現行課程 入試対策

過去問ライブラリー

共通プレテスト

数学IA・数学IIBC

2017・2018・2022

外林 康治　編著

電送数学舎

現行課程 入試対策
共通プレテスト
数学ⅠA・数学ⅡBC

まえがき

本書には，2022 年に公表された共通テスト(試作問題)，2017 年と 2018 年に実施された共通テスト(試行調査)とモデル問題例の数学問題，およびそれらの解答例を掲載しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程に対応した内容分類を行いました。また，記述式の廃止など出題形式に変化のあった一部の設問については，題意に沿った改変を施しています。

なお，解答用紙マーク欄は，2025 年度より，数学①では ±，数学②では ⓐⓑⓒⓓ が廃止され，ともに －と ⓪～⑨に変更されましたが，この点には対応していません。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。

2　閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要です。

目　　次

数学ＩＡ 分野別問題と解答例

集合と命題／図形と計量／２次関数／データの分析

図形の性質／確　率

問　題

有理数全体の集合を A, 無理数全体の集合を B とし, 空集合を $\varnothing$ と表す。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 「集合 A と集合 B の共通部分は空集合である」という命題を, 記号を用いて表すと, $A\cap B=\varnothing$ となる。

また,「1 のみを要素にもつ集合 C は集合 A の部分集合である」という命題は, 記号を用いて $C\subset A$ と表せる。このとき成立する関係を次の ⓪〜⑤のうちから 2 つ選べ。ただし, 解答の順序は問わない。$\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$

⓪ $A\cap C=\varnothing$　① $A\cap C=A$　② $A\cap C=C$
③ $A\cup C=\varnothing$　④ $A\cup C=A$　⑤ $A\cup C=C$

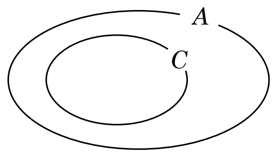
(2) 命題「$x\in B$, $y\in B$ ならば, $x+y\in B$ である」が偽であることを示すための反例となる x, y の組を, 次の ⓪〜⑤のうちから 2 つ選べ。必要ならば, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい。ただし, 解答の順序は問わない。

$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$

⓪ $x=2$, $y=0$　① $x=3-\sqrt{3}$, $y=\sqrt{3}-1$
② $x=\sqrt{3}+1$, $y=\sqrt{2}-1$　③ $x=\sqrt{4}$, $y=-\sqrt{4}$
④ $x=\sqrt{8}$, $y=1-2\sqrt{2}$　⑤ $x=\sqrt{2}-2$, $y=\sqrt{2}+2$

[pre2018 改]

解答例



(1) 「1 のみを要素としてもつ集合が集合 A の部分集合」であることは, $C=\{1\}$ とおくと, $C\subset A$ と表される。

このとき, $A\cup C=A$, $A\cap C=C$ が成り立つ。

(2) 命題「$x\in B$, $y\in B$ ならば, $x+y\in B$ である」が偽であることを示すための反例は,「 $x\in B$ かつ $y\in B$ かつ $x+y\notin B$ 」から探すと, $(x,\ y)=(3-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-1)$, $(\sqrt{8},\ 1-2\sqrt{2})$ となる。

コメント

集合と命題に関する基本的な設問です。

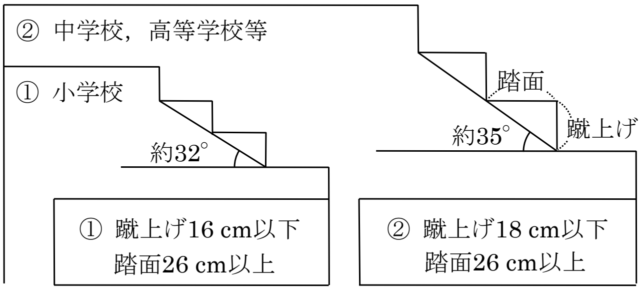
問　題

久しぶりに小学校に行くと，階段の一段一段の高さが低く感じられることがある。これは，小学校と高等学校とでは階段の基準が異なるからである。学校の階段の基準は，下のように建築基準法によって定められている。

高等学校の階段では，蹴上げが 18 cm 以下，踏面が 26 cm 以上となっており，この基準では，傾斜は最大で約35°である。

【建築基準法による階段の基準】

＊下の図は，階段の傾斜が基準内で最大のときを表している。



階段の傾斜をちょうど33°とするとき，蹴上げを 18 cm 以下にするためには，踏面をどのような範囲に設定すればよいか。踏面を x cm として，x のとり得る値の範囲を33°の三角比と x を用いて表すと，$\boxed{\text{ア}} \leqq x \leqq \boxed{\text{イ}}$ となる。ただし，踏面と蹴上げの長さはそれぞれ一定であるとし，また，踏面は水平であり，蹴上げは踏面に対して垂直であるとする。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。

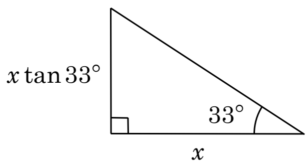
⓪ 18　　① $18\tan 33^\circ$　　② $\dfrac{18}{\tan 33^\circ}$

③ 26　　④ $26\tan 33^\circ$　　⑤ $\dfrac{26}{\tan 33^\circ}$

（本問題の図は，「建築基準法の階段に係る基準について」（国土交通省）をもとにして作成している。）

[pre2018 改]

解答例



傾斜が 33° のとき，26cm 以上の踏面 $x$cm に対し，18cm 以下の蹴上げは $x\tan 33^\circ$ となることより，

$$x \geqq 26 \quad \text{かつ} \quad x\tan 33^\circ \leqq 18$$

まとめると，$26 \leqq x \leqq \dfrac{18}{\tan 33^\circ}$ である。

コメント

三角比の定義が題材ですが，問題文の読解力が最大のポイントです。

問　題

三角形 ABC の外接円を O とし，円 O の半径を R とする。辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし，∠CAB，∠ABC，∠BCA の大きさをそれぞれ A, B, C とする。

太郎さんと花子さんは三角形 ABC について

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\cdots\cdots\cdots(*)$$

の関係が成り立つことを知り，その理由について，まず直角三角形の場合を次のように考察した。

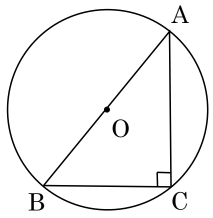
$C=90^\circ$ のとき，円周角の定理より，線分 AB は円 O の直径である。

よって，$\sin A=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{a}{2R}$ であるから，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ となる。

同様にして，$\dfrac{b}{\sin B}=2R$ である。

また，$\sin C=1$ なので，$\dfrac{c}{\sin C}=\mathrm{AB}=2R$ である。

よって，$C=90^\circ$ のとき(∗)の関係が成り立つ。



次に，太郎さんと花子さんは，三角形 ABC が鋭角三角形や鈍角三角形のときにも(∗)の関係が成り立つことを証明しようとしている。

(1)　三角形 ABC が鋭角三角形の場合についても(∗)が成り立つことは，直角三角形の場合に(∗)の関係が成り立つことをもとにして，次のような太郎さんの構想により証明できる。

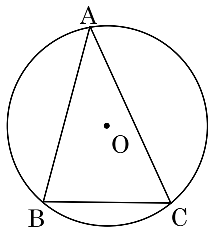
太郎さんの証明の構想

点 A を含む弧 BC 上に点 A′ をとると，円周角の定理より

∠CAB＝∠CA′B が成り立つ。

特に，$\boxed{\text{ア}}$ を点 A′ とし，三角形 A′BC に対して $C=90^\circ$ の場合の考察の結果を利用すれば，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つことが証明できる。

$\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$ についても同様に証明できる。



$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。

⓪　点 B から辺 AC に下した垂線と，円 O との交点のうち点 B と異なる点

①　直線 BO と円 O との交点のうち点 B と異なる点

②　点 B を中心とし点 C を通る円と，円 O との交点のうち点 C と異なる点

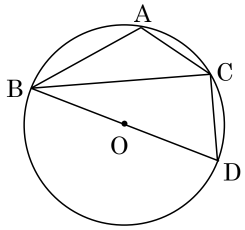
③　点 O を通り辺 BC に平行な直線と，円 O との交点のうちの 1 つ

④　辺 BC と直交する円 O の直径と，円 O との交点のうちの 1 つ

(2)　三角形 ABC が $A>90°$ である鈍角三角形の場合についても $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ が成り立つことは，次のような花子さんの構想により証明できる。

花子さんの証明の構想

右図のように，線分 BD が円 O の直径となるように点 D をとると，三角形 BCD において $\sin\boxed{\text{イ}}=\dfrac{a}{2R}$ である。



このとき，四角形 ABDC は円 O に内接するから，

$\angle\mathrm{CAB}=\boxed{\text{ウ}}$ であり，

$$\sin\angle\mathrm{CAB}=\sin\left(\boxed{\text{ウ}}\right)=\sin\boxed{\text{イ}}$$

となることを用いる。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の各解答群のうちから 1 つずつ選べ。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪　$\angle\mathrm{ABC}$　①　$\angle\mathrm{ABD}$　②　$\angle\mathrm{ACB}$　③　$\angle\mathrm{ACD}$

④　$\angle\mathrm{BCD}$　⑤　$\angle\mathrm{BDC}$　⑥　$\angle\mathrm{CBD}$

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪　$90°+\angle\mathrm{ABC}$　①　$180°-\angle\mathrm{ABC}$

②　$90°+\angle\mathrm{ACB}$　③　$180°-\angle\mathrm{ACB}$

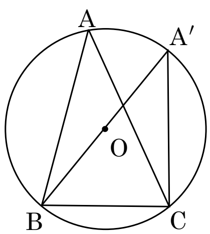
④　$90°+\angle\mathrm{BDC}$　⑤　$180°-\angle\mathrm{BDC}$

⑥　$90°+\angle\mathrm{ABD}$　⑦　$180°-\angle\mathrm{CBD}$

[pre2018]

解答例

(1)　三角形 ABC が鋭角三角形のとき，直線 BO と円 O の交点のうち点 B と異なる点を A′ とすると，



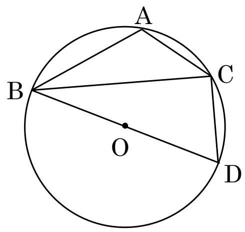
$$\mathrm{A'B}=2R,\ \angle\mathrm{A'CB}=90°$$

