは$\sqrt{2}$，頂点Cから直線ABに下ろした垂線の長さは2である。このとき，$\triangle ABC$の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。　[2010]

8　$\triangle ABC$はAB = ACの二等辺三角形とする。$\angle A$，$\angle B$の大きさをそれぞれA，Bとおく。$A = 30°$のとき，次の問いに答えよ。

(1)　頂点Aから対辺BCに下ろした垂線をAHとする。ただし，Hは辺BC上の点である。このとき$\dfrac{AH}{BC}$の値を求めよ。

(2)　$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$の値を求めよ。　[2009]

9　△ABC において，AB = 5，BC = $5\sin A$，CA = 3 であるとする。

(1)　辺 BC の長さを求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径を求めよ。　[2006]

10　1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし，AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1)　AD の長さが $\frac{3}{4}$ であるとき，r の値を求めよ。

(2)　AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3)　∠DME = θ とおくとき，$\cos\theta = \frac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。　[2004]

■ ベクトル

1　座標平面上に 3 点 A(0, 2)，B($-\sqrt{3}$, -1)，C($\sqrt{3}$, -1) があり，三角形 ABC の内接円上に点 P がある。また，2 点 D, E を $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{CE}$ となるようにとる。ここで O は原点(0, 0)である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　内積の値 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PE}$ が点 P の位置によらず一定であることを示し，その値を求めよ。

(2)　線分 DE の中点を M とする。点 P が三角形 ABC の内接円上を 1 周するとき，点 M の軌跡を求めよ。　[2025]

2　三角形 ABC において∠A = 45°，∠B = 60° である。頂点 A から辺 BC に引いた垂線と BC が交わる点を D とし，頂点 C から辺 AB に引いた垂線と AB が交わる点を E とする。また，$\vec{a} = \overrightarrow{CA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{CE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　直線 CE と直線 AD の交点を H とするとき，$\overrightarrow{CH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2019]

3　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1)　$\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

4　座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

5　三角形 ABC の外心を O, 重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

6　平面上の△ABC において，辺 AB を 4 : 3 に内分する点を D，辺 BC を 1 : 2 に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{AB}=\vec{p}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AO}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ。

(2)　点 O が△ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。　[2008]

7　平面上で AB = 3 となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き，2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

8　xyz 空間内に点 A(1, 1, 2) と点 B(−5, 4, 0) がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。　[2004]

9　R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき，R の面積を求めよ。　[2003]

■ 整数と数列

1　平面上に半径がそれぞれ a^2, b^2, c^2 $(0<a<b<c)$ の 3 つの円 A, B, C および直線 l がある。3 つの円はどれも直線 l に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする。

(1)　c を a と b を用いて表せ。

(2)　数列 a, b, c が等比数列となるとき，その公比を求めよ。　[2021]

2　座標平面上に 4 点 $\mathrm{P}_0(2, 0)$, $\mathrm{P}_1(0, 2)$, $\mathrm{Q}_0(0, 0)$, $\mathrm{Q}_1(-1, 1)$ がある。正の整数 n に対し，点 P_n, Q_n まで定まったとき，点 P_{n+1}, Q_{n+1} を以下の条件で定める。

四角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_n$ と四角形 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n-1}$ は相似であり，かつ辺 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ のみを共有する。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　P_2, Q_2 の座標を求めよ。

(2)　P_4, P_8 の座標を求めよ。

(3)　正の整数 m に対して，P_{8m} の座標を m の式で表せ。　[2020]

3　正の約数の個数がちょうど m 個であるような，1900 以上の自然数の中で最小のものを d_m とする。

(1)　d_5 を求めよ。

(2)　d_{15} を求めよ。　[2019]

4　初項が 1 で公差が 6 である等差数列 1, 7, 13, …の第 n 項を a_n とし，また初項が 3 で公差が 4 である等差数列 3, 7, 11, …の第 m 項を b_m とする。2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ に共通に現れる数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{c_k\}$ とし，2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_m\}$ の少なくとも 1 つの項になっている数すべてを小さい順に並べてできる数列を $\{d_l\}$ とする。したがって $c_1=7$ であり，また数列 $\{d_l\}$ のはじめの 5 項は 1, 3, 7, 11, 13 となる。

