２０２４ 入試対策
過去問ライブラリー

新潟大学

理系数学 14か年

２０１０ － ２０２３

外林 康治　編著

電送数学舎

2024 入試対策
新 潟 大 学
理系数学 14 か年

ま え が き

本書には，2010 年度以降に出題された新潟大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。また，2021 年度以降の医系専用題（略称 m）も併せて収録しています。

過去問から入試傾向をつかみ，そして演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行いました。融合題の配置箇所は鍵となっている分野です。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

電子書籍の概略

1　本書のフォーマットは PDF です。閲覧には，「Adobe Acrobat Reader」などの PDF Viewer が必要になります。

2　問題と対応する解答例のページの間には，リンクが張られています。リンク元は，問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字です。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A=\{x \mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0\}$$
$$B=\{x \mid x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。　[2023]

2　座標平面の原点を O とし，2 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{3}{4}\right)$ をとり，単位円周上に点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\dfrac{\pi}{12}$，$\cos\dfrac{\pi}{12}$，$\sin\dfrac{5\pi}{12}$，$\cos\dfrac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\dfrac{5\pi}{12}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。　[2022]

3　式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。　[2017]

4　整式 $P(x)=x^4+x^3+x-1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　i を虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$ の値を求めよ。

(2)　方程式 $P(x)=0$ の実数解を求めよ。

(3)　$Q(x)$ を 3 次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),\ Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす $Q(x)$ を求めよ。　[2016]

5 整数 a に対して $P(x)=x^3-ax^2+ax-1$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの商を求めよ。

(2) 3 次方程式 $P(x)=0$ が虚数解をもつような整数 a の値をすべて求めよ。

(3) 3 次方程式 $P(x)=0$ のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。 [2015]

6 a を $a\geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta)=2\sin 2\theta+4a(\cos\theta-\sin\theta)+1$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $t=\cos\theta-\sin\theta$ とおく。このとき，$f(\theta)$ を a,t を用いて表せ。

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。 [2014]

■ 図形と式

1 式 A, B, C を次のように定める。

$$A=y^2-3x^2y+11xy+4y-3x^3+13x^2-5x-5$$
$$B=y^2+x^2y-5xy+4y+x^3-7x^2+11x-5,\quad C=y+x-1$$

次の問いに答えよ。

(1) 式 A, B, C を y の整式とみて，A, B を C で割ったときの商をそれぞれ求めよ。

(2) 不等式 $\log A>\log(-B)$ が表す領域を xy 平面上に図示せよ。 [2022]

2 座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る直線を l とする。また，中心 $(3,\ -2)$，半径 3 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C は共有点をもたないことを示せ。

(3) 点 P が円 C 上を動くとき，三角形 ABP の重心の軌跡を T とする。T はどのような図形になるか答えよ。

(4) (3)で求めた図形 T 上の点 $(x,\ y)$ に対して $\sqrt{x^2+y^2}$ の最大値と最小値を求めよ。

[2021]

3　座標平面上に点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(-1,\ 1)$，C$(-1,\ 0)$，P$(t,\ 0)$ がある。ただし，t は正の実数である。また，線分 OA 上の点および線分 BC 上の点を通る直線 $l : y = ax + b$ がある。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l が正方形 OABC の面積を二等分するとき，a を b を用いて表せ。

(2)　直線 l が正方形 OABC の面積を二等分し，さらに直角三角形 OAP の面積を二等分するとき，b を t を用いて表せ。

(3)　$t \to +0$ および $t \to \infty$ のときの(2)で求めた b の極限値をそれぞれ求めよ。　[2018]

4　正の実数 a, b に対して，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$ax + y \leqq 6,\ 0 \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y$$

次の問いに答えよ。

(1)　$a = \dfrac{3}{2}$，$b = 3$ であるとする。点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$5x + 2y$ の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

(2)　$a = 1$，$b = 9$ であるとする。点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$2x + y$ の最大値と，そのときの x, y の値を求めよ。

(3)　$ab = 9$ であり，点 P$(x,\ y)$ が領域 D 内を動くときの $2x + y$ の最大値が 16 であるとする。このとき，a, b の値を求めよ。　[2013]

■ 図形と計量

1　平行四辺形 ABCD において，辺 AB の長さを p，辺 BC の長さを q とし，$\theta = \angle$BAD とおく。ただし $p > q$ とする。平行四辺形 ABCD の内部の点 P と 4 本の直線 AB, BC, CD, DA との距離のうちで最小のものを r とする。点 P が平行四辺形 ABCD の内部を動くときの r の最大値を R とし，最大値 R を与える点 P の軌跡を L とする。次の問いに答えよ。

(1)　平行四辺形 ABCD 内に L を図示せよ。

(2)　半径 R の円の中心が L 上を動くとき，円およびその内部が通過する領域の面積を S とする。S を p, q および θ で表せ。

(3)　平行四辺形 ABCD の面積を T とする。(2)で求めた S に対して $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{S}{T}$ を求めよ。

[2019]

■ ベクトル

1　1辺の長さが2の正四面体ABCDにおいて，辺AB, BC, CD, DA, AC, BDの中点をそれぞれP, Q, R, S, T, Uとする。次の問いに答えよ。

(1)　線分PRの長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{SBR}$の値を求めよ。

(3)　四角形PTRUを底面，点Qを頂点とする四角錐の体積を求めよ。　[2023]

2　座標空間の2点$\mathrm{A}(1,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ -1,\ 5)$を直径の両端とする球面をSとする。次の問いに答えよ。