すると，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CA'B}}=2R$ となり，$\angle\mathrm{CAB}=\angle\mathrm{CA'B}$ から，

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{CAB}}=2R,\ \frac{a}{\sin A}=2R$$

(2)　三角形 ABC が鈍角三角形のとき，線分 BD が円 O の直径となるようにとると，$\mathrm{BD}=2R$，$\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ となり，

$$\sin\angle\mathrm{BDC}=\frac{a}{2R}$$



ここで，四角形 ABDC は円 O に内接するので，

$$\angle\mathrm{CAB}=180^\circ-\angle\mathrm{BDC}$$

これより，$\sin\angle\mathrm{CAB}=\sin(180^\circ-\angle\mathrm{BDC})=\sin\angle\mathrm{BDC}$ となり，

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \ \frac{a}{\sin A}=2R$$

コメント

正弦定理の証明で，教科書に掲載されているものです。

問　題

以下の問題では，△ABC に対して，∠A，∠B，∠Cの大きさをそれぞれ A, B, C で表すものとする。

ある日，太郎さんと花子さんのクラスでは，数学の授業で先生から次のような宿題が出された。

宿題　△ABC において $A=60°$ であるとする。このとき，

$$X=4\cos^2 B+4\sin^2 C-4\sqrt{3}\cos B\sin C$$

の値について調べなさい。

放課後，太郎さんと花子さんは出された宿題について会話をした。2 人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

太郎：A は$60°$だけど，B も C も分からないから，方針が立たないよ。
花子：まずは，具体的に 1 つ例を作って考えてみようよ。もし $B=90°$ であるとすると，$\cos B=$ $\boxed{\text{ア}}$，$\sin C=$ $\boxed{\text{イ}}$ だね。だから，この場合の X の値を計算すると 1 になるね。

(1) $\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑧のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0　① 1　② -1　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

太郎：$B=13°$ にしてみよう。数学の教科書に三角比の表（76 ページ）があるから，それを見ると，$\cos B=0.9744$ で，$\sin C$ は……あれっ？　表には$0°$ から $90°$ までの三角比の値しか載っていないから分からないね。
花子：そういうときは，$\boxed{\text{ウ}}$ という関係を利用したらいいよ。この関係を使うと，教科書の三角比の表から $\sin C=$ $\boxed{\text{エ}}$ だと分かるよ。
太郎：じゃあ，この場合の X の値を電卓を使って計算してみよう。$\sqrt{3}$ は 1.732 として計算すると……あれっ？　ぴったりにはならなかったけど，小数第 4 位を四捨五入すると，X は 1.000 になったよ！　(a) これで，$A=60°$，$B=13°$ のときに $X=1$ になることが証明できたことになるね。さらに，(b)「$A=60°$ ならば $X=1$」という命題が真であると証明できたね。
花子：本当にそうなのかな？

(2) $\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の各解答群のうちから 1 つずつ選べ。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $\sin(90°-\theta)=\sin\theta$　① $\sin(90°-\theta)=-\sin\theta$

② $\sin(90°-\theta)=\cos\theta$　③ $\sin(90°-\theta)=-\cos\theta$

④ $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$　⑤ $\sin(180°-\theta)=-\sin\theta$

⑥ $\sin(180°-\theta)=\cos\theta$　⑦ $\sin(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ -3.2709　① -0.9563　② 0.9563　③ 3.2709

(3) 太郎さんが言った下線部(a), (b)について，その正誤の組合せとして正しいものを，次の⓪～③のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\text{オ}}$

⓪ 下線部(a), (b)ともに正しい。

① 下線部(a)は正しいが，(b)は誤りである。

② 下線部(a)は誤りであるが，(b)は正しい。

③ 下線部(a), (b)ともに誤りである。

花子：$A=60°$ ならば $X=1$ となるかどうかを，数式を使って考えてみようよ。
$\triangle$ABC の外接円の半径を R とするね。すると，$A=60°$ だから，
$\mathrm{BC}=\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,R$ になるね。

太郎：$\mathrm{AB}=\boxed{\text{キ}}$, $\mathrm{AC}=\boxed{\text{ク}}$ になるよ。

(4) $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる数を答えよ。また，$\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $R\sin B$　① $2R\sin B$　② $R\cos B$　③ $2R\cos B$

④ $R\sin C$　⑤ $2R\sin C$　⑥ $R\cos C$　⑦ $2R\cos C$

花子：まず，B が鋭角の場合を考えてみたよ。

……＜花子さんのノート＞…………………………………………………………………………

点Cから直線ABに垂線CHを引くと

$\mathrm{AH}=\underline{\mathrm{AC}\cos 60^\circ}_{①}$

$\mathrm{BH}=\underline{\mathrm{BC}\cos B}_{②}$

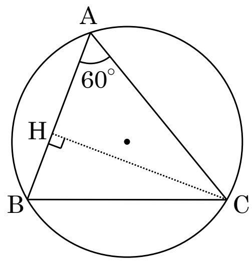
である。ABをAH，BHを用いて表すと

$\mathrm{AB}=\underline{\mathrm{AH}+\mathrm{BH}}_{③}$

であるから

$\underline{\mathrm{AB}=\boxed{\text{ケ}}\sin B+\boxed{\text{コ}}\cos B}_{④}$

が得られる。



…………………………………………………………………………………………………

太郎：さっき，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{キ}}$ と求めたから，④の式とあわせると，$X=1$ となることが証明できたよ。

花子：B が直角のときは，すでに $X=1$ となることを計算したね。(c) <u>B が鈍角のときは，証明を少し変えれば</u>，やはり $X=1$ であることが示せるね。

(5) $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから1つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $\frac{1}{2}R$　① $\frac{\sqrt{2}}{2}R$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}R$　③ R　④ $\sqrt{2}R$

⑤ $\sqrt{3}R$　⑥ $2R$　⑦ $2\sqrt{2}R$　⑧ $2\sqrt{3}R$

(6) 下線部(c)について，B が鈍角のときには下線部①～③の式のうち修正が必要なものが2つある。修正が必要な下線部番号を次の⓪～⑤のうちから1つ選べ。$\boxed{\text{サ}}$

⓪ 下線部①と②　① 下線部①と③　② 下線部①と④

③ 下線部②と③　④ 下線部②と④　⑤ 下線部③と④

花子：今まではずっと $A=60^\circ$ の場合を考えてきたんだけど，$A=120^\circ$ で $B=30^\circ$ の場合を考えてみたよ。$\sin B$ と $\cos C$ の値を求めて，X の値を計算したら，この場合にも1になったんだよね。

太郎：わっ，本当だ。計算してみたら X の値は1になるね。

(7)　△ABC について，条件 p, q を考える。

$$p : A = 60^\circ \qquad\qquad q : 4\cos^2 B + 4\sin^2 C - 4\sqrt{3}\cos B \sin C = 1$$

これまでの太郎さんと花子さんが行った考察をもとに，正しいと判断できるものを，次の ⓪～③のうちから１つ選べ。 $\boxed{\text{シ}}$

⓪　p は q であるための必要十分条件である。

①　p は q であるための必要条件であるが，十分条件でない。

②　p は q であるための十分条件であるが，必要条件でない。

③　p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。　　[pre2017 改]

解答例

(1)　$A = 60^\circ$ の△ABC において，$X = 4\cos^2 B + 4\sin^2 C - 4\sqrt{3}\cos B \sin C$

$B = 90^\circ$ とすると，$C = 30^\circ$ であり，$\cos B = 0$，$\sin C = \frac{1}{2}$ となり，$X = 1$

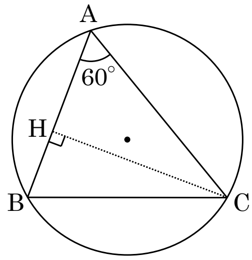
(2)　$B = 13^\circ$ とすると，$C = 107^\circ$ であり，$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$ より，

$\sin C = \sin(180^\circ - 107^\circ) = \sin 73^\circ = 0.9563$

(3)　$A = 60^\circ$，$B = 13^\circ$ のとき概数計算をして $X = 1.000$ になったとしても，「$A = 60^\circ$，$B = 13^\circ$ のとき $X = 1$」とは言えない。

さらに，「$A = 60^\circ$ ならば $X = 1$」が真という証明にもならない。

(4)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，



$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin 60^\circ} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin B} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = 2R$$

すると，$\mathrm{BC} = 2R\sin 60^\circ = \sqrt{3}R$

$\mathrm{AB} = 2R\sin C$，$\mathrm{AC} = 2R\sin B$

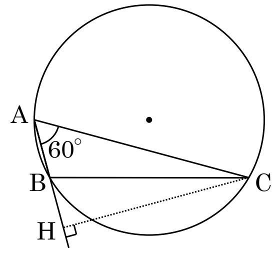
(5)　B が鋭角のとき，点 C から直線 AB に垂線 CH を引くと，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{AH} + \mathrm{BH} = \mathrm{AC}\cos 60^\circ + \mathrm{BC}\cos B = 2R\sin B\cos 60^\circ + \sqrt{3}R\cos B \\ &= R\sin B + \sqrt{3}R\cos B\end{aligned}$$

すると，$2R\sin C = R\sin B + \sqrt{3}R\cos B$ となり，$2\sin C = \sin B + \sqrt{3}\cos B$ から，

$$X = 4\cos^2 B + (\sin B + \sqrt{3}\cos B)^2 - 2\sqrt{3}\cos B(\sin B + \sqrt{3}\cos B) = 1$$

(6)　B が鈍角のとき，(5)と同様にして，



$\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\cos 60^\circ$

$\mathrm{BH} = \mathrm{BC}\cos(180^\circ - B) = -\mathrm{BC}\cos B$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{AH} - \mathrm{BH} = \mathrm{AC}\cos 60^\circ + \mathrm{BC}\cos B \\ &= R\sin B + \sqrt{3}R\cos B\end{aligned}$$