(1)　数列 $\{c_k\}$ の一般項を求めよ。

(2)　d_{1000} および d_{1001} の値を求めよ。　[2018]

5　k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2)　$4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。　[2015]

6　整数 p, q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_pC_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1)　n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}C_{k+1}\times\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}C_k}-\dfrac{1}{{}_{n+k+1}C_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3C_3}+\dfrac{1}{{}_4C_3}+\dfrac{1}{{}_5C_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_mC_3}$ を求めよ。　[2013]

7　p, q を互いに素な 2 以上の整数，m, n は $m<n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。　[2012]

8　1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2012]

9　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

10　以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2)　a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。　[2008]

11　n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

12　数列$\{a_n\}$において，$a_1=2$，$a_2=4$ である。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，$\{b_n\}$は正の公比をもつ等比数列とする。

(1)　$\dfrac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}$ を，b_n，b_{n+1} を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=-1456$ が成り立つとき

(i)　一般項b_nを求めよ。

(ii)　一般項a_nを求めよ。　[2005]

13　数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$ を求めよ。　[2003]

14　以下の問いに答えよ。

(1)　nを自然数とする。このとき，n^2を4で割った余りは0または1であることを証明せよ。

(2)　3つの自然数a, b, cが，$a^2+b^2=c^2$を満たしている。このとき，a, bの少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。　[2001]

■ 確率

1　以下の問いに答えよ。

(1)　1個のさいころを4回投げるとき，出る目の総和が21以上になる確率を求めよ。

(2)　1個のさいころを5回投げるとき，出る目の総和が10以上になる確率を求めよ。

[2025]

2　白球が 3 個, 黒球が 5 個, 赤球が 2 個入った袋がある。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から球を 1 個取り出す。白球だった場合は 1 点を獲得する。黒球だった場合はさいころを投げて, 出た目が 3 の倍数だった場合には 1 点, そうでない場合には 0 点を獲得する。赤球だった場合はコインを投げて, 表が出た場合は 2 点, 裏が出た場合は 0 点を獲得する。取り出した球は袋に戻さない。

(1)　$n=2$ のとき, 総得点がちょうど 3 点となる確率を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき, 総得点がちょうど 5 点となる確率を求めよ。

(3)　$n=3$ のとき, 総得点が 4 点以上となる確率を求めよ。　[2024]

3　1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える。出た目が 1, 2 であれば得点は 2, 出た目が 3 であれば得点は 1, 出た目が 4, 5, 6 であれば得点は 0 とする。このゲームを k 回繰り返すとき, 得点の合計を S_k とする。

(1)　$S_2=3$ となる確率を求めよ。

(2)　S_3 が奇数となる確率を求めよ。

(3)　$S_4 \geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 n を求めよ。　[2023]

4　円周を 12 等分するように点 A_1, A_2, A_3, …, A_{12} が時計回りに並んでいる。また, 白球 2 個と黒球 4 個が入った袋がある。点 P を, 次の操作によって 12 個の点上を移動させる。

操作：袋から球を 1 つ取り出した後にサイコロを投げる。白球ならば時計回りに, 黒球ならば反時計回りに, サイコロの目の数だけ P を移動させる。取り出した球は袋に戻さないこととする。

P を最初に点 A_1 に置く。操作を 1 回行い, P が A_1 から移動した点を Q とおく。続けて操作を 1 回行い, P が Q から移動した点を R とおく。もう一度操作を行い, P が R から移動した点を S とおく。

(1)　$R=A_1$ となる確率を求めよ。

(2)　3 点 Q, R, S を結んでできる図形が正三角形となる確率を求めよ。　[2022]

5　袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。
袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1)　$n=2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ。

(2)　$n=3$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。　[2021]

6　A さんは 1 が書かれたカードを 1 枚，2 が書かれたカードを 2 枚，4 が書かれたカードを 1 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 X を作る。B さんは 2 が書かれたカードを 2 枚，3 が書かれたカードを 2 枚，計 4 枚を無作為に横一列に並べて 4 桁の数 Y を作る。

