２０２５ 入試対策

過去問ライブラリー

岡山大学

文系数学 25か年

２０００ － ２０２４

外林 康治　編著

電送数学舎

2025 入試対策

岡山大学

文系数学 25 か年

まえがき

本書には，2000 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，新課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2)　x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。　[2024]

2　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通るとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標が $x>0$ の範囲にあるとき，頂点の y 座標の最小値を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が $0\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるとき，この放物線と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。　[2021]

3　a, b, c を整数とし，2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える。ただし $a\neq 0$ である。$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c を $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$ を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ をすべて求めよ。　[2020]

4　角 α は $0\leqq\alpha\leqq\pi$ を満たし，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ とする。角 θ は $\alpha\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くものとする。$f(\theta)=\sin 2\theta-\sin\theta-\cos\theta+2$ とおく。また，$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の値を求めよ。

(2)　t の値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。

(4)　$f(\theta)$ の最小値を求めよ。　[2018]

5　k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

6　a を実数とする。x を 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3)　a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。　[2017]

7　関数 $f(x)$ を，$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。　[2014]

8　a, b を実数とし，$a\neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

を考える。

(1)　$a=b=1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。　[2010]

9　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

(3)　$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq -1$ のとき，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。　[2008]

10　次の問いに答えよ。

(1)　x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2)　$t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3)　座標平面上の円 $C_1:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。　[2006]

11 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が, B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。 [2003]

■ 微分と積分

1 座標平面において，放物線 $y=-x^2+1$ を C, 原点を中心とする半径 r の円を D とする。ただし，$r>0$ とする。放物線 C と円 D は共有点をもたないとする。以下の問いに答えよ。

(1) r の値の範囲を求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ のとき，円 D 上の点$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$における D の接線を l とする。接線 l と放物線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし，S は r と $\sin\theta$ を用いて表すこと。 [2024]

2 放物線$C: y=x^2$ 上を動く 2 点$\mathrm{P}(s,\ s^2)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$を考える。ただし，$s<0<t$ とする。P を通り, P における C の接線と垂直に交わる直線をl_{P}とする。また, Q を通り，Q における C の接線と垂直に交わる直線をl_{Q}とする。さらに，l_{Q}はl_{P}と垂直に交わるとする。以下の問いに答えよ。

(1) l_{P}の方程式を s を用いて表せ。

(2) l_{Q}の方程式を s を用いて表せ。

(3) l_{P}とl_{Q}の交点を$\mathrm{R}(x_0,\ y_0)$とする。x_0，y_0を s を用いて表せ。

(4) (3)の y_0 が最小となる s の値を求めよ。 [2023]

3 a を実数とし，座標平面上の曲線 $C: y = x^3 + (a+2)x^2 + 2ax + 2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) a がどのような値をとっても曲線 C は 2 つの定点を通る。その 2 点の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち，x 座標の小さい方を点 A，もう一方を点 B とし，その 2 点を通る直線を L とする。曲線 C と直線 L が異なる 3 点で交わり，その交点がすべて線分 AB 上にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3) a の値が(2)で求めた範囲にあるとする。このとき，曲線 C と(2)で定めた直線 L で囲まれた部分の面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。 [2022]

4 s を実数とする。等式

$$f(x) = |x^2 - x| - s - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x\{f(t) - |t|\}dt$$

を満たす関数 $f(x)$ が与えられたとする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフと x 軸が異なる 3 点で交わる s の値の範囲を求めよ。

(3) s が(2)で求めた範囲にあるとする。$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積 $A(s)$ を求めよ。

(4) (3)における $A(s)$ の最小値を与える s を求めよ。 [2020]

5 a を実数とする。座標平面上の放物線 $C: y = 2x^2 + 4x + 3$ と直線 $L: y = -2ax - a^2$ について，以下の問いに答えよ。

(1) C と L が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a の値が(1)の範囲にあるとする。C と L で囲まれる図形の面積 S を最大にする a とそのときの S の値を求めよ。 [2019]

6 関数 $f(x) = x^3 - 3x$ を考える。曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(t,\ f(t))$ における接線を L とする。ただし $0 < t < 1$ とする。曲線 C と接線 L の接点 A 以外の共有点を B とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を t を用いて表せ。

(2) 2 点 A, B の y 座標の差の絶対値が最大となる t の値を求めよ。 [2018]

7 a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y = x^3 - ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $a = 5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

8 関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) $a = \cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5} < \cos\dfrac{5\pi}{9} < -\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。 [2016]

9 2 次関数 $y = f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする。ただし，$0 < a < 1$ である。関数 $y = x^2$ のグラフを C, 関数 $y = f(x)$ のグラフを D とし, C と D の共有点のうち, 原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m, D の接線の傾きを n とするとき，$(2a-1)m = 2an$ が成り立つとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を x と a の式で表せ。

(2) $0 \leqq x \leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の $0 < a < 1$ における最大値を求めよ。 [2015]

10 C を xy 平面上の放物線 $y = x^2$ とする。不等式 $y < x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，β $(\alpha < \beta)$ とする。また, 2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2 dx = \frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2) $S = \dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3) 点 P が曲線 $y = x^3 - 1$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

11　$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$f(a)=\int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right|dx$ と定める。$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

12　p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3)　2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4)　2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

13　a を正の実数とする。放物線 $P: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1)　$b+c=2a$ であることを示せ。

(2)　放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

14　次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$$

を解け。 [2009]