(7) 命題「$p : A = 60° \Longrightarrow q : X = 1$」は，(5), (6)より真である。

命題「$q : X = 1 \Longrightarrow p : A = 60°$」は，偽である。（反例： $A = 120°$， $B = 30°$）

よって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件でない。

コメント

三角比の図形への応用。会話文の読解が必要ですが，過程なしに結論が述べられている箇所もあり，気持ち悪く感じるかもしれません。ただし，疑い深くなければ，気にならないでしょうが……。

問　題

t および x を正の実数とする。

$AB=8$，$AC=t$，$\angle ABC=60^\circ$ であるような△ABC が 2 通り存在する場合の t のとり得る値の範囲について，次の【方針１】または【方針２】で考えることができる。

【方針１】

BC $=x$ とおくと，余弦定理から x についての 2 次方程式

$$x^2-\boxed{\text{ア}}\,x+\boxed{\text{イウ}}-t^{\boxed{\text{エ}}}=0$$

が成り立つから，これが $\boxed{\text{オ}}$ をもつような t の値の範囲を求める。

【方針２】

点 B を通り直線 AB と 60° の角をなす半直線の一方を l とするとき，$\boxed{\text{カ}}$ が l と異なる 2 点で交わるような t の値の範囲を求める。

次の各問いに答えよ。

(1)　【方針１】の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数を答えよ。

(2)　【方針１】の $\boxed{\text{オ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～④ のうちから 1 つ選べ。

⓪　異なる 2 つの解　　①　異なる 2 つの正の解　　②　異なる 2 つの負の解

③　正の解と負の解　　④　重解

(3)　【方針２】の $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪　点 A を中心とし，半径 t の円　　①　点 B を中心とし，半径 t の円

②　点 A を中心とし，半径 $\frac{t}{2}$ の円　　③　点 B を中心とし，半径 $\frac{t}{2}$ の円

④　点 A を中心とし，半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}t$ の円　　⑤　点 B を中心とし，半径 $\frac{\sqrt{3}}{2}t$ の円

(4)　a および b を正の実数とし，θ を鋭角とする。$AB=a$，$AC=b$，$\angle ABC=\theta$ である△ABC について，a と θ を一定の値にしたときに，△ABC が何通り存在するかは，b の値に応じて異なってくる。そこで，b のとり得る値の範囲によって場合に分けると，「$\boxed{\text{キ}}$ のとき△ABC はできない」，「$\boxed{\text{ク}}$ または $b \geqq a$ のとき△ABC は 1 通りできる」，「$\boxed{\text{ケ}}$ のとき△ABC は 2 通りできる」となる。

$\boxed{\text{キ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから 1 つずつ選べ。

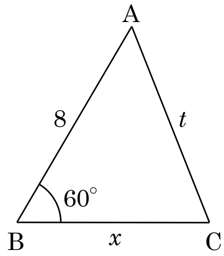
⓪　$a\cos\theta<b<a$　　①　$a\sin\theta<b<a$　　②　$0<b<a\cos\theta$

③　$0<b<a\sin\theta$　　④　$b=a\cos\theta$　　⑤　$b=a\sin\theta$

[model2017 改]

解答例

(1)　AB $=8$，AC $=t>0$，$\angle$ABC $=60^\circ$ である$\triangle$ABC に対して，



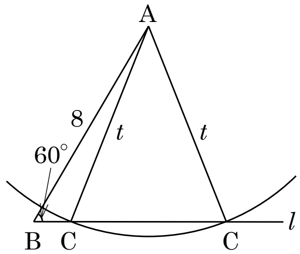
BC $=x$ とおくと，余弦定理より，

$$t^2=8^2+x^2-2\cdot 8x\cos 60^\circ,\ t^2=64+x^2-8x$$

すると，$x^2-8x+64-t^2=0$ ………①

(2)　$\triangle$ABC が 2 通り存在する場合の条件は，x についての 2 次方程式①が，異なる 2 つの正の解をもつことである。

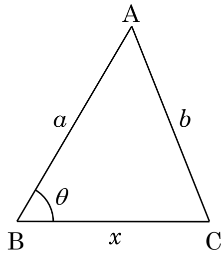
(3)　点 B を通り直線 AB と 60° の角をなす半直線の一方を l とする。すると，$\triangle$ABC が 2 通り存在する場合の条件は，点 A を中心とした半径 t の円が，l と異なる 2 点で交わることである。



(4)　AB $=a>0$，AC $=b>0$，$\angle$ABC $=\theta$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ である$\triangle$ABC に対し，(1)と同様に余弦定理より，

$$b^2=a^2+x^2-2ax\cos\theta$$

$$x^2-2ax\cos\theta+a^2-b^2=0 \text{ ………②}$$



さて，$\triangle$ABC が何通り存在するかは，x についての 2 次方程式②がもつ正の解の個数が対応し，②の左辺を $f(x)$ とおくと，

$$f(0)=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-a\cos\theta)^2-a^2\cos^2\theta+a^2-b^2\\&=(x-a\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta-b^2\\&=(x-a\cos\theta)^2+(a\sin\theta+b)(a\sin\theta-b)\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $a\cos\theta>0$，$a\sin\theta+b>0$ に注意すると，

(i)　$a\sin\theta-b>0$ $(b<a\sin\theta)$ のとき　方程式②は正の解をもたない

(ii)　$a\sin\theta-b=0$ $(b=a\sin\theta)$ のとき　方程式②は正の解（重解）を 1 つもつ

(iii)　$a\sin\theta-b<0$ $(b>a\sin\theta)$ のとき

(iii-i)　$(a+b)(a-b)>0$ $(b<a)$ のとき　方程式②は正の解を 2 つもつ

(iii-ii)　$(a+b)(a-b)\leqq 0$ $(b\geqq a)$ のとき　方程式②は正の解を 1 つもつ

(i)〜(iii)より，$b\geqq a$ のとき $b>a\sin\theta$ が成り立つことに注意すると，

$0<b<a\sin\theta$ のとき，$\triangle$ABC はできない

$b=a\sin\theta$ または $b\geqq a$ のとき，$\triangle$ABC は 1 通りできる

$a\sin\theta<b<a$ のとき，$\triangle$ABC は 2 通りできる

コメント

三角比の応用と 2 次方程式の解の配置の融合問題です。(4)は方針 1 で記しました。

問　題

花子さんと太郎さんは，次の記事を読みながら会話をしている。

＝公園整備計画＝　広場の大きさどうする？

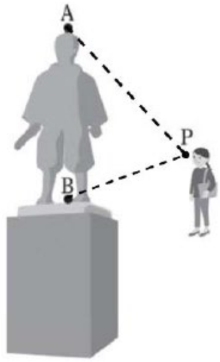
○○市の旧県営野球場跡地に整備される県営緑地公園（仮称）の整備内容について，緑地公園計画推進委員会は 15 日，公園のメイン広場に地元が生んだ武将△△△△の銅像を建てる案を発表した。県民への憩いの場を提供するとともに，観光客の誘致にも力を入れたい考え。


（写真はイメージ）

ある委員は，「銅像の設置にあたっては，銅像と台座の高さはどの程度がよいのか，観光客にとって銅像を最も見やすくするためには，メイン広場の広さはどのくらいあればよいのか，などについて，委員の間でも様々な意見があるため，今後，実寸大の模型などを使って検討したい」と話した。

花子：銅像と台座の高さや，広場の大きさを決めるのも難しそうね。
太郎：でも，近づけば大きく見えて，遠ざかれば小さく見えるというだけでしょ。
花子：写真を撮るとき，像からどのくらいの距離で撮れば，銅像を見込む角を大きくできるかしら。

見込む角とは，右図のように，銅像の上端 A と下端 B と見る人の目の位置 P によってできる∠APB のことである。



2 人は，銅像を見込む角について，次の 2 つのことを仮定して考えることにした。

・地面は水平であり，直線 AB は地面に対して垂直である。
・どの位置からも常に銅像全体は見える。

次の各問いに答えよ。なお，必要に応じて 76 ページの三角比の表を用いてもよい。

(1)　銅像の真正面に立ち，銅像の真下から 12 m 離れた位置から，高さ 1.5 m の台座に乗せた高さ 4 m の銅像を見る。このとき，目の高さが 1.5 m の花子さんの銅像を見込む角として最も近いものを，次の ⓪～⑨のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\text{ア}}$

⓪　4°	①　6°	②　8°	③　10°	④　12°
⑤　14°	⑥　16°	⑦　18°	⑧　20°	⑨　22°

(2) 銅像に近づいたり離れたりすると，見込む角の大きさは変化する。見込む角が最大になるときの，見る人の足元の位置を「ベストスポット」とよぶこととする。この「ベストスポット」について，太郎さんは次のように考えた。

【太郎さんの考え】

3 点 A, B, P を通る円の半径を R とすると，AB の長さは常に一定であることから，$\angle$APB が鋭角ならば，$\angle$APB が最大となるのは，R が最小のときである。

(i) $\angle$APB が鋭角である条件を，$\triangle$APB の 3 辺の長さ AB, AP, BP についての式で表すと $\boxed{\text{イ}}$ となる。$\boxed{\text{イ}}$ にあてはまるものを次の ⓪～③ のうちから 1 つ選べ。

⓪ $\mathrm{AB}+\mathrm{AP}>\mathrm{BP}$　① $\mathrm{AB}^2+\mathrm{AP}^2>\mathrm{BP}^2$

② $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}>\mathrm{AB}$　③ $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2>\mathrm{AB}^2$

(ii) **【太郎さんの考え】**が正しいことは，$R=\boxed{\text{ウ}}$ という関係式から，「$\angle$APB が鋭角のとき，$\angle$APB が大きくなるほど $\sin\angle$APB の値は大きくなる」ことからわかる。$\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまるものを次の ⓪～⑤ のうちから 1 つ選べ。

⓪ $\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{APB}$　① $2\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{APB}$　② $\dfrac{\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{APB}}{2}$

③ $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$　④ $\dfrac{2\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{APB}}$　⑤ $\dfrac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{APB}}$

(iii) 2 人は**【太郎さんの考え】**について先生に相談したところ，R が最小になるのは，3 点 A, B, P を含む平面上において，3 点 A, B, P を通る円と点 P を通り直線 AB に垂直な直線が接するときであることを教えてもらった。