(1)　X が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2)　$X<Y$ となる確率を求めよ。　[2020]

7　コインが 5 枚ある。さいころを振って出た目によって，これらのコインを 1 枚ずつ 3 つの箱 A，B，C のいずれかに入れていく。出た目が 1 であればコインを 1 枚，箱 A に入れる。出た目が 2 か 3 であればコインを 1 枚，箱 B に入れる。出た目が 4 か 5 か 6 であればコインを 1 枚，箱 C に入れる。さいころを 5 回振ったとき，次の問いに答えよ。

(1)　箱 A と箱 B にコインがそれぞれちょうど 2 枚ずつ入っている確率を求めよ。

(2)　A，B いずれの箱にもコインが 1 枚以上入っている確率を求めよ。　[2019]

8　箱の中に n 枚のカードが入っている。ただし $n \geqq 3$ とする。そのうち 1 枚は金色，1 枚は銀色，残りの $(n-2)$ 枚は白色である。この箱からカードを 1 枚取り出し，その色が金なら 50 点，銀なら 10 点，白なら 0 点と記録し，カードを箱に戻す。この操作を繰り返し，記録した点の合計が k 回目にはじめてちょうど 100 点となる確率を $P(k)$ とする。

(1)　確率 $P(4)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(6)$ を求めよ。

(3)　確率 $P(11)$ を求めよ。　[2018]

9　1個のさいころを3回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・1回目は，出た目が得点になる。

・2回目は，出た目が1回目と同じならば得点は0，異なれば出た目が得点になる。

・3回目は，出た目が1回目または2回目と同じならば得点は0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。　[2017]

10　1個のさいころを2回投げ，最初に出た目を a，2回目に出た目を b とする。2次方程式 $x^2-ax+b=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2)　実数解の個数が1となる確率を求めよ。

(3)　実数解の個数が2となる確率を求めよ。　[2016]

11　さいころを5回振るとき，初めの4回においては6の目が偶数回出て，しかも最後の2回においては6の目がちょうど1回出る確率を求めよ。ただし，6の目が一度も出ない場合も6の目が出る回数を偶数回とみなす。　[2015]

12　A，Bふたりは，それぞれ1から4までの番号のついた4枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

・初めにA, Bはそれぞれ4枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。

・A，Bはそれぞれ自分の袋から無作為に1枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して1回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。

・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。

・A，Bどちらかが2回勝てば，カードの取り出しはやめて，2回勝った方をゲームの勝者とする。4枚すべてのカードを取り出してもいずれも2回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　Aが0勝0敗4引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(2)　Aが1勝1敗2引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(3)　Aがゲームの勝者になる確率を求めよ。　[2014]

13　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

14　さいころを 7 回投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2 \cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

15　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1，2 回目に出る目を a_2，3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を，$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定める。

(1)　$n=0$ である確率を求めよ。

(2)　$|n|=30$ である確率を求めよ。　[2011]

16　1 辺の長さが 2 の正六角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ を考える。さいころを 3 回投げ，出た目を順に i, j, k とするとき，$\triangle A_iA_jA_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし，i, j, k の中に互いに等しい数があるときは，得点は 0 であるとする。

(1)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 27 となる確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2010]

17　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が 6 の倍数になる確率を求めよ。　[2009]

18　n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ，1 回目に出た目の数を x，2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n| \leqq n$ となる確率を P_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　P_n が最大となる n を求め，そのときの P_n を求めよ。

(3)　$P_n = \dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。　[2008]

19　1 から 7 までの番号が書かれた 7 枚のカードがある。この中から 4 枚のカードを同時に取り出す。取り出されたカードに書かれた 4 個の数の和から，取り出されなかった 3 枚のカードに書かれた 3 個の数の和を引いた値を X とする。

(1)　$X = -8$ となる確率を求めよ。

(2)　X が負となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。　[2007]

20　1 から 10 までの整数が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。この中からカードを 3 枚同時に取り出す。取り出された 3 枚のカードに書かれた 3 つの整数のうち，最大のものを除いた残りの 2 つの整数の和を X とする。