15　xy 平面上に，円 $C_1: x^2+y^2=1$，放物線 $C_2: y=x^2+5$ がある。また点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2)　点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの，y_1 の値の範囲を求めよ。

(3)　円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4)　(3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

16 関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。 [2007]

17 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

と定め，$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) $g(1)$ の値を求めよ。

(3) $y=g(x)$ のグラフの概形を描け。 [2006]

18 関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a, b の値を求めよ。 [2005]

19 曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1) l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2) l と m が直交するように点 A，B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2003]

20 座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2,\ 0)$ を P とし，他の 1 つを Q とする。

(1) 点 Q の座標を求めよ。

(2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，劣弧 PQ とは，点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。 [2002]

21　関数$f(x)$を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-7x+4 & (x\leqq 1\text{の場合})\\ x & (x>1\text{の場合})\end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)$のグラフの概形を描け。

(2)　実数 t に対して$F(t)$を，$F(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx$で定義するとき，関数$F(t)$の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$の最小値を求めよ。　[2001]

22　xy 平面上の曲線$C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　直線$l: y=ax+b$が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの a，b の値を求めよ。

(3)　(2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2000]

■ 図形と式

1　a を実数とする。原点を O とする xy 平面において C を $x^2-4x+y^2-4y-1=0$ で表される円とし，l を$3x-4y+a=0$で表される直線とする。点 P を円 C の中心とする。以下の問いに答えよ。

(1)　円 C の半径と中心 P の座標を求めよ。

(2)　円 C と直線 l の共有点の個数を求めよ。

(3)　$a>0$とし，直線 l が円 C と接しているとする。直線 l に関して点 P と対称な点 Q をとる。このとき$\tan\angle\mathrm{POQ}$を求めよ。　[2020]

2　等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$を満たす xy 平面上の点$(x,\ y)$からなる図形を T とする。

(1)　点$(a,\ b)$が T 上にあれば，点$(a,\ -b)$も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。　[2013]

3　a を正の定数とし，x, y に関する次の不等式を考える。

$$3y \geqq 5x \cdots\cdots\cdots ①,\quad 4y \geqq 7a \cdots\cdots\cdots ②,\quad x - y \geqq 3 - a \cdots\cdots\cdots ③$$

(1)　①，②を同時に満たす点 $(x,\ y)$ のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　①，②，③を同時に満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在するような a の範囲を求めよ。

[2012]

4　三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま，座標平面上の曲線 $K : y = \dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　三角形 ABC の垂心は，曲線 K 上にあることを示せ。

(2)　三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ。　[2009]

5　座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-b,\ 0)$ をとる。ただし，$b>0$ とする。点 A を中心とし原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし，三角形 POA において $\angle\mathrm{POA}$ を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2)　$\sin\theta$ を b の式で表せ。

(3)　点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2006]

6　2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $f(x) = |x\vec{a} + \vec{b}|^2$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ。

(2)　θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき，放物線 $y = f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3)　(2)で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。　[2005]

7　放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 4)$ をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる。P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　$\mathrm{QR} : \mathrm{RP} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB}$ であることを示せ。　[2004]

■ 図形と計量

1 三角形 ABC において，各辺の長さを $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とし，$a^2=5-\sqrt{2}-\sqrt{6}$，$b^2=1$，$c^2=4$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ。

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。 [2022]

2 x は $0<x<1$ を満たす実数とする。三辺の長さが 1，1，$2x$ の二等辺三角形の内接円の半径を r，外接円の半径を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) r と R を x を用いて表せ。

(2) $\dfrac{r}{R}$ を最大にする x とそのときの $\dfrac{r}{R}$ の値を求めよ。 [2019]

3 3 辺の長さが $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\mathrm{CA}=7$ の三角形 ABC がある。辺 AB，BC，CA 上の点 P，Q，R を，$\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}=\mathrm{CR}=x$ となるようにとる。ただし，$0<x<3$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{ABC}$ の値を求めよ。

(2) 三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3) 三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。 [2015]

4 1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から，1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし，板の厚さは無視する。

(1) 図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり，これを単位として切り出すとする。ただし，平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき，正四面体の体積が最大となるような x と，そのときの体積を求めよ。

(2) 図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり，切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

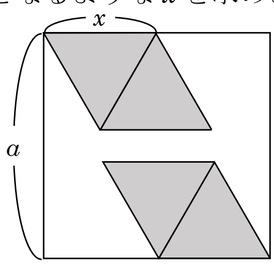


図1

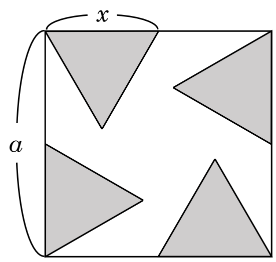


図2

[2001]

■ ベクトル

1 平面上に三角形ABCを考え，その重心をGとする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$が成り立つことを示せ。

(2) 平面上の任意の点Pに対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=3|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2$$

(3) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GC}}|^2=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{3}$$

(4) 三角形ABCの外接円の半径をRとするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$R^2 \geqq \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2}{9}$$

[2024]

2 座標空間において，3点O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ -1,\ 0)$がある。rを正の実数とし，点P$(a,\ b,\ c)$が条件AP＝BP＝rOPを満たしながら動くとする。以下の問いに答えよ。