この考え方に基づくと，目の高さが 1.5 m の花子さんが，高さ 6.5 m の台座の上に乗せた高さ 4 m の銅像を見る「ベストスポット」となるのは，3 点 A, B, P を通る円の半径 R が $\boxed{\text{エ}}$ m になるときである。

① $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまる数を答えよ。

② このときの見込む角として最も近いものを，次の ⓪～⑨ のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\text{オ}}$。

⓪ 11°	① 13°	② 15°	③ 17°	④ 19°
⑤ 21°	⑥ 23°	⑦ 25°	⑧ 27°	⑨ 29°

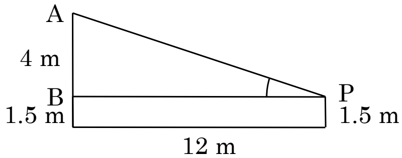
③ このときの銅像の真下と「ベストスポット」の距離は，およそ $\boxed{\text{カ}}$ m である。$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の ⓪～⑨ のうちから 1 つ選べ。

⓪ 3.7	① 4.7	② 5.7	③ 6.7	④ 7.7
⑤ 8.7	⑥ 9.7	⑦ 10.7	⑧ 11.7	⑨ 12.7

[model2017 改]

解答例

(1)　右図より，$\tan\angle\mathrm{APB}=\dfrac{4}{12}\fallingdotseq 0.3333$ となり，

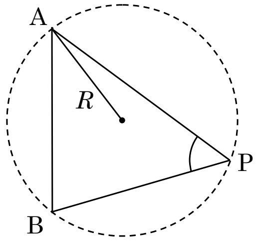


三角比の表から，

$\angle\mathrm{APB}\fallingdotseq 18°$

(2)　(i)　△APB において，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{APB}=\frac{\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}}$$



$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角である条件は，$\cos\angle\mathrm{APB}>0$ より，

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2>\mathrm{AB}^2$ ………①

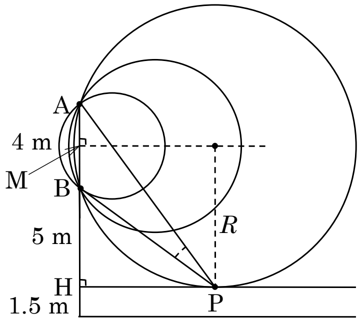
(ii)　△APB において，正弦定理より，

$R=\dfrac{\mathrm{AB}}{2\sin\angle\mathrm{APB}}$ ………②

$\angle\mathrm{APB}$ が鋭角ならば，$\angle\mathrm{APB}$ が最大となるとき $\sin\angle\mathrm{APB}$ の値は最大となり，このとき②から，R は最小となる。

(iii) 3 点 A, B, P を含む平面上において，線分 AB の中点を M，地面から 1.5 m の位置にある直線 AB 上の点を H とおくと，

$\mathrm{AM}=\mathrm{BM}=2\,\mathrm{m}$，$\mathrm{BH}=6.5-1.5=5\,\mathrm{m}$



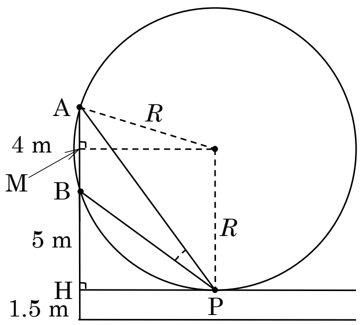
さて，2 点 A, B を通る円は，中心が線分 AB の垂直二等分線上にあり，しかも地面から 1.5 m の位置にある点を通る。すると，この円の半径 R が最小になるのは，点 H を通る水平線が円の接線となる場合であり，このときの半径 R は，

$R=\mathrm{BM}+\mathrm{BH}=7\,\mathrm{m}$

そして，②から，

$\sin\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\mathrm{AB}}{2R}=\dfrac{4}{14}\fallingdotseq 0.2857$

三角比の表から，$\angle\mathrm{APB}\fallingdotseq 17°$ である。



また，銅像の真下と「ベストスポット」の距離は，

$\mathrm{PH}=\sqrt{R^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{7^2-2^2}=3\sqrt{5}\fallingdotseq 6.7\,\mathrm{m}$

コメント

日常的にありそうな状況設定された三角比の応用題です。(2)の(iii)の設問は，誘導がついているものの，短時間で判断するには難しいところがあります。

問　題

関数 $f(x)=a(x-p)^2+q$ について，$y=f(x)$ のグラフをコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて表示させる。

このソフトでは，a，p，q の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。さらに，それぞれの $\boxed{}$ の下にある●を左に動かすと値が減少し，右に動かすと値が増加するようになっており，値の変化に応じて関数のグラフが画面上で変化する仕組みになっている。

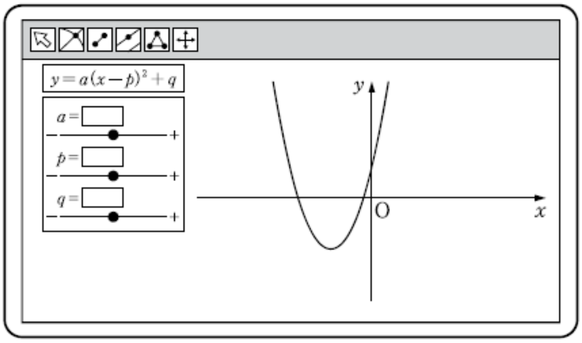


図1

最初に，a, p, q をある値に定めたところ，図 1 のように，x 軸の負の部分と 2 点で交わる下に凸の放物線が表示された。

(1)　図 1 の放物線を表示させる a，p，q の値に対して，方程式 $f(x)=0$ の解について正しく記述したものを，次の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\text{ア}}$

⓪　方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの正の解をもつ。

①　方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの負の解をもつ。

②　方程式 $f(x)=0$ は正の解と負の解をもつ。

③　方程式 $f(x)=0$ は重解をもつ。

④　方程式 $f(x)=0$ は実数解をもたない。

(2)　次の操作 A，操作 P，操作 Q のうち，いずれか 1 つの操作を行い，不等式 $f(x)>0$ の解を考える。

> 操作 A：図 1 の状態から p, q の値は変えず，a の値だけを変化させる。
> 操作 P：図 1 の状態から a, q の値は変えず，p の値だけを変化させる。
> 操作 Q：図 1 の状態から a, p の値は変えず，q の値だけを変化させる。

このとき，操作 A，操作 P，操作 Q のうち，「不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数となること」が起こり得る操作は $\boxed{\text{イ}}$。また，「不等式 $f(x)>0$ の解がないこと」が起こり得る操作は $\boxed{\text{ウ}}$。

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑦のうちから 1 つずつ選べ。ただし，同じものを選んでよい。

⓪　ない	①　操作 A だけである
②　操作 P だけである	③　操作 Q だけである
④　操作 A と操作 P だけである	⑤　操作 A と操作 Q だけである
⑥　操作 P と操作 Q だけである	⑦　操作 A と操作 P と操作 Q のすべてである

[pre2018]

解答例

(1)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標が，方程式 $f(x)=0$ の解を表すので，図 1 から，方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの負の解をもつ。

(2)　$f(x)=a(x-p)^2+q$ に対し，「不等式 $f(x)>0$ の解がすべての実数となる条件」は，$y=f(x)$ のグラフが下に凸で，しかも頂点の y 座標が正の場合である。すなわち，図 1 の状態から q の値を変化させることが必須となり，操作 A, P, Q から選ぶと，「a, p の値は変えず，q の値だけを変化させる」操作 Q だけとなる。

次に，「不等式 $f(x)>0$ の解がない条件」は，$y=f(x)$ のグラフが上に凸で，しかも頂点の y 座標が負の場合である。すなわち，図 1 の状態から a の値を変化させることが必須となり，操作 A, P, Q から選ぶと，「p, q の値は変えず, a の値だけを変化させる」操作 A だけとなる。

コメント

2 次関数のグラフと方程式・不等式の関係で，基本的です。

問　題

$\angle ACB = 90^\circ$ である直角三角形 ABC と，その辺上を移動する 3 点 P, Q, R がある。点 P, Q, R は，次の規則に従って移動する。

- 最初，点 P, Q, R はそれぞれ点 A, B, C の位置にあり，点 P, Q, R は同時刻に移動を開始する。
- 点 P は辺 AC 上を，点 Q は辺 BA 上を，点 R は辺 CB 上を，それぞれ向きを変えることなく一定の速さで移動する。ただし点 P は毎秒 1 の速さで移動する。
- 点 P, Q, R は，それぞれ点 C, A, B の位置に同時刻に到達し，移動を終了する。

次の問いに答えよ。

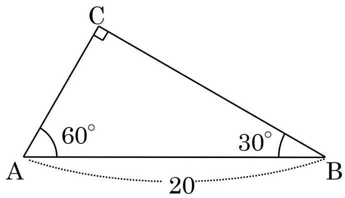


図 1

(1)　図 1 の直角三角形 ABC を考える。

(i)　各点が移動を開始してから 2 秒後の線分 PQ の長さと三角形 APQ の面積 S を求めよ。

$$PQ = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イウ}}},\quad S = \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

(ii)　各点が移動する間に，線分 PR の長さとして，1 回だけしかとり得ない値は，

$PR = \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，または $\boxed{\text{クケ}} < PR \leqq \boxed{\text{コサ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ を満たす任意の値である。ただし，移動には出発点と到達点も含まれるものとする。

(iii) 各点が移動する間における三角形 APQ，三角形 BQR，三角形 CRP の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とする。このとき，各時刻における S_1，S_2，S_3 の間には，つねに $\boxed{\text{ス}}$ という大小関係が成り立つ。$\boxed{\text{ス}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪　$S_1 = S_2 = S_3$　　①　$S_1 = S_2 > S_3$　　②　$S_1 > S_2 = S_3$

③　$S_1 > S_2 > S_3$　　④　$S_2 > S_3 > S_1$　　⑤　$S_3 > S_2 > S_1$

(2)　直角三角形 ABC の辺の長さを右の図 2 のように変えたとき，三角形 PQR の面積が 12 となるのは，各点が移動を開始してから何秒後かを求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{セソ}} \pm \boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\ 秒後$$