(1)　$X = 3$ である確率を求めよ。

(2)　X の期待値を求めよ。　[2006]

21　1 から 5 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 2 枚ずつ，合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し，その数字を X, Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1)　$X = Y$ となる確率を求めよ。

(2)　$X = 3$ となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。　[2005]

22　24 枚からなるカードの組がある。この組のそれぞれのカードには 1 から 6 までの数がひとつ書かれており，各数についてそれぞれ 4 枚ずつある。この組から 2 枚のカードを同時に引く。

(1)　2 枚のカードの数が同じになる確率を求めよ。

(2)　2 枚のカードの数の差が 3 以上となる確率を求めよ。

(3)　2 枚のカードの数の和の期待値を求めよ。　[2004]

23　n 枚のカードの表に 1, 2, …, n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に 1, 2, …, n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　$n=4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3)　p_5 を求めよ。　[2003]

24　次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。　[2002]

■ 論証

1　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_nC_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_nC_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

12^{77} の桁数および最高位の数字を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ ，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2025]

解答例

$n=12^{77}$ とおき，$\log_{10}2=0.3010$ ，$\log_{10}3=0.4771$ とすると，

$$\log_{10}n=77\log_{10}12=77(2\log_{10}2+\log_{10}3)=77\times(2\times0.3010+0.4771)$$
$$=83.0907$$

すると，$83<\log_{10}n<83+\log_{10}2$ となり，$10^{83}<n<10^{83+\log_{10}2}$ から，

$$1\cdot10^{83}<n<2\cdot10^{83}$$

これより，$n=12^{77}$ は 84 桁で，最高位の数字は 1 である。

コメント

対数計算についての頻出有名問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在するような, a の値の範囲を求めよ。

(2)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である三角形が存在するような, x の値の範囲を求めよ。

(3)　ある二等辺三角形の 3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ であるとき, x の値を求めよ。　[2024]

解答例

(1)　3 辺の長さが 2, 5, a である三角形が存在する条件は，$a>0$ のもとで,

$$5-2<a<5+2,\quad 3<a<7$$

(2)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である三角形が存在する条件は, $\log_{10}(5x)>0$ かつ $\log_{10}(x+10)>0$，すなわち $5x>1$ かつ $x+10>1$ から，$x>\dfrac{1}{5}$ のもとで，$\log_{10}(x+10)>\log_{10}3$ に注意すると,

$$\log_{10}(x+10)-\log_{10}3<\log_{10}(5x)<\log_{10}(x+10)+\log_{10}3$$

これより，$\log_{10}\dfrac{x+10}{3}<\log_{10}(5x)<\log_{10}3(x+10)$ となり,

$$\frac{x+10}{3}<5x<3(x+10)\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$\dfrac{x+10}{3}<5x$ に対して，$x+10<15x$ から $x>\dfrac{5}{7}$，また $5x<3(x+10)$ に対して，$5x<3x+30$ から $x<15$ であるので, 求める$(*)$の解は,

$$\frac{5}{7}<x<15\quad\left(\text{この式は }x>\frac{1}{5}\text{ を満たしている}\right)$$

(3)　3 辺の長さが $\log_{10}(5x)$，$\log_{10}(x+10)$，$\log_{10}3$ である二等辺三角形について, (2) より $\dfrac{25}{7}<5x<75$，$\dfrac{75}{7}<x+10<25$ となり,

$$\log_{10}(5x)>\log_{10}3,\quad \log_{10}(x+10)>\log_{10}3$$

これより，二等辺三角形の等辺の長さは，$\log_{10}(5x)$ と $\log_{10}(x+10)$ になり,

$$\log_{10}(5x)=\log_{10}(x+10),\quad 5x=x+10$$

よって，$x=\dfrac{5}{2}$ であり，この値は $\dfrac{5}{7}<x<15$ を満たしている。

コメント

三角形の形成条件を題材にした対数不等式の問題です。

問　題

a を実数とする。$f(x)=x^2-ax+a^2-2$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつような，a の値の範囲を求めよ。