(1) $r=1$のとき，OPが最小になるような$a,\ b,\ c$を求めよ。

(2) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$のとき，aのとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$のとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$の最大値と最小値を求めよ。 [2023]

3 一辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，辺OAの中点をD，辺OBを$1:3$に内分する点をE，辺OCを$1:3$に内分する点をFとする。△DEFの重心をGとし，直線OGと△ABCの交点をHとする。以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ。

(2) 線分AHの長さを求めよ。 [2019]

4 xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 3,\ -1)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ -3)$ がある。線分 BC 上の点を $\mathrm{P}(0,\ 3,\ s)$ とおく。線分 AP を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ を満たす。点 Q を中心とする半径 3 の球面を K とし，球面 K と xy 平面が交わってできる円の面積を S_1，球面 K と yz 平面が交わってできる円の面積を S_2 とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 球面 K の方程式を求めよ。

(2) S_1 を s と t の式で表せ。

(3) 点 P は線分 BC 上で固定し，点 Q は線分 AP 上を動くものとする。S_1+S_2 が最大値をとる t を s の式で表せ。

(4) (3)において点 Q が線分 AP の中点であるときに S_1+S_2 が最大値をとるとする。このときの s の値を求めよ。 [2018]

5 座標平面の原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ を満たしているとする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を $(3,\ 4)$ とし，点 R は $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$ を満たしているとする。さらに，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$ を満たすすべての点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$ が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。 [2017]

6 座標空間内に，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ -1)$ がある。O と異なる点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ 0)$ に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $\mathrm{R}(u,\ v,\ 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) $s,\ t$ をそれぞれ $u,\ v$ を用いて表せ。

(3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax+by=1\ (a^2+b^2\neq 0)$ 上を動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

7　四面体 OABC において, AB の中点を P, PC の中点を Q, OQ を $m:n$ に内分する点を R とする。ただし, $m>0$, $n>0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, m, n を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}$ を m, n を用いて表せ。　[2014]

8　四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし, 辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1)　線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。

(2)　線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。

[2012]

9　平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が, $2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1)　P の軌跡が円となることを示せ。

(2)　(1)の円の中心を C とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3)　O との距離が最小となる(1)の円周上の点を $\mathrm{P_0}$ とする。A, B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

を満たすとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s, t の値を求めよ。　[2011]

10　三角錐 ABCD において, AB = AC = AD = 3, BC = CD = DB = 2 とする。また, 辺 BC を 1 : 3 に内分する点を E とする。このとき, 三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

(1)　辺 DE, AE の長さを求めよ。

(2)　三角形 ADE の面積を求めよ。　[2000]

■ 整数と数列

1 数列$\{a_n\}$を$a_1=1$，$a_{n+1}=7a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$とする。

(1) a_nが89桁の整数となるとき，nを求めよ。

(2) nを(1)で求めたものとする。a_nの1の位の数字を求めよ。

(3) nを(1)で求めたものとする。a_nの最高位の数字を求めよ。 [2023]

2 数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で，数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$b_1=c_1=1,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=b_n+2c_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数nについて，$a_n=\dfrac{b_n}{c_n}$が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{\alpha b_n-c_n\}$が等比数列となるような実数αをすべて求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。 [2022]

3 xy平面上のx座標とy座標がともに正の整数である点$(x,\ y)$全体の集合をDとする。Dに属する点$(x,\ y)$に対して$x+y$が小さいものから順に，また$x+y$が等しい点の中ではxが小さい順に番号をつけ，n番目$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$の点をP_nとする。例えば，P_1，P_2，P_3の座標は順に$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 座標が$(2,\ 4)$である点は何番目か。また，P_{10}の座標を求めよ。

(2) 座標が$(n,\ n)$である点の番号をa_nとする。数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) (2)で定めた数列$\{a_n\}$に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を求めよ。 [2021]

4 以下の問いに答えよ。

(1) nが整数のとき，nを6で割ったときの余りとn^3を6で割ったときの余りは等しいことを示せ。

(2) 整数$a,\ b,\ c$が条件$(*)$：$a^3+b^3+c^3=(c+1)^3$を満たすとき，$a+b$を6で割った余りは1であることを示せ。

(3) $1\leqq a\leqq b\leqq c\leqq 10$を満たす整数の組$(a,\ b,\ c)$で，(2)の条件$(*)$を満たすものをすべて求めよ。 [2021]

5　a, b を正の数とする。数列$\{x_n\}$を

$$x_1 = a\ ,\ \ x_2 = b\ ,\ \ x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1)　x_6，x_7 を a, b を用いて表せ。

(2)　$a = 2$ とする。x_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。　[2019]

6　自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3}) = R(2^n)$ となることを示せ。

(2)　$R(2^{2017})$ を求めよ。

(3)　自然数 m が $R(2^{2017}m + 2^{29}) = 5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。　[2017]

7　複素数 $\omega = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\omega^2 + \omega^4$，$\omega^5 + \omega^{10}$ の値を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，$\omega^n + \omega^{2n}$ の値を求めよ。

(3)　n を正の整数とするとき，$(\omega + 2)^n + (\omega^2 + 2)^n$ が整数であることを証明せよ。

[2016]

8　数列$\{a_n\}$は，関係式　$a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。$b_n = a_{n+1} - a_n$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　b_{n+1} と b_n の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　[2015]

9　数列$\{a_n\}$が，$a_1 = 1$，$a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1})$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n に関する数学的帰納法で，$a_n > 0$ であることを証明せよ。