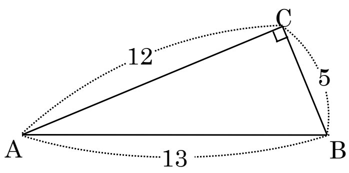


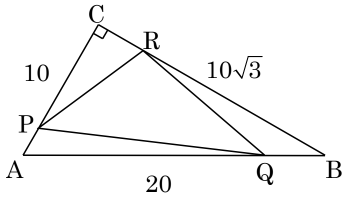
図 2

[pre2018 改]

解答例

(1)　右図の直角三角形ABCにおいて,

$\mathrm{AB}=20$，$\mathrm{AC}=10$，$\mathrm{BC}=10\sqrt{3}$



条件より，点 P, Q, R は同時に移動を開始し，点 P は点 A から毎秒 1 の速さで AC 上, 点 Q は点 B から毎秒 2 の速さで BA 上, 点 R は点 C から毎秒$\sqrt{3}$の速さで CB 上を移動し, 10 秒後に移動を終了する。

(i)　移動を開始して 2 秒後には，$\mathrm{AP}=2$，$\mathrm{AQ}=20-2\times2=16$となり,

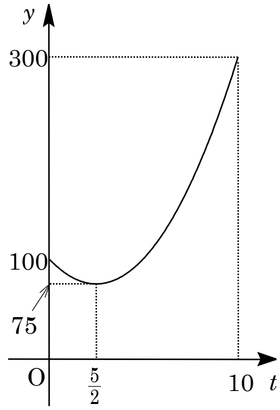
$\mathrm{PQ}^2=2^2+16^2-2\cdot2\cdot16\cos60^\circ=228$，$\mathrm{PQ}=2\sqrt{57}$

また，△APQ の面積Sは，$S=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot16\sin60^\circ=8\sqrt{3}$

(ii)　移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq10)$には，$\mathrm{CP}=10-t$，$\mathrm{CR}=\sqrt{3}t$より,

$$\mathrm{PR}^2=(10-t)^2+(\sqrt{3}t)^2=4t^2-20t+100$$
$$=4\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+75$$

$y=4\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+75$のグラフは右図のようになる。



すると，1 回だけしかとり得ないyの値は，$y=75$，または$100<y\leqq300$を満たす任意の値である。

これより，1 回だけしかとり得ない PR の値は，$\mathrm{PR}=5\sqrt{3}$，または$10<\mathrm{PR}\leqq10\sqrt{3}$を満たす任意の値である。

(iii) △APQ, △BQR, △CRP の面積をそれぞれS_1，S_2，S_3とおき，△ABC の面積をTとして，移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq10)$には,

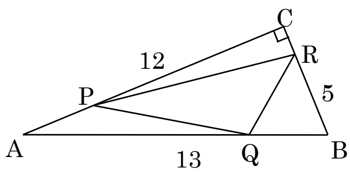
$\mathrm{AP}:\mathrm{PC}=t:10-t$，$\mathrm{BQ}:\mathrm{QA}=t:10-t$，$\mathrm{CR}:\mathrm{RB}=t:10-t$

これより，$\dfrac{S_1}{T}=\dfrac{S_2}{T}=\dfrac{S_3}{T}=\dfrac{t}{10}\cdot\dfrac{10-t}{10}=\dfrac{t(10-t)}{100}$となる。

よって，どんな時刻においても$S_1=S_2=S_3$である。

(2)　右図の直角三角形ABCにおいて,

$\mathrm{AB}=13$，$\mathrm{AC}=12$，$\mathrm{BC}=5$



移動を開始してt秒後$(0\leqq t\leqq12)$には，S_1，S_2，S_3は，(1)と同様に考えると，$T=30$から,

$$S_1=S_2=S_3=\frac{t}{12}\cdot\frac{12-t}{12}T=\frac{5}{24}t(12-t)$$

すると，△PQR の面積Uは，$U=T-\dfrac{5}{24}t(12-t)\cdot3=30-\dfrac{5}{8}t(12-t)$

条件より，$U=12$ なので，$30-\dfrac{5}{8}t(12-t)=12$ となり，

$$5t(12-t)=144\ ,\ \ 5t^2-60t+144=0$$

よって，$t=\dfrac{30\pm6\sqrt{5}}{5}$ となり，この値はともに $0\leqq t\leqq12$ を満たしている。

コメント

2 次関数に関する応用問題。ときどき見かける内容ですが，同時に頂点を出発し，同時に隣りの頂点に到着することから，速さを決定する点がポイントです。面積については，解答例では内分比に注目して処理していますが，実際に求めても構いません。

問　題

数学の授業で，2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ についてコンピュータのグラフ表示ソフトを用いて考察している。

このソフトでは，図 1 の画面上の $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ にそれぞれ係数 a, b, c の値を入力すると，その値に応じたグラフが表示される。

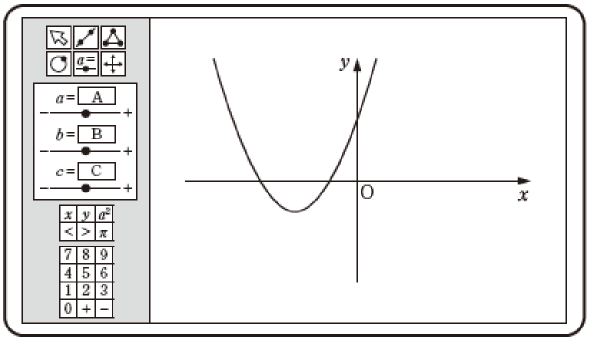
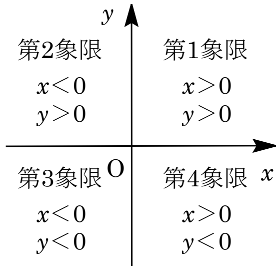


図 1

さらに，$\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ それぞれの下にある●を左に動かすと係数の値が減少し，右に動かすと係数の値が増加するようになっており，値の変化に応じて 2 次関数のグラフが座標平面上を動く仕組みになっている。

また，座標平面は x 軸，y 軸によって 4 つの部分に分けられる。これらの各部分を「象限」といい，右の図のように，それぞれを「第 1 象限」「第 2 象限」「第 3 象限」「第 4 象限」という。ただし，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。



このとき，次の問いに答えよ。

(1)　はじめに，図 1 の画面のように，頂点が第 3 象限にあるグラフが表示された。このときの a，b，c の値の組合せとして最も適当なものを，右の ⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

$\boxed{\text{ア}}$

	a	b	c
⓪	2	1	3
①	2	−1	3
②	−2	3	−3
③	$\frac{1}{2}$	3	3
④	$\frac{1}{2}$	−3	3
⑤	$-\frac{1}{2}$	3	−3

(2)　次に，a，b の値を(1)の値のまま変えずに，c の値だけを変化させた。このときの頂点の移動について正しく述べたものを，次の ⓪～③のうちから 1 つ選べ。$\boxed{\text{イ}}$

⓪　最初の位置から移動しない。

①　x 軸方向に移動する。

②　y 軸方向に移動する。

③　原点を中心として回転移動する。

(3)　また, b, c の値を(1)の値のまま変えずに, a の値だけをグラフが下に凸の状態を維持するように変化させた。このとき，頂点は，$a=\dfrac{b^2}{4c}$ のときは $\boxed{\text{ウ}}$ にあり，それ以外のときは $\boxed{\text{エ}}$ を移動した。$\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑧のうちから１つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　原点　　①　x 軸上　　②　y 軸上

③　第３象限のみ　　④　第１象限と第３象限

⑤　第２象限と第３象限　　⑥　第３象限と第４象限

⑦　第２象限と第３象限と第４象限　　⑧　すべての象限

(4)　最初の a, b, c の値を変更して，右の図 2 のようなグラフを表示させた。そして, a, c の値をこのまま変えずに, b の値だけを変化させた。このとき，頂点が移動しない象限を次の ⓪～②のうちから 1 つ選べ。

$\boxed{\text{オ}}$

⓪　第１象限と第２象限

①　第１象限と第３象限

②　第２象限と第３象限

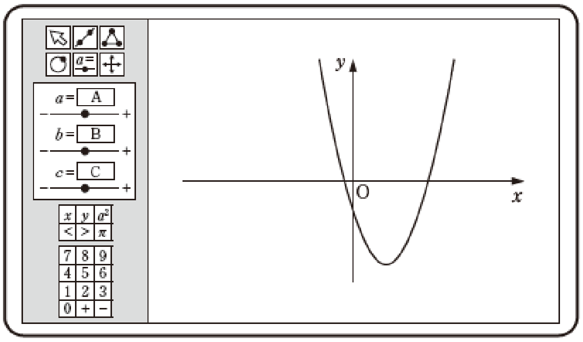


図 2

[pre2017 改]

解答例

(1)　$y=ax^2+bx+c\ =a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ に対して，そのグラフの概形から

$a>0$，y 切片から $c>0$ である。

また，頂点$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$は第３象限から，$-\dfrac{b}{2a}<0$，$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}<0$

$b>0$，$b^2-4ac>0$

すると, a, b, c の値の組合せは，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{2},\ 3,\ 3\right)$である。

(2)　a, b の値は変えずに c の値だけ変えるとき，$x=-\dfrac{b}{2a}$，$y=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=c-\dfrac{b^2}{4a}$

から, 頂点は y 軸方向に移動する。

(3)　b, c の値は変えずに a の値だけ $a>0$ で変えるとき，

(i)　$a=\dfrac{b^2}{4c}$ のとき　$x<0$，$y=0$ から頂点は x 軸上にある。

(ii)　$a \neq \dfrac{b^2}{4c}$ のとき　$x < 0$，$y \neq 0$ から頂点は第 2 象限と第 3 象限にある。

(4)　図より，$a > 0$，$c < 0$ であり，頂点が第 4 象限から，$-\dfrac{b}{2a} > 0$，$-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} < 0$

$$b < 0,\ b^2 - 4ac > 0$$

このとき，a, c の値は変えずに b の値だけ変えるとき，頂点の y 座標は，

$$y = c - \frac{b^2}{4a} \leqq c < 0$$

また，頂点の x 座標 $x = -\dfrac{b}{2a}$ は，正にも負にもなりうる。

したがって，頂点が移動しないのは第 1 象限と第 2 象限である。

コメント

2 次関数のグラフに関する問題。具体的な計算はほとんど不要で，定性的に解けます。

問　題

○○高校の生徒会では，文化祭でＴシャツを販売し，その利益をボランティア団体に寄付する企画を考えている。生徒会執行部では，できるだけ利益が多くなる価格を決定するために，次のような手順で考えることにした。