(2)　k を正の実数とし，$g(x)=kx$ とする。a が(1)の範囲にあるとき，$y=|f(x)|$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるような k を求めよ。

[2024]

解答例

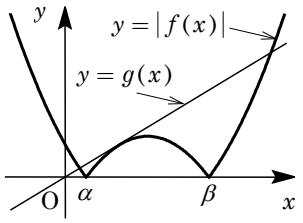
(1)　$f(x)=x^2-ax+a^2-2=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a^2-2$ に対し，$y=f(x)$ のグラフと x 軸が $x>0$ の範囲に共有点を 2 個もつ条件は，$y=f(x)$ の頂点 $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{3}{4}a^2-2\right)$ から，

$$\frac{a}{2}>0\cdots\cdots①,\ \frac{3}{4}a^2-2<0\cdots\cdots②,\ f(0)=a^2-2>0\cdots\cdots③$$

①より $a>0$ なので，②は $a^2-\dfrac{8}{3}<0$ から $0<a<\sqrt{\dfrac{8}{3}}$，③は $a>\sqrt{2}$ となり，まとめると $\sqrt{2}<a<\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ から，$\sqrt{2}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ である。

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (0<\alpha<\beta)$ とする。

さて，$g(x)=kx\ (k>0)$ に対し，$k=k_0$ で $y=|f(x)|$ と $y=g(x)$ のグラフが $\alpha<x<\beta$ において接するとする。このとき，2 つのグラフの共有点の個数は，$0<k<k_0$ で 4 個，$k=k_0$ で 3 個，$k>k_0$ で 2 個となる。



そこで，$\alpha<x<\beta$ において，$y=|f(x)|=-f(x)$ と $y=g(x)$ を連立すると，

$$-(x^2-ax+a^2-2)=kx,\ x^2+(k-a)x+a^2-2=0\cdots\cdots④$$

④が正の重解をもつ条件は，$k=k_0$ として，

$$-\frac{k_0-a}{2}>0\cdots\cdots⑤,\ D=(k_0-a)^2-4(a^2-2)=0\cdots\cdots⑥$$

⑥より $k_0-a=\pm2\sqrt{a^2-2}$ となり，⑤を合わせると $k_0-a=-2\sqrt{a^2-2}$ から，

$$k_0=a-2\sqrt{a^2-2}$$

したがって，$y=|f(x)|$ と $y=g(x)$ のグラフの共有点がちょうど 3 個となるのは，

$$k=a-2\sqrt{a^2-2}$$

コメント

絶対値付きの 2 次関数のグラフに関する基本題です。

問　題

p を実数とする。曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|$ と直線 $y=x+p$ の共有点の個数を求めよ。

[2023]

解答例

曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|$……①と直線 $y=x+p$……②を連立すると，

$$\left|x^2+x-2\right|=x+p,\ \left|x^2+x-2\right|-x=p$$

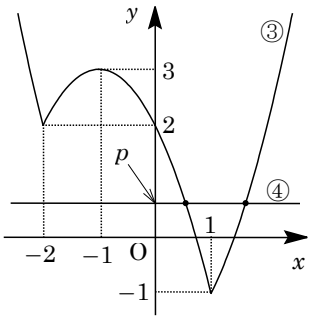
すると，曲線①と直線②の共有点の個数は，曲線 $y=\left|x^2+x-2\right|-x$ ……③と直線 $y=p$ ……④の共有点の個数に一致する。

さて，③は，$y=\left|(x-1)(x+2)\right|-x$ となり，

・$x\leqq -2,\ 1\leqq x$ のとき　$y=(x^2+x-2)-x=x^2-2$

・$-2<x<1$ のとき　$y=-(x^2+x-2)-x=-x^2-2x+2=-(x+1)^2+3$

これより，曲線③と直線④を xy 平面上に描くと，右図のようになる。したがって，③と④の共有点の個数，すなわち①と②の共有点の個数は，



$p>3$ のとき 2 個，$p=3$ のとき 3 個

$2<p<3$ のとき 4 個，$p=2$ のとき 3 個

$-1<p<2$ のとき 2 個，$p=-1$ のとき 1 個

$p<-1$ のとき 0 個

コメント

基本的な絶対値付きの 2 次関数についての問題です。

問　題

定数 a は $\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

・2 点 A, B は放物線 $y=-x^2+2a$ 上にある。

・2 点 C, D は放物線 $y=2x^2-a$ 上にある。

・2 点 A, D の x 座標は等しく，かつ正である。

・点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

(1)　S を t の式で表せ。

(2)　S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2021]