(2)　$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3)　a_n を求めよ。　[2014]

10　以下の問いに答えよ。

(1)　整数 x, y が $25x-31y=1$ を満たすとき，$x-5$ は 31 の倍数であることを示せ。

(2)　$1 \leqq y \leqq 100$ とする。このとき，不等式 $0 \leqq 25x-31y \leqq 1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。　[2013]

11　数列 $\{a_n\}$ が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (n\text{が奇数のとき}) \\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{10} を求めよ。

(2)　n が奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4} を a_n で表せ。

(3)　a_n を 3 で割ったときの余りを求めよ。　[2011]

12　自然数 m, n に対して，自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば，$1\diamond 1=4$，$1\diamond 2=6$，$2\diamond 1=9$，$4\diamond 2=33$，$5\diamond 3=56$，$1\diamond 6=14$，$6\diamond 1=49$ である。

(1)　数列 $8\diamond 1$，$8\diamond 2$，$8\diamond 3$，……の初項 $8\diamond 1$ から第 25 項 $8\diamond 25$ までの和を求めよ。

(2)　$m\diamond n=474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。　[2010]

13　p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2008]

14　k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle\mathrm{OA_0A_1}$ を，$\angle\mathrm{O}=\left(\dfrac{360}{k}\right)^\circ$，$\angle\mathrm{A_0}=90^\circ$ で，面積が 1 であるような直角三角形とする。また，$n=2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle\mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle\mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似であるように定める。$r=\cos\angle\mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{OA_0A_1}$，$\triangle\mathrm{OA_1A_2}$，$\cdots$，$\triangle\mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{O}=45^\circ$ のときの S の値と $\angle\mathrm{O}=30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2007]

15　座標平面の原点を O とし，4 点 $(1,\ 3)$，$(-1,\ 3)$，$(-1,\ -3)$，$(1,\ -3)$ を頂点とする長方形の周を R とする。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$(1,\ 0)$ を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置を P_n とし，OP_n と OP_{n+2} のなす角度を θ_n とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta_0$，$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$ を求めよ。

(2)　すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$ が成り立つような自然数 k のうち，もっとも値が小さいものを求めよ。

(3)　θ_n が最小となるときの P_n の座標をすべて求めよ。　[2007]

16　自然数 $n,\ k$ が $n\geqq k$ を満たすとき，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $a>b>c$ と等式 ${}_a\mathrm{C}_3+{}_b\mathrm{C}_2+{}_c\mathrm{C}_1=29$ をともに満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。

(2)　n を自然数とする。次の等式を証明せよ。　${}_{n+3}\mathrm{C}_3={}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+1$

(3)　自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ は $a>b>c>d$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。　${}_a\mathrm{C}_3>{}_b\mathrm{C}_3+{}_c\mathrm{C}_2+{}_d\mathrm{C}_1$　[2006]

17　数列 $\{a_n\}$ を $a_n=n^2+1$ で定め，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=3n^2+3$ で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を $\{c_n\}$ とする。たとえば，初めの 3 項は，$c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=6$ となっている。このうち，$\{a_n\}$ から来る項は $c_1=a_1$，$c_2=a_2$，$\{b_n\}$ から来る項は $c_3=b_1$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　c_4，c_5，c_6 を求めよ。

(2)　$n=3k,\ 3k-1,\ 3k-2$（k は自然数）の場合に分けて考えることにより，a_n は 3 の倍数ではなく，したがって a_n は $\{b_n\}$ のどの項とも一致しないことを示せ。

(3)　$\{c_n\}$ において，$\{b_n\}$ から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ。　[2004]

18 r, s, t は 0 でない定数とする。数列 $\{a_n\}$ は条件 $ra_{n+1}+sa_n+t=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしているとし，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。

(1) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) $a_1=1$，$a_2=4$，$a_2<a_3$，$a_4=13+3\sqrt{3}$ であるとき，一般項 a_n を求めよ。

(3) (2)の条件の下で，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$ を求めよ。 [2003]

19 k を自然数の定数とする。自然数 n に対して，$S_n=|n-1|+|n-2|+\cdots+|n-k|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n を求めよ。

(2) S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ。 [2002]

20 n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

21 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1=6$ で漸化式 $a_{n+1}-a_n=2n+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の第 $n+1$ 項 b_{n+1} から第 $2n$ 項 b_{2n} までの和を求めよ。 [2000]

■ 確率

1 　数直線上を動く点 P がある。点 P は, 原点 O を出発して, 1 枚のコインを 1 回投げるごとに, 表が出たら数直線上を正の向きに 1 だけ進み, 裏が出たら数直線上を負の向きに 1 だけ進むものとする。コインの表が出る確率と裏が出る確率はともに$\frac{1}{2}$であるとし, コインを n 回投げ終えた時点での点 P の座標を x_n とする。コインを 10 回投げるとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_5 \neq 1$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$0 \leqq x_n \leqq 2$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ かつ $x_{10}=0$ となる確率を求めよ。　[2024]

2 　箱の中に, 1 から 3 までの数字を書いた札がそれぞれ 3 枚ずつあり, 全部で 9 枚入っている。A, B の 2 人ががこの箱から札を無作為に取り出す。A が 2 枚, B が 3 枚取り出すとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　A がもつ札の数字が同じである確率を求めよ。

(2)　A がもつ札の数字のいずれかが, B がもつ札の数字のいずれかと同じである確率を求めよ。　[2023]