価格決定の手順

(i)　アンケート調査の実施

200 人の生徒に，「Ｔシャツ 1 枚の価格がいくらまでであればＴシャツを購入してもよいと思うか」について尋ね，500 円，1000 円，1500 円，2000 円の 4 つの金額から 1 つを選んでもらう。

(ii)　業者の選定

無地のＴシャツ代とプリント代を合わせた「製作費用」が最も安い業者を選ぶ。

(iii)　Ｔシャツ

価格は「製作費用」と「見込まれる販売数」をもとに決めるが，販売時に釣り銭の処理で手間取らないよう 50 の倍数の金額とする。

右の表 1 は，アンケート調査の結果である。生徒会執行部では，例えば，価格が 1000 円のときには 1500 円や 2000 円と回答した生徒も 1 枚購入すると考えて，それぞれの価格に対し，その価格以上の金額を回答した生徒の人数を「累積人数」として表示した。このとき，次の問いに答えよ。

表 1

Ｔシャツ 1 枚の価格（円）	人数（人）	累積人数（人）
2000	50	50
1500	43	93
1000	61	154
500	46	200

(1)　売上額は

$$（売上額）=（Ｔシャツ 1 枚の価格）\times（販売数）$$

と表せるので，生徒会執行部では，アンケートに回答した 200 人の生徒について，調査結果をもとに，表 1 にない価格の場合についても販売数を予測することにした。そのために，Ｔシャツ 1 枚の価格を x 円，このときの販売数を y 枚とし，x と y の関係を調べることにした。

表 1 のＴシャツ 1 枚の価格と $\boxed{\text{ア}}$ の値の組を $(x,\ y)$ として座標平面上に表すと，その 4 点が直線に沿って分布しているように見えたので，この直線を，Ｔシャツ 1 枚の価格 x と販売数 y の関係を表すグラフとみなすことにした。

このとき，y は x の $\boxed{\text{イ}}$ であるので，売上額を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の $\boxed{\text{ウ}}$ である。このように考えると，表 1 にない価格の場合についても売上額を予測することができる。

$\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$, $\boxed{ウ}$ に入るものとして最も適当なものを，次の ⓪～⑥のうちから１つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

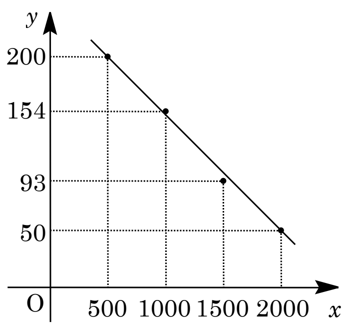
⓪ 人数　① 累積人数　② 製作費用　③ 比例
④ 反比例　⑤ 1 次関数　⑥ 2 次関数

生徒会執行部が(1)で考えた直線は，表 1 を用いて座標平面上にとった 4 点のうち x の値が最小の点と最大の点を通る直線である。この直線を用いて，次の問いに答えよ。

(2) 売上額 $S(x)$ が最大になる x の値を求めよ。$\boxed{エオカキ}$

(3) Tシャツ 1 枚当たりの「製作費用」が 400 円の業者に 120 枚を依頼することにしたとき，利益が最大になるTシャツ 1 枚の価格を求めよ。$\boxed{クケコサ}$ 円　[pre2017]

解答例



(1) T シャツ 1 枚の価格と販売数についての調査結果をもとにして，T シャツ 1 枚の価格を x，累積人数（販売数）を y とすると，右図のようになり，y は x の 1 次関数とみなせる。

ここで，売上高を $S(x)$ とおくと，$S(x)=xy$ から，$S(x)$ は x の 2 次関数となる。

(2) $(x,\ y)=(500,\ 200)$，$(2000,\ 50)$ を結んだ直線は，

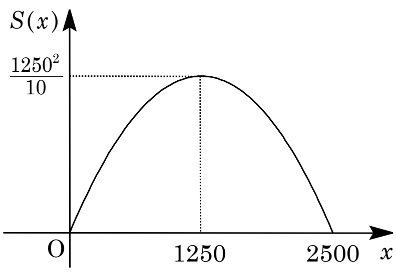
$$y-200=\frac{50-200}{2000-500}(x-500)$$

$$y=-\frac{1}{10}x+250 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，売上高 $S(x)$ は，

$$S(x)=x\left(-\frac{1}{10}x+250\right)=-\frac{1}{10}x^2+250x$$

$$=-\frac{1}{10}(x-1250)^2+\frac{1250^2}{10} \cdots\cdots\cdots ②$$



よって，$x=1250$ のとき $S(x)$ は最大になる。

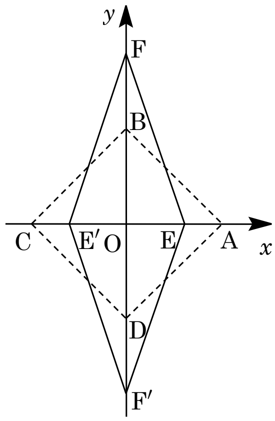
(3) 利益 $T(x)$ は，$T(x)=S(x)-400\times120$ となる。ただし，$0\leqq y\leqq120$ である。

すると，①から $1300\leqq x\leqq2500$ となるので，$T(x)$ が最大になるのは，②から $x=1300$ のときである。

コメント

2 次関数の最大・最小に関する応用問題。(3)では原価 400 円で売価 1300 円ということは，粗利益がほぼ 70%ですが，衣料品の販売では普通こんなものでしょうか。応用問題だとつい気になってしまいます。

問　題



右の図のように座標平面上に 4 点A(2, 0)，B(0, 2)，C(−2, 0)，D(0, −2)を頂点とする正方形ABCDがある。

点Eは点Aから出発して x 軸上を移動し，点Fは点Bから出発して y 軸上を移動する。ただし，2 点 E, F は，つねに BF＝2AE の関係を満たしながら移動するものとする。また，E, F の原点Oに関する対称な点をそれぞれE′，F′とし，4 点 E, F, E′，F′ を頂点とする四角形の面積を S とする。以下の各問いに答えよ。

(1) 点 E は点 A から出発して x 軸の負の向きに原点 O まで移動し，点 F は点 B を出発し y 軸の正の向きに移動する場合を考える。ただし，点 E が原点 O と一致する場合は考えないものとする。

(i) 点Eが$\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$にあるとき，$S=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$である。

(ii) S のとり得る値の範囲を不等式を用いて表すと，$\boxed{\text{エ}}$となる。$\boxed{\text{エ}}$にあてはまるものを，次の ⓪〜③のうちから 1 つ選べ。

⓪ $0<S<8$　　① $0<S\leqq 8$

② $0<S<9$　　③ $0<S\leqq 9$

以下の問いでは，正方形ABCDの面積を T とする。

(2) 点Eは点Aから出発して x 軸の負の向きに点Cまで移動し，点Fは点Bから出発して y 軸の正の向きに移動する場合を考える。ただし，点Eが原点Oと一致する場合は考えないものとする。

$S=T$ となるのは，点Eが点Aと一致するとき，および

$$\mathrm{AE}=\boxed{\text{オ}},\quad \frac{\boxed{\text{カ}}+\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

のときである 。

(3) 次に，2 点 E, F の移動する向きをそれぞれ逆にする。

点 E は点 A から出発して x 軸の正の向きに移動し続け，点 F は点 B から出発して y 軸の負の向きに移動し続ける場合を考える。ただし，点 F が原点 O と一致する場合は考えないものとする。,

このとき，次の ⓪〜③のうち，正しいものを 2 つ選べ。ただし，解答の順序は問わない。$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$

⓪　点 E が点 A と一致する場合を除くと，$S=T$ となるような点 E の x 座標は 2 つある。

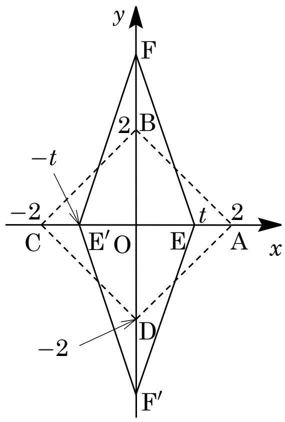
①　S が T の 2 倍になるような点 E の x 座標は 1 つだけある。

②　S の最大値は T の 9 倍に等しい。

③　点 E が点 A と一致する場合以外にも，四角形 EFE′F′ は正方形になることがある。

[model2017 改]

解答例



(1) (i)　$\mathrm{E}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ のとき，$\mathrm{AE}=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$ から $\mathrm{BF}=\frac{2}{3}$

すると，ひし形 EFE′F′ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}\left(2+\frac{2}{3}\right)\cdot 4=\frac{80}{9}$$

(ii)　$0<t\leqq 2$ として $\mathrm{E}(t,\ 0)$ とおくと，$\mathrm{BF}=2(2-t)$

すると，$\mathrm{OF}=2+2(2-t)=6-2t$ より，

$$S=\frac{1}{2}t(6-2t)\cdot 4=-4t^2+12t=-4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+9$$

$0<t\leqq 2$ から，$0<S\leqq 9$ となる。

(2)　まず，正方形 ABCD の面積 T は，$T=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot 4=8$

$-2\leqq t\leqq 2$ かつ $t\neq 0$ として，$\mathrm{E}(t,\ 0)$ とおくと，(1)と同様にして，

$$S=\frac{1}{2}|t|(6-2t)\cdot 4=4|t|(3-t)$$

(a)　$0<t\leqq 2$ のとき　$S=T$ から，$4t(3-t)=8$ となり，

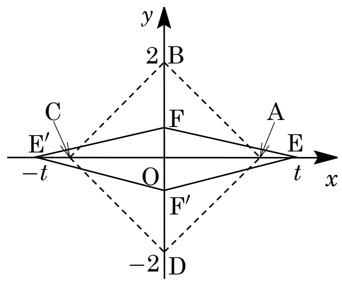
$t^2-3t+2=0$，$(t-1)(t-2)=0$

$t\neq 2$ の場合は $t=1$ となり，このとき $\mathrm{AE}=2-1=1$ である。

(b)　$-2\leqq t<0$ のとき　$S=T$ から，$-4t(3-t)=8$ となり，

$t^2-3t-2=0$，$t=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

$-2\leqq t<0$ より $t=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ となるので，$\mathrm{AE}=2-\frac{3-\sqrt{17}}{2}=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ である。