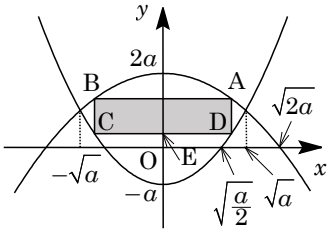
解答例

(1)　$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$ のとき，長方形 ABCD について，点 A, B は放物線 $y=-x^2+2a$ 上，点 C, D は放物線 $y=2x^2-a$ 上にあり，条件から $t>0$ として，$\mathrm{A}(t,\ -t^2+2a)$，$\mathrm{D}(t,\ 2t^2-a)$ とおき，$-t^2+2a>2t^2-a$ より，

$$3t^2-3a<0,\quad 0<t<\sqrt{a}$$

そして，長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

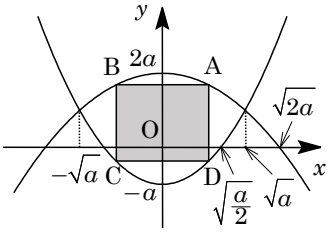
(i)　$\sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqq t<\sqrt{a}$ のとき



辺 CD と y 軸の交点を $\mathrm{E}(0,\ 2t^2-a)$ とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\pi(\mathrm{OA}^2-\mathrm{OE}^2)\\&=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2-(2t^2-a)^2\}\\&=\pi(-3t^4+t^2+3a^2)\end{aligned}$$

(ii)　$0<t<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ のとき



$(-t^2+2a)+(2t^2-a)=t^2+a>0$ から，辺 AD の中点の y 座標は正となり，これより $\mathrm{OA}>\mathrm{OD}$ なので，

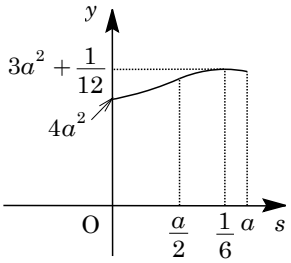
$$\begin{aligned}S&=\pi\mathrm{OA}^2=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2\}\\&=\pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\}\end{aligned}$$

(2)　(1)より，$s=t^2$ $(0<s<a)$ として，$S=\pi f(s)$ とおくと，

(i)　$\dfrac{a}{2}\leqq s<a$ のとき　$f(s)=-3s^2+s+3a^2=-3\left(s-\dfrac{1}{6}\right)^2+3a^2+\dfrac{1}{12}$

(ii)　$0<s<\dfrac{a}{2}$ のとき　$f(s)=s^2-(4a-1)s+4a^2=\left(s-\dfrac{4a-1}{2}\right)^2+\dfrac{8a-1}{4}$

(i)(ii)より，$y=f(s)$ のグラフは右図のようになる。



これより，$s=\dfrac{1}{6}$ のとき $f(s)$ は最大値 $3a^2+\dfrac{1}{12}$ をとる。

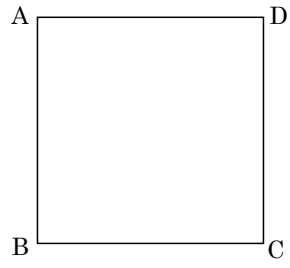
したがって，S の最大値は $\left(3a^2+\dfrac{1}{12}\right)\pi$ であり，このとき $t=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ となる。

コメント

2 次関数を利用した最大・最小の応用問題です。ただ，内容を把握してこの処理をスタートさせるまでに，チェックすることが多く難儀です。

問　題

右図のような1辺の長さ10cmの正方形ABCDがある。点Pおよび点Qは時刻0にAおよびBをそれぞれ出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また，点Rは時刻0にBを出発し，正方形ABCDの周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点RがAに達するまでに△PQRの面積が35cm^2となる時刻をすべて求めよ。　[2014]