3 　ハート, スペード, クラブ, ダイヤの各マークのついた「A (エース)」,「2」,「3」のカードがそれぞれ 1 枚ずつ箱に入っている。カードは全部で 12 枚である。この箱から 1 枚ずつ無作為に取り出して, 12 枚のカードを横一列に並べる。以下の問いに答えよ。

(1)　「A (エース)」のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2)　どの 2 枚の「A (エース)」のカードも連続して並ばない確率を求めよ。

(3)　「A (エース)」のカードの連続した並びが生じ, かつ,「A (エース)」のカードが 3 枚以上は連続して並ばない確率を求めよ。　[2022]

4　2 つのチーム S と T が野球の試合を繰り返し行い，先に 4 勝したチームを優勝とする。第 1, 2, 6, 7 戦は S のホームゲームであり，第 3, 4, 5 戦は T のホームゲームである。S のホームゲームで S が勝つ確率は $\dfrac{3}{5}$ であり，T のホームゲームで T が勝つ確率は $\dfrac{5}{6}$ とする。各試合で引き分けはないものとするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　どちらかの優勝が決まるまでに S が 1 勝以上する確率を求めよ。

(2)　T のホームゲームで T が優勝する確率を求めよ。

(3)　第 1, 2 戦とも S が勝ち，かつ S が優勝する確率を求めよ。　[2021]

5　1, 2, 3, 4 から等しい確率で数を選ぶ試行を考える。この試行を繰り返すとき，第 n 回目で選んだ数を r_n とおく。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = r_n a_n \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$a_4 = 24$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_5 = 24$ となる確率を求めよ。

(3)　$n \geqq 6$ とし，$a_n = 24$ となる確率を求めよ。　[2020]

6　1 つのサイコロを 3 回振り，出た目を順に u, v, w とする。そして座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1 = u,\ a_2 = 0,\ b_1 = v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ b_2 = v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点 $(0,\ 0)$ とする。

(1)　$\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形となる確率を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ が大きさ $\dfrac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。　[2016]

7　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4)　引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。　[2015]

8　A と B が続けて試合を行い，先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q，引き分ける確率を $1-p-q$ とする。

(1)　3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(2)　5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(3)　$p=q=\dfrac{1}{3}$ としたとき，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。

(4)　$p=q=\dfrac{1}{2}$ としたとき，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

[2014]

9　1 個のさいころを n 回投げ，出た目の最大値を X_n とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　X_n が k 以下である確率 p_k を求めよ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする。

(2)　X_n が k である確率 q_k を求めよ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ とする。

(3)　X_n の期待値を $n=2$ の場合に求めよ。

(4)　X_n の期待値が 4.5 以上となる n の範囲を求めよ。　[2013]

10　正 n 角形の頂点を A_0，A_1，…，A_{n-1} とする。頂点 A_1，A_2，…，A_{n-1} から 2 点をとり，それらと A_0 を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数を a_n，そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　a_6 および b_6 を求めよ。

(2)　整数 $m\geqq 3$ に対し，$S=\displaystyle\sum_{k=3}^{m}a_k$ を求めよ。

(3)　b_9 を求めよ。　[2012]

11　空間内に点 O$(0,\ 0,\ 0)$ と点 A$(2,\ 2,\ 2)$ がある。点 P は O から出発し，1 回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1)　P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2)　さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3)　(2)と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点 B$(1,\ 1,\ 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。　[2011]

12　男性M_1，…，M_4の 4 人と女性F_1，…，F_4の 4 人が，横一列に並んだ座席S_1，…，S_8に座る場合を考える。

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2)　(1)の座り方の中で，M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3)　(1)の座り方の中で，M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

13　1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角$\dfrac{\pi}{k}$だけ回転する。点 P の最初の位置をP_0として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が$\dfrac{\pi}{2}$となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置をP_nとする。$P_4=P_0$となる目の出方は何通りあるか。

(3)　さいころを 2 回振ったところ, 1 回目は 4 の目, 2 回目は 3 の目が出た。そのとき, 三角形$P_1P_2P_3$の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。　[2009]

14　勝つ確率が $p\,(0\leqq p\leqq 1)$ のゲームに，保有ポイントの一部を賭けて参加する。このゲームには引き分けはなく，勝てば賭けたポイントがもどり，さらに賭けたポイントの 2 倍を得るが，負ければ賭けたポイントを失う。ポイントは正の実数であるとする。たとえば，10 ポイントを保有しているときに 1.5 ポイントを賭けると，勝てば保有ポイントは 13 となり，負ければ 8.5 となる。

このゲームに繰り返し参加するものとし，毎回その時点での保有ポイントの x 倍 $(0<x<1)$ を賭ける。たとえば，最初の保有ポイントが 10 で$x=0.1$とすれば，最初は 1 ポイントを賭ける。勝てば保有ポイントが 12 となり，次回は 1.2 ポイントを賭ける。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　1 回の参加で勝った場合，負けた場合，それぞれの保有ポイントが何倍になるかを x を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた倍率の期待値を, x と p を用いて表せ。

(3)　$p=\dfrac{2}{5}$とする。このゲームに 2 回参加した時点で, 2 勝, 1 勝, 0 勝の中でどの確率が最も高いか。またその場合に保有ポイントが最大になる x の値を求めよ。[2008]

15 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚, 数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び, 左から順に横一列に並べる。このとき, 先頭のカードの数字が 0 でなければ, カードの数字の列は, 選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について, 次の問いに答えよ。