(3)　$t\geqq 2$ として $\mathrm{E}(t,\ 0)$ とおくと，$\mathrm{BF}=2(t-2)$

すると，$\mathrm{OF}=|2-2(t-2)|=|6-2t|$ より，

$$S=\frac{1}{2}t|6-2t|\cdot 4=4t|3-t|$$

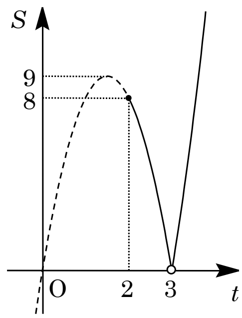
ただし，$\mathrm{OF}\neq 0$ から，$t\neq 3$ である。

(a)　$2 \leqq t < 3$ のとき

$$S = 4t(3-t) = -4t^2 + 12t = -4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + 9$$

(b)　$t > 3$ のとき

$$S = -4t(3-t) = 4t^2 - 12t = 4\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - 9$$



(a)(b)より，S のグラフは右図の実線部である。

そして，$T = 8$ に注意すると，次のことがわかる。

・$S = 8$ となる $t \neq 2$ はただ１つ。

・$S = 16$ となる t はただ１つ。

・S の最大値はない。

・ひし形 $\mathrm{EFE'F'}$ が正方形になる $t \neq 2$ は，$|6-2t| = t$ $(t > 3)$ より，$t = 6$

以上より，正しいものは ① と ③ である。

コメント

２ 次関数の図形への応用問題です。設問に応じて，条件がいろいろ変わるので，ややこしい感じはしますが，内容的には平易です。

問　題

　太郎さんと花子さんは，社会のグローバル化に伴う都市間の国際競争において，都市周辺にある国際空港の利便性が重視されていることを知った。そこで，日本を含む世界の主な 40 の国際空港それぞれから最も近い主要ターミナル駅へ鉄道等で移動するときの「移動距離」，「所要時間」，「費用」を調べた。なお，「所要時間」と「費用」は各国とも午前 10 時台で調査し，「費用」は調査時点の為替レートで日本円に換算した。

　以下では，データが与えられた際，次の値を外れ値とする。

「(第 1 四分位数)－1.5×(四分位範囲)」以下のすべての値

「(第 3 四分位数)＋1.5×(四分位範囲)」以上のすべての値

(1)　次のデータは，40 の国際空港からの「移動距離」(単位は km)を並べたものである。

56	48	47	42	40	38	38	36	28	25
25	24	23	22	22	21	21	20	20	20
20	20	19	18	16	16	15	15	14	13
13	12	11	11	10	10	10	8	7	6

　このデータにおいて，四分位範囲は $\boxed{\text{アイ}}$ であり，外れ値の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2)　図 1 は「移動距離」と「所要時間」の散布図，図 2 は「所要時間」と「費用」の散布図，図 3 は「費用」と「移動距離」の散布図である。ただし，白丸は日本の空港，黒丸は日本以外の空港を表している。また，「移動距離」，「所要時間」，「費用」の平均値はそれぞれ 22，38，950 であり，散布図に実線で示している。

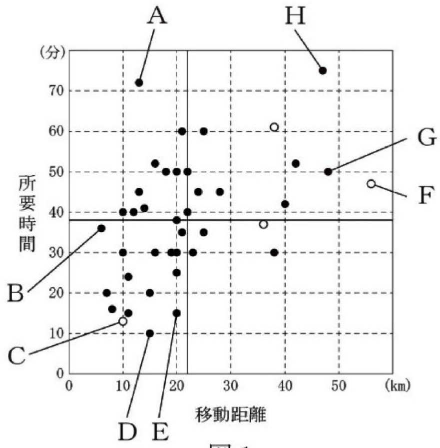


図１

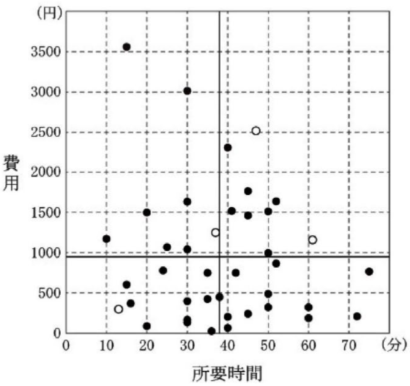


図２

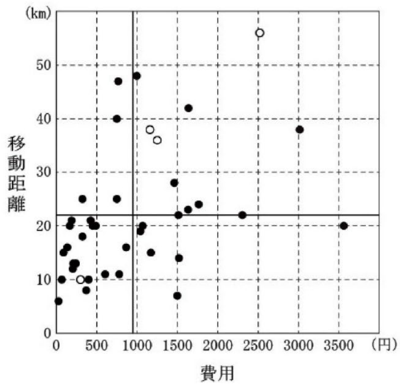
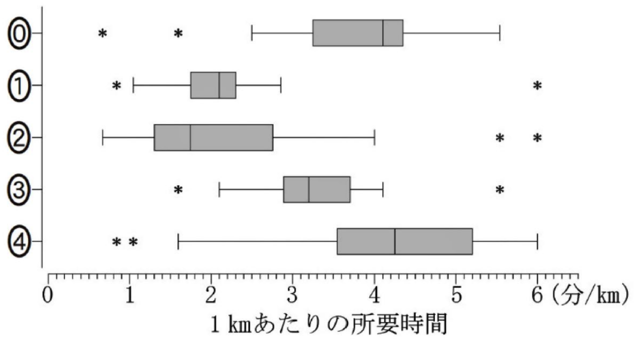


図３

(i)　40 の国際空港について，「所要時間」を「移動距離」で割った「1km あたりの所要時間」を考えよう。外れ値を＊で示した「1km あたりの所要時間」の箱ひげ図は $\boxed{\text{エ}}$ であり，外れ値は図１の A～H のうちの $\boxed{\text{オ}}$ と $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{エ}}$ については，最も適当なものを，次の ⓪～④ のうちから１つ選べ。



$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の解答群（解答の順序は問わない）

⓪ A	① B	② C	③ D	④ E	⑤ F	⑥ G	⑦ H

(ii) ある国で，次のような新空港が建設される計画があるとする。

移動距離（km）	所要時間（分）	費用（円）
22	38	950

次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)は，40 の国際空港にこの新空港を加えたデータに関する記述である。

(Ⅰ) 新空港は 日本の 4 つのいずれの空港よりも，「費用」は高いが「所要時間」は短い。

(Ⅱ) 「移動距離」の標準偏差は，新空港を加える前後で変化しない。

(Ⅲ) 図 1，図 2，図 3 のそれぞれの 2 つの変量について，変量間の相関係数は，空港を加える前後で変化しない。

(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の正誤の組合せとして正しいものは $\boxed{\text{キ}}$ である

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

	⓪	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
(Ⅰ)	正	正	正	正	誤	誤	誤	誤
(Ⅱ)	正	正	誤	誤	正	正	誤	誤
(Ⅲ)	正	誤	正	誤	正	誤	正	誤

(3) 太郎さんは，調べた空港のうちの 1 つであるＰ空港で，利便性に関するアンケート調査が実施されていることを知った。

太郎：Ｐ空港を利用した 30 人に，Ｐ空港は便利だと思うかどうかをたずねたとき，どのくらいの人が「便利だと思う」と回答したら，Ｐ空港の利用者全体のうち便利だと思う人の方が多いとしてよいのかな。

花子：例えば，20 人だったらどうかな。

2 人は，30 人のうち 20 人が「便利だと思う」と回答した場合に，「Ｐ空港は便利だと思う人の方が多い」といえるかどうかを，次の**方針**で考えることにした。

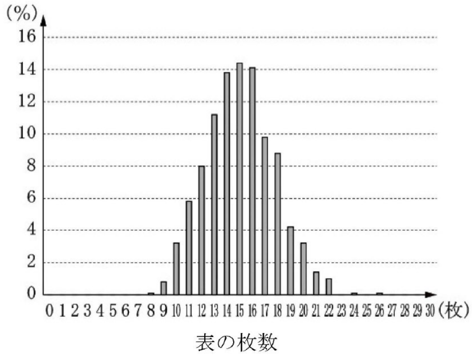
方針

- “Ｐ空港の利用者全体のうちで「便利だと思う」と回答する割合と，「便利だと思う」と回答しない割合が等しい”という仮説をたてる。
- この仮説のもとで，30 人抽出したうちの 20 人以上が「便利だと思う」と回答する確率が 5%未満であれば，その仮説は誤っていると判断し，5%以上であれば，その仮説は誤っているとは判断しない。

次の**実験結果**は，30 枚の硬貨を投げる実験を 1000 回行ったとき，表が出た枚数ごとの回数の割合を示したものである。

実験結果

表の枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
割合	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.1%	0.8%	
表の枚数	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
割合	3.2%	5.8%	8.0%	11.2%	13.8%	14.4%	14.1%	9.8%	8.8%	4.2%	
表の枚数	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
割合	3.2%	1.4%	1.0%	0.0%	0.1%	0.0%	0.1%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%



実験結果を用いると，30 枚の硬貨のうち 20 枚以上が表となった割合は，$\boxed{\text{ク}}$．$\boxed{\text{ケ}}$%である。これを，30 人のうち 20 人以上が「便利だと思う」と回答する確率とみなし，**方針**に従うと，「便利だと思う」と回答する割合と，「便利だと思う」と回答しない割合が等しいという仮説は $\boxed{\text{コ}}$，P 空港は便利だと思う人の方が $\boxed{\text{サ}}$。

$\boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}$ については，最も適当なものを，次のそれぞれの解答群のうちから 1 つずつ選べ。