解答例

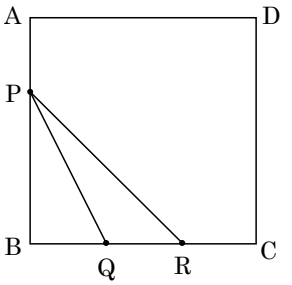
点RがC, D, Aに達するのは，それぞれ5秒後，10秒後，15秒後である。そして，出発してからt秒後の△PQRの面積をSとし，$S=35$となるtを求める。

(i)　$0 \leqq t \leqq 5$のとき

$\text{PB}=10-t$，$\text{QR}=2t-t=t$より，

$$S=\frac{1}{2}t(10-t)=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$$

$S \leqq \dfrac{25}{2}$より，$S=35$となる場合はない。



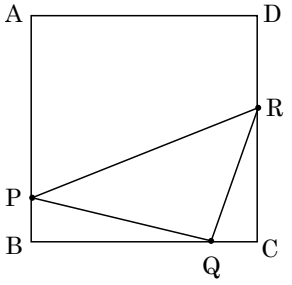
(ii)　$5 \leqq t \leqq 10$のとき

$\text{PB}=\text{QC}=10-t$，$\text{BQ}=t$，$\text{CR}=2t-10$より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-10+10-t)\cdot 10-\frac{1}{2}(10-t)(t+2t-10)$$

$$=\frac{3}{2}t^2-15t+50$$

ここで，$S=35$とすると，$t^2-10t+10=0$となり，$5 \leqq t \leqq 10$から，$t=5+\sqrt{15}$



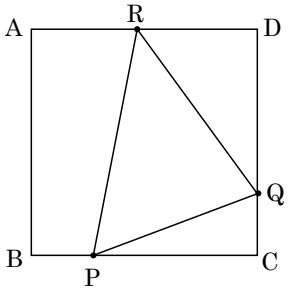
(iii)　$10 \leqq t \leqq 15$のとき

$\text{PC}=\text{QD}=20-t$，$\text{CQ}=t-10$，$\text{DR}=2t-20$より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-20+20-t)\cdot 10$$

$$-\frac{1}{2}(20-t)(t-10+2t-20)$$

$$=\frac{3}{2}t^2-40t+300$$



ここで，$S=35$とすると，$3t^2-80t+530=0$となり，$10 \leqq t \leqq 15$から，$t=\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$

(i)～(iii)より，$t=5+\sqrt{15}$，$\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$である。

コメント

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

問　題

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

解答例

関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ に対して,

$$f(x)=x^2-a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2a \quad (x\geqq 2)$$

$$f(x)=x^2+a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-2a \quad (x\leqq 2)$$

(i)　$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(a\geqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，$2a>-2a$ から，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(ii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ $(a\leqq -4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ となり，$f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(-4\leqq a\leqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，

$$4+\frac{a^2}{4}-(-2a)=\frac{1}{4}(a+4)^2\geqq 0,\quad 4+\frac{a^2}{4}\geqq -2a$$

よって，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(i)～(iii)より，$f(x)$ の最小値は，$a\leqq -4$ のとき $4+\dfrac{a^2}{4}$，$a\geqq -4$ のとき $-2a$ である。

コメント

放物線の軸 $x=\dfrac{a}{2}$ が $x\geqq 2$ の範囲に入っているかどうか，また $x=-\dfrac{a}{2}$ が $x\leqq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお，$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ のときは，a の値が存在しないので，記述を省きました。

問　題

a を実数とする。x についての方程式$|x^2+ax+2a|=a+1$が異なる実数解をちょうど2個もつようなaの値の範囲を求めよ。　[2007]

解答例

$|x^2+ax+2a|=a+1$に対して，$\left|\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+2a\right|=a+1$ ……(＊)