(1) 0, 1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ, 計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。

(2) 用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。

[2007]

16 次の問いに答えよ。

(1) 英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき, 英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が, $\dfrac{7}{40}$ となる。このとき, 日本語の本は何冊あるか答えよ。

(2) 各組が 12 枚ずつからなる赤, 青, 黄色の 3 組のカードがあり, 各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき, 数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。

[2005]

17 定数 a は，$0<a<1$ を満たすものとする。空間に，次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$
$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$
$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は，

(ア)　同一グループ内の 2 点となる場合

(イ)　異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき，次の問いに答えよ。

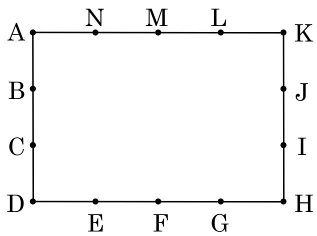
(1)　(ア)，(イ)それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2)　(ア)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(3)　(イ)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(4)　(2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また，そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，位置ベクトルは原点 O を基準とする。　[2004]

18 図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2)　これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。　[2002]

■ 論証

1 実数 x_i，a_i，b_i，c_i ($i=1,\ 2,\ 3$) は，以下の条件(い)〜(に)を満たすものとする。

(い)　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

(ろ)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i \geqq 0$，$b_i \geqq 0$，$c_i \geqq 0$

(は)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i+b_i+c_i=1$

(に)　$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=1$

実数 y_i ($i=1,\ 2,\ 3$) を

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,\quad y_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3,\quad y_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$y_1+y_2+y_3=x_1+x_2+x_3$ を示せ。

(2)　$y_1 \geqq x_1$ を示せ。

(3)　$y_1+y_2 \geqq x_1+x_2$ を示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

m, n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れることを示せ。

(2)　x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ。

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。　[2024]

解答例

(1)　正の整数 m で，$x^{3m}-1=(x^3)^m-1=(x^3-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$

これより，$x^{3m}-1$ は x^3-1 で割り切れる。

(2)　(1)より，$x^{3m}-1=(x-1)(x^2+x+1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$ となり，ここで $q(x)=(x-1)\{(x^3)^{m-1}+(x^3)^{m-2}+\cdots+x^3+1\}$ とおくと，

$$x^{3m}-1=(x^2+x+1)q(x)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，x^n-1 を x^2+x+1 で割った余りについて，n の値で場合分けをすると，

(i)　$n=3m$ のとき　①より，余りは 0 である。

(ii)　$n=3m+1$ のとき　$x^{3m+1}-1=x\cdot x^{3m}-1$ とみて，①を利用すると，

$$x^{3m+1}-1=x\{(x^2+x+1)q(x)+1\}-1=(x^2+x+1)\{xq(x)\}+x-1$$

これより，余りは $x-1$ である。

(iii)　$n=3m+2$ のとき　$x^{3m+2}-1=x^2\cdot x^{3m}-1$ とみて，①を利用すると，

$$\begin{aligned}x^{3m+2}-1&=x^2\{(x^2+x+1)q(x)+1\}-1=(x^2+x+1)\{x^2q(x)\}+x^2-1\\&=(x^2+x+1)\{x^2q(x)\}+(x^2+x+1)\cdot 1-x-2\\&=(x^2+x+1)\{x^2q(x)+1\}-x-2\end{aligned}$$

これより，余りは $-x-2$ である。

なお，$n=1$ のときは，$x-1=(x^2+x+1)\cdot 0+x-1$ より余りは $x-1$，$n=2$ のときは，$x^2-1=(x^2+x+1)\cdot 1-x-2$ より余りは $-x-2$ である。

以上より，$\mathrm{mod}\,3$ で n を記述すると，

$n\equiv 0$ のとき余り 0，$n\equiv 1$ のとき余り $x-1$，$n\equiv 2$ のとき余り $-x-2$

(3)　$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った商を $p(x)$，余りを $ax+b$ とすると，

$$x^{2024}-1=(x^2-x+1)p(x)+(ax+b)$$

ここで，$x=-t$ とおくと，$t^{2024}-1=(t^2+t+1)p(-t)+(-at+b)\cdots\cdots\cdots②$

さて，$2024=3\times 674+2$ から $2024\equiv 2$ となり，(2)の結果を②に適用すると，

$$-at+b=-t-2$$

よって，$a=1$，$b=-2$ から，$x^{2024}-1$ を x^2-x+1 で割った余りは $x-2$ である。

コメント

整式の除法を題材にした問題です。1 の虚立方根 ω を利用する方法も考えられます。

問　題

2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通るとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の x 座標が $x>0$ の範囲にあるとき，頂点の y 座標の最小値を求めよ。

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が $0\leqq y\leqq 2$ の範囲にあるとき，この放物線と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積の最大値と最小値を求めよ。 [2021]

解答例

(1) 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$ を通ることから，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ となり，

$$a+b+c=1\cdots\cdots\cdots①,\quad a-b+c=-1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=1$，$a+c=0$ となり，$f(x)=ax^2+x-a=a\left(x+\dfrac{1}{2a}\right)^2-a-\dfrac{1}{4a}$