$\boxed{\text{コ}}$ の解答群

⓪ 誤っていると判断され	① 誤っているとは判断されず

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

⓪ 多いといえる	① 多いとはいえない

[trial2022]

解答例

(1) 第 1 四分位数は 13，第 3 四分位数は 25 より，四分位範囲は，

$$25-13=12$$

これより，$13-1.5\times12=-5$，$25+1.5\times12=43$ なので，外れ値は 56，48，47 で，その個数は 3 である。

(2) (i)　「所要時間」を「移動距離」で割った「1km あたりの所要時間」は，図 1 において，黒丸または白丸と原点とを結んだ直線の傾きとして表される。

ここで，「1km あたりの所要時間」の第 1 四分位数を，点 C と原点を結んだ直線の傾きとしてとらえると，「所要時間」が 13 分ぐらいで，「移動距離」が 10km より，

$$\frac{13}{10}=1.3\ (\text{分}/\text{km})$$

この値から，対応する箱ひげ図は ② となり，外れ値は A と B である。

(ii)　まず，図 2 において，新空港は 2 直線の交点が対応するので，(Ⅰ)は誤りである。

次に，新空港の移動距離は 40 空港の平均値なので，新空港を加えた 41 空港の標準偏差は 40 空港の標準偏差の $\sqrt{\frac{40}{41}}$ 倍となる。これより(Ⅱ)は誤りである。

さらに，新空港の 3 つの変量はいずれも 40 空港の平均値である。これより，新空港を加えた 41 空港の移動距離と所要時間の共分散は 40 空港の共分散の $\frac{40}{41}$ 倍となる。また，移動距離，所要時間の標準偏差はいずれも $\sqrt{\frac{40}{41}}$ 倍となることより，相関係数は $\frac{40}{41}\div\left(\sqrt{\frac{40}{41}}\times\sqrt{\frac{40}{41}}\right)=1$ 倍となり変化しない。他の変量の組み合わせも同様なので，(Ⅲ)は正しい。

以上より，正しい正誤の組合せは ⑥ である。

(3)　実験結果から，30 枚の硬貨のうち 20 枚以上が表となった割合は，

$$3.2+1.4+1.0+0.1+0.1=5.8\%$$

この値を 30 人のうち 20 人以上が「便利だと思う」と回答する確率とみなしたとき，5.8%は基準である 5%より大なので，「便利だと思う」と回答する割合と「便利だと思う」と回答しない割合が等しいという仮説は，誤っているとは判断されない。よって，P 空港が便利だと思う人の方が多いとはいえない。

コメント

仮説検定まで含めた標準的な問題ですが，問題文が長いので，題意をすばやく把握することが最も重要です。なお，(2)(i)では，箱ひげ図を見て，判断しやすい第 1 四分位数に着目しています。(ii)では，新空港を加えたとき，標準偏差の定義式のシグマの部分は 0^2 が加わるだけで値は変わりません。そのため標準偏差は小さくなります。

問　題

太郎さんと花子さんは2つの変量 x, y の相関係数について考えている。2人の会話を読み，下の問いに答えよ。

花子：先生からもらった表計算ソフトのA列とB列に値を入れると，E列にはD列に対応する正しい値が表示されるよ。
太郎：最初は簡単なところで2組の値から考えてみよう。
花子：2行目を $(x,\ y)=(1,\ 2)$，3行目を $(x,\ y)=(2,\ 1)$ としてみるね。

このときのコンピュータの画面の様子が次の図である。

	A	B	C	D	E
1	変量 x	変量 y		（x の平均値）＝	ア
2	1	2		（x の標準偏差）＝	イ
3	2	1		（y の平均値）＝	ア
4				（y の標準偏差）＝	イ
5					
6				（x と y の相関係数）＝	ウ
7					

(1) ア，イ，ウ に当てはまるものを，次の ⓪～⑨ のうちから1つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ -1.56　① -1.00　② -0.50　③ -0.25　④ 0.00
⑤ 0.25　⑥ 0.50　⑦ 1.00　⑧ 1.50　⑨ 2.00

太郎：3行目の変量 y の値を0や -1 に変えても相関係数の値は ウ になったね。
花子：今度は，3行目の変量 y の値を2に変えてみよう。
太郎：エラーが表示されて，相関係数は計算できないみたいだ。

(2) 変量 x と変量 y の値の組を変更して，$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 2)$ としたときには相関係数が計算できなかった。その理由として最も適当なものを，次の ⓪～③ のうちから1つ選べ。 エ

⓪　値の組の個数が 2 個しかないから。

①　変量 x の平均値と変量 y の平均値が異なるから。

②　変量 x の標準偏差の値と変量 y の標準偏差の値が異なるから。

③　変量 y の標準偏差の値が 0 であるから。

花子：3 行目の変量 y の値を 3 に変更してみよう。相関係数の値は 1.00 だね。

太郎：3 行目の変量 y の値が 4 のときも 5 のときも，相関係数値は 1.00 だ。

花子：相関係数の値が 1.00 になるのはどんな特徴があるときかな。

太郎：値の組の個数を多くすると何かわかるかもしれないよ。

花子：じゃあ，次に値の組の個数を 3 としてみよう。

太郎：$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 3)$ とすると相関係数の値は 1.00 だ。

花子：$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(3,\ 1)$ とすると相関係数の値は 0.00 になった。

太郎：$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，$(2,\ 2)$ とすると相関係数の値は 1.00 だね。

花子：まったく同じ値の組が含まれていても相関係数の値は計算できることがあるんだね。

太郎：思い切って，値の組の個数を 100 にして，1 個だけ $(x,\ y)=(1,\ 1)$ で，99 個は $(x,\ y)=(2,\ 2)$ としてみるね……。相関係数の値は 1.00 になったよ。

花子：値の組の個数が多くても，相関係数の値が 1.00 になるときもあるね。

(3)　相関係数の値についての記述として**誤っているもの**を，次の ⓪～④のうちから 1 つ選べ。 $\boxed{\text{オ}}$

⓪　値の組の個数が 2 のときには相関係数の値が 0.00 になることはない。

①　値の組の個数が 3 のときには相関係数の値が -1.00 になることがある。

②　値の組の個数が 4 のときには相関係数の値が 1.00 になることはない。

③　値の組の個数が 50 であり，1 個の値の組が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，残りの 49 個の値の組が $(x,\ y)=(2,\ 0)$ のときには相関係数の値は -1.00 である。

④　値の組の個数が 100 であり，50 個の値の組が $(x,\ y)=(1,\ 1)$，残りの 50 個の値の組が $(x,\ y)=(2,\ 2)$ のときには相関係数の値は 1.00 である。

花子：値の組の個数が 2 のときは，相関係数の値は 1.00 か $\boxed{\text{ウ}}$，または計算できない場合の 3 通りしかないね。

太郎：値の組を散布図に表したとき，相関係数の値はあくまで散布図の点が $\boxed{\text{カ}}$ 程度を表していて，値の組の個数が 2 の場合に，花子さんが言った 3 通りに限られるのは $\boxed{\text{キ}}$ からだね。値の組の個数が多くても値の組が 2 種類のときはそれらにしかならないんだね。

花子：なるほどね。相関係数は，そもそも値の組の個数が多いときに使われるものだから，組の個数が極端に少ないときなどにはあまり意味がないのかもしれないね。

太郎：値の組の個数が少ないときはもちろんのことだけど，基本的に散布図と相関係数を合わせてデータの特徴を考えるとよさそうだね。

(4) $\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ に当てはまる最も適当なものを，次の各解答群のうちから 1 つずつ選べ。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ x 軸に関して対称に分布する

① 変量 x, y のそれぞれの中央値を表す点の近くに分布する

② 変量 x, y のそれぞれの平均値を表す点の近くに分布する

③ 円周に沿って分布する

④ 直線に沿って分布する

$\boxed{\text{キ}}$ の解答群

⓪ 変量 x の中央値と平均値が一致する

① 変量 x の四分位数を考えることができない

② 変量 x, y のそれぞれの平均値を表す点からの距離が等しい

③ 平面上の異なる 2 点は必ずある直線上にある

④ 平面上の異なる 2 点を通る円はただ 1 つに決まらない　[pre2018]

解答例

(1) x の平均値を $\overline{x}$，標準偏差を s_x とおくと，$\overline{x} = \dfrac{1}{2}(1+2) = 1.5$

$$s_x{}^2 = \frac{1}{2}\{(1-1.5)^2 + (2-1.5)^2\} = 0.25,\quad s_x = \sqrt{0.25} = 0.5$$

同様にして，$\overline{y} = 1.5$，$s_y = 0.5$ となり，x と y の共分散 s_{xy} は，

$$s_{xy}=\frac{1}{2}\{(1-1.5)(2-1.5)+(2-1.5)(1-1.5)\}=-0.25$$

これより，相関係数 r は，$r=\dfrac{-0.25}{0.5\times0.5}=-1$ となる。

(2)　$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (2,\ 2)$ のとき，$\overline{y}=2$，$s_y=0$ となるため，r は計算できない。

(3)　値の組を散布図に表して考えると，次のように判断できる。

⓪　値の組の個数が 2 のとき，$s_x\neq0$ かつ $s_y\neq0$ であれば $r=1$ または $r=-1$ となるので，$r=0$ になることはない。

①　値の組 3 個が $(x,\ y)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$ のとき $r=-1$ となる。

②　値の組 4 個が $(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4)$ のとき $r=1$ となる。

③　値の組 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ が 1 個で $(x,\ y)=(2,\ 0)$ が 49 個のとき $r=-1$ となる。

④　値の組 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ が 50 個で $(x,\ y)=(2,\ 2)$ が 50 個のとき $r=1$ となる。

したがって，誤っているものは ②である。

(4)　相関係数 r の値 $(-1\leqq r\leqq1)$ は散布図の点が「直線に沿って分布する」程度を表す。

そのため，値の組の個数が 2 のときは，「平面上の異なる 2 点は必ずある直線上にある」ため，(3)の ⓪のように r の値は 1 または -1 または値なしのいずれかになる。

コメント

データの分析に関する問題で，ほとんどが定性的な内容です。ただ，(3)では設問の後の会話文に誘導が与えられているのは要注意です。