(i)　$-\frac{a^2}{4}+2a \geqq 0$ $(0 \leqq a \leqq 8)$ のとき

(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，$a+1>-\frac{a^2}{4}+2a$

$a^2-4a+4>0$，$(a-2)^2>0$，$a \neq 2$

よって，$0 \leqq a<2$，$2<a \leqq 8$

(ii)　$-\frac{a^2}{4}+2a<0$ $(a<0,\ 8<a)$ のとき

(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，$a+1=0$ または $a+1>-\left(-\frac{a^2}{4}+2a\right)$

(ii-i)　$a+1=0$ のとき　$a=-1$

(ii-ii)　$a+1>-\left(-\frac{a^2}{4}+2a\right)$のとき

$a^2-12a-4<0$，$6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

よって，$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より，(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

コメント

グラフをイメージしながら解いています。x 軸に関して折り返しのない場合が(i)，ある場合が(ii)です。

問　題

実数 a に対し, 2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ を通り, $1\leqq\alpha<\beta\leqq3$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ すなわち $x^2-ax-a^2+5a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は,

$$D=a^2-4(-a^2+5a)>0$$

まとめると, $5a(a-4)>0$ より, $a<0$, $4<a$

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点 $x=\alpha$, β が $1\leqq\alpha<\beta\leqq3$ を満たす条件は, まず (1)から, $a<0$, $4<a$ ……①

また, $y=f(x)$ のグラフの軸が $x=\dfrac{a}{2}$ なので, $1<\dfrac{a}{2}<3$ より,

$$2<a<6\ \cdots\cdots②$$

さらに, $f(1)=1-a-a^2+5a\geqq0$ より, $a^2-4a-1\leqq0$

$$2-\sqrt{5}\leqq a\leqq2+\sqrt{5}\ \cdots\cdots③$$

$f(3)=9-3a-a^2+5a\geqq0$ より, $a^2-2a-9\leqq0$

$$1-\sqrt{10}\leqq a\leqq1+\sqrt{10}\ \cdots\cdots④$$

①～④の共通範囲をとって, $4<a\leqq1+\sqrt{10}$

コメント

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

問　題

a を実数とする。方程式 $x^3-3ax+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$ が虚数解をもつ a の範囲を求めよ。

[2025]

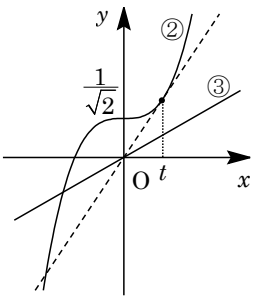
解答例

a が実数で，方程式 $x^3-3ax+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$ ……①が虚数解をもつとき，その虚数解を α とおくと，共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解となる。もう 1 つの解 β は，解と係数の関係より，$\alpha+\overline{\alpha}+\beta=0$ から $\beta=-(\alpha+\overline{\alpha})$ となり，β は実数である。

すると，①が虚数解をもつことは①の実数解が 1 つであることに対応し，逆に①の実数解が 1 つであるとき，①は 3 重解をもたないことより虚数解が存在する。

さて，①を $x^3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3ax$ と変形して，

$$y=x^3+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots②,\quad y=3ax\cdots\cdots③$$



以下，3 次曲線②と原点を通る直線③が，共有点をただ 1 つもつ条件を調べる。

そこで，②と③が接するときの a の値を求めるために，②の接点の x 座標を t とおくと，②から $y'=3x^2$ なので，接線の方程式は $y-\left(t^3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3t^2(x-t)$ となり，$y=3t^2x-2t^3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……④

④が原点を通ることより，$-2t^3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0$ から，$2\sqrt{2}t^3-1=0$ となり，

$$(\sqrt{2}t-1)(2t^2+\sqrt{2}t+1)=0$$

$2t^2+\sqrt{2}t+1=0$ は実数解をもたないので，$\sqrt{2}t-1=0$ から $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

これより，原点を通る接線は，④から $y=3\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2x=\dfrac{3}{2}x$ である。

したがって，曲線②と直線③が共有点をただ 1 つもつ，すなわち方程式①が虚数解をもつ a の範囲は，右上図から $3a<\dfrac{3}{2}$ となり，$a<\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

微分の方程式への応用問題です。場合分けを避けるために与えられた方程式を変形し，図形的に処理しています。