これより，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を $(p,\ q)$ とおくと，

$$(p,\ q)=\left(-\frac{1}{2a},\ -a-\frac{1}{4a}\right)$$

すると，$p=-\dfrac{1}{2a}>0$ から $a<0$ となり，相加平均と相乗平均の関係より，

$$q=-a-\frac{1}{4a}=(-a)+\left(-\frac{1}{4a}\right)\geqq 2\sqrt{(-a)\cdot\left(-\frac{1}{4a}\right)}=2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

等号は $-a=-\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a^2=\dfrac{1}{4}$ から $a=-\dfrac{1}{2}$ のときに成り立つ。

よって，頂点の y 座標の最小値は 1 である。

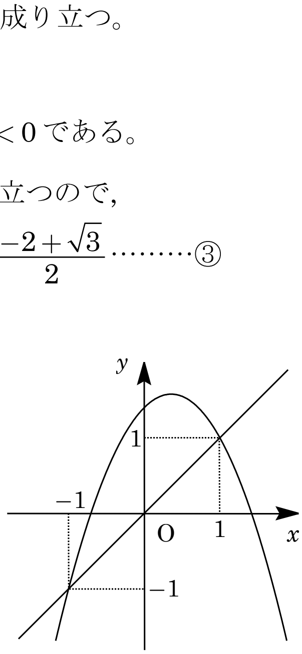
(2) 条件から $0\leqq q\leqq 2$ なので，$0\leqq -a-\dfrac{1}{4a}\leqq 2$ となり，$a<0$ である。

すると，$0\geqq -4a^2-1\geqq 8a$ となり，$0\geqq -4a^2-1$ は成り立つので，

$$-4a^2-1\geqq 8a,\quad 4a^2+8a+1\leqq 0,\quad \frac{-2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq \frac{-2+\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

なお，③は $a<0$ を満たしている。

さて，放物線 $y=f(x)$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S とすると，



$$S=\int_{-1}^{1}(ax^2+x-a-x)\,dx=\int_{-1}^{1}a(x^2-1)\,dx$$

$$=a\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=-\frac{a}{6}\{1-(-1)\}^3$$

$$=-\frac{4}{3}a$$

③より$-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{-2-\sqrt{3}}{2} \geqq -\dfrac{4}{3}a \geqq -\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{-2+\sqrt{3}}{2}$となり，$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3} \leqq S \leqq \dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$

よって，Sの最大値は$\dfrac{4+2\sqrt{3}}{3}$，最小値は$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{3}$である。

コメント

2 次関数のグラフを題材とした基本題です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を整数とし，2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ を考える。ただし $a\neq 0$ である。$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c を $f(1)$，$f(-1)$，$f(0)$ を用いて表せ。

(2) $f(x)$ をすべて求めよ。 [2020]

解答例

(1) a, b, c を整数とする 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ に対して，

$$f(1)=a+b+c\cdots\cdots①,\ \ f(-1)=a-b+c\cdots\cdots②,\ \ f(0)=c\cdots\cdots③$$

③より $c=f(0)$ となり，①②に代入すると，

$$a+b=f(1)-f(0),\ \ a-b=f(-1)-f(0)$$

よって，$a=\dfrac{1}{2}\{f(1)+f(-1)-2f(0)\}$，$b=\dfrac{1}{2}\{f(1)-f(-1)\}$ となる。

(2) 条件より，$|x|\leqq 1$ を満たすすべての実数 x に対して $|f(x)|\leqq 1$ なので，③から，

$$|c|=|f(0)|\leqq 1,\ \ c=0,\ \pm 1$$

さらに，$|f(1)|\leqq 1$，$|f(-1)|\leqq 1$ から，(1)の結果を利用して，

$$|a|=\frac{1}{2}|f(1)+f(-1)-2f(0)|\leqq\frac{1}{2}(|f(1)|+|f(-1)|+2|-f(0)|)=2$$

$$|b|=\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|\leqq\frac{1}{2}(|f(1)|+|-f(-1)|)=1$$

すると，$a\neq 0$ から $a=\pm 1,\ \pm 2$ となり，また $b=0,\ \pm 1$ である。

さて，$|x|\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i) $a=1$ のとき　$f(x)=x^2+bx+c$ に対して，

(i-i) $b=0$ のとき　$f(x)=x^2+c$

$$M=f(\pm 1)=1+c\leqq 1,\ \ m=f(0)=c\geqq -1 \text{ から，} c=0,\ -1 \text{ である。}$$

(i-ii) $b=1$ のとき　$f(x)=x^2+x+c=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$

$$M=f(1)=2+c\leqq 1,\ \ m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}\geqq -1 \text{ から，} c \text{ は存在しない。}$$

(i-iii) $b=-1$ のとき　$f(x)=x^2-x+c=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+c-\dfrac{1}{4}$

$$M=f(-1)=2+c\leqq 1,\ \ m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}\geqq -1 \text{ から，} c \text{ は存在しない。}$$

(ii) $a=-1$ のとき　$f(x)=-x^2+bx+c$ に対して，

(i)と同様にすると，条件に適するのは，$(b,\ c)=(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$ のときである。

(iii)　$a=2$ のとき　$f(x)=2x^2+bx+c$ に対して，

(iii-i)　$b=0$ のとき　$f(x)=2x^2+c$

$M=f(\pm1)=2+c\leqq 1$，$m=f(0)=c\geqq -1$ から，$c=-1$ である。

(iii-ii)　$b=1$ のとき　$f(x)=2x^2+x+c=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+c-\frac{1}{8}$

$M=f(1)=3+c\leqq 1$，$m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{8}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(iii-iii) $b=-1$ のとき　$f(x)=2x^2-x+c=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+c-\frac{1}{8}$

$M=f(-1)=3+c\leqq 1$，$m=f\left(-\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{8}\geqq -1$ から，c は存在しない。

(iv)　$a=-2$ のとき　$f(x)=-2x^2+bx+c$ に対して，

(iii)と同様にすると，条件に適するのは，$(b,\ c)=(0,\ 1)$ のときである。

(i)～(iv)より，条件に適する $f(x)$ は，

$$f(x)=\pm x^2,\ \pm(x^2-1),\ \pm(2x^2-1)$$

コメント

2 次関数の決定問題です。(1)を誘導として利用するわけですが，ポイントは三角不等式を用いた絶対値の処理です。

問　題

角αは$0 \leqq \alpha \leqq \pi$を満たし，$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$とする。角$\theta$は$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$の範囲を動くものとする。$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2$とおく。また，$t = \sin\theta + \cos\theta$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$の値を求めよ。

(2)　tの値の範囲を求めよ。

(3)　$f(\theta)$をtの式で表せ。

(4)　$f(\theta)$の最小値を求めよ。　[2018]

解答例

(1)　$0 \leqq \alpha \leqq \pi$のとき，$\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$から$\sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$となるので，

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6}$$

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$に対して，$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$より，

$$\alpha + \frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$0 < \dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$より$\cos\dfrac{\pi}{2} < \cos\alpha < \cos\dfrac{\pi}{4}$となり，$\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$から，

$$\frac{\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\sin\dfrac{5}{4}\pi \leqq \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqq \sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$となり，(1)から，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6},\ -1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}$$

よって，$-1 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\sqrt{2} + \dfrac{1}{3} \cdots\cdots ③$である。

(3)　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1 = t^2 - 1$より，

$$f(\theta) = \sin 2\theta - \sin\theta - \cos\theta + 2 = (t^2 - 1) - t + 2 = t^2 - t + 1$$

(4)　(3)より，$f(\theta)$を，$t^2 - t + 1 = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$と変形すると，$t = \dfrac{1}{2}$は③を満たす。

よって，$f(\theta)$は，$t = \sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$のとき最小値$\dfrac{3}{4}$をとる。

コメント

基本的な三角関数の計算問題です。

問　題

k を実数とし，x についての 2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2)　$x^2-kx+3k-4=0$ が虚数解 α をもち，α^4 が実数になるような k の値をすべて求めよ。　[2018]

解答例

(1)　実数 k に対し，2 次方程式 $x^2-kx+3k-4=0$ ……①が虚数解をもつ条件は，

$$D=k^2-4(3k-4)<0,\ \ k^2-12k+16<0$$

よって，$6-2\sqrt{5}<k<6+2\sqrt{5}$ ………②

(2)　まず，x^4 を $x^2-kx+3k-4$ で割り，余りを $r(x)$ とおくと，

$$x^4=(x^2-kx+3k-4)(x^2+kx+k^2-3k+4)+r(x)$$

ただし，$r(x)=(k^3-6k^2+8k)x-(3k-4)(k^2-3k+4)$

さて，①の虚数解 α に対し，$\alpha^2-k\alpha+3k-4=0$ であることに注意すると，

$$\alpha^4=r(\alpha)=(k^3-6k^2+8k)\alpha-(3k-4)(k^2-3k+4)$$

すると，α^4 が実数となる条件は，k が実数であることより，

$$k^3-6k^2+8k=0,\ \ k(k-2)(k-4)=0$$

よって，求める k の値は，②より，$k=2,\ 4$ である。

コメント

複素数と方程式に関する問題です。面倒なのは，整式の除法の計算だけです。

問　題

a を実数とする。x を 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3)　a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$f(x)=x^2+ax+1=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$ の区間 $a-1 \leqq x \leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とすると，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\quad\left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

よって，$m\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{15}{16}$ である。

(2)　(i)　$-\dfrac{a}{2}<a-1\left(a>\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f(a-1)=(a-1)^2+a(a-1)+1=2a^2-3a+2$$

(ii)　$a-1 \leqq -\dfrac{a}{2} \leqq a+1\left(-\dfrac{2}{3} \leqq a \leqq \dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$

(iii)　$-\dfrac{a}{2}>a+1\left(a<-\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

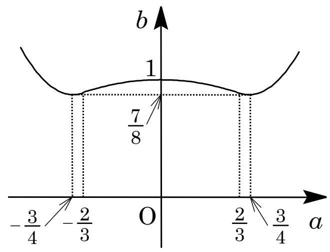
$$m(a)=f(a+1)=(a+1)^2+a(a+1)+1=2a^2+3a+2$$

(3)　(2)より，$m(a)$ は，$m(a)=2\left(a-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}\quad\left(a>\dfrac{2}{3}\right)$

$$m(a)=-\frac{a^2}{4}+1\quad\left(-\frac{2}{3} \leqq a \leqq \frac{2}{3}\right)$$

$$m(a)=2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\quad\left(a<-\frac{2}{3}\right)$$

これより，$b=m(a)$ のグラフをかくと右図のようになり，$m(a)$ の最小値は $m\left(\pm\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{8}$ である。



コメント

2 次関数の最大・最小に関する基本的な問題です。(2)では図を省きましたが，グラフの軸と区間との位置関係で場合分けをしています。