(1)　球面Sの中心Cの座標と，Sの方程式を求めよ。

(2)　点PがS上を動くとき，△ABPの面積の最大値を求めよ。

(3)　点$\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$が$\angle\mathrm{QCA}=\dfrac{\pi}{3}$かつ$y\geqq 0$を満たしながら$S$上を動く。点$\mathrm{R}(1+\sqrt{2},\ 0,\ 4)$に対して，内積$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CR}}$のとりうる値の範囲を求めよ。　[2023m]

3　座標空間の原点をOとし，3点$\mathrm{A}(2,\ 2,\ -2)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 2)$，$\mathrm{C}(-2,\ 2,\ 2)$をとる。線分ABを$3:1$に内分する点をD，線分ACを$3:1$に外分する点をEとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　2点D, Eの座標をそれぞれ求めよ。

(2)　点Fを直線DE上の点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$のなす角$\theta$が$\cos\theta=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$を満たすとき，点Fの座標を求めよ。　[2022]

4　正四面体OABCにおいて三角形ABCの重心をD，線分ABを$2:1$に内分する点をE，線分ACを$5:2$に外分する点をFとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$として，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2)　ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(3)　点Gは点Eを通り$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$に平行な直線上にある。点Hは点Fを通り$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$に平行な直線上にある。3点D, G, Hが一直線上にあるとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$および$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(4)　(3)で求めた$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$に対して，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2}$を求めよ。　[2021]

5 四面体 OABC の辺 OA を $y:(1-y)$ に内分する点を D, 辺 AB を $(1-x):x$ に内分する点を E, 辺 BC を $(1-y):y$ に内分する点を F とする。ただし, $x,\ y$ は $0<x<1$, $0<y<1$ を満たすものとする。3 点 D, E, F を通る平面と直線 OC の交点を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および $x,\ y$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\vec{c}$ を満たす t の値を x を用いて表せ。

(3) 辺の長さに関して, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$, $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ が成り立つとする。$\mathrm{OA}=h$, $\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=1:k$ として, 線分 EG の長さを最小にする x の値を k を用いて表せ。また, そのときの線分 EG の長さを h と k を用いて表せ。 [2020]

6 座標空間において, 1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG をなす 8 つの頂点 O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(1,\ 0,\ 0)$, B$(1,\ 1,\ 0)$, C$(0,\ 1,\ 0)$ および D$(0,\ 0,\ 1)$, E$(1,\ 0,\ 1)$, F$(1,\ 1,\ 1)$, G$(0,\ 1,\ 1)$ をとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。辺 DE 上に点 P$(s,\ 0,\ 1)$ $(0\leqq s\leqq 1)$, 辺 CB 上に点 Q$(t,\ 1,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ をとり, 3 点 O, P, Q を含む平面と直線 GF との交点を R とする。また四角形 OPRQ の面積を U とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ および $s,\ t$ で表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $s,\ t$ で表せ。また, U を $s,\ t$ で表せ。

(3) 点 R が辺 GF 上にあるとき, U の最大値, 最小値を求めよ。またそのときの $s,\ t$ の値を求めよ。 [2019]

7 $\mathrm{OA}=\sqrt{7}$, $\mathrm{OB}=\sqrt{5}$, $\mathrm{AB}=\sqrt{6}$ の△OAB の外接円の中心を C とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として, 次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(2) $\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3) 点 O を座標平面上の原点にとり, 点 A の座標を $(0,\ \sqrt{7})$ とする。このとき点 B, C の座標をそれぞれ求めよ。ただし, 点 B は第 1 象限にあるとする。 [2018]

8　座標空間内の次のような 4 点 A, B, C, D を考える。A の座標は$(\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{6})$，3 点 B, C, D は，それぞれ x 軸，y 軸，z 軸上にある。さらに，これらの 4 点は同一平面上にあり，四角形 ABCD は平行四辺形である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　3 点 B, C, D の座標を求めよ。

(2)　平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(3)　原点 O から平行四辺形 ABCD を含む平面に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を求めよ。　[2017]

9　△OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$ とする。t を $0<t<1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P，辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q，辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を t，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(4)　線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。　[2016]

10　△ABC の外心を O，重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad 4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ。

(2)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。　[2015]

11　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考える。辺 AB を $2:1$ に内分する点を P とし，線分 CP を $3:1$ に内分する点を Q とする。また，直線 OC 上の点 R を $\overrightarrow{\mathrm{QR}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RC}}$ の大きさの比 $|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|:|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|$ を求めよ。

(3)　△OQR の面積を求めよ。　[2014]

12　△OAB において，OA $=1$，OB $=$ AB $=2$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　∠AOB の二等分線上の点 P が AP $=$ BP を満たすとき，線分 AP の長さを求めよ。

[2011]

13　四面体 OABC において，OA $=$ OB $=$ OC $=3$，AB $=$ BC $=$ CA $=\sqrt{6}$ である。また，点 P は辺 AB を $x:1-x$ に内分し，点 Q は辺 OC を $y:1-y$ に内分する($0<x<1$，$0<y<1$)。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，x, y で表せ。

(3)　2 点 P, Q の間の距離 PQ の最小値と，そのときの x, y の値を求めよ。　[2010]

■ 整数と数列

1　m を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $70x+130y=m$ が整数解をもつときの m の最小値を m_0 とする。m_0 の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた m_0 に対して，方程式 $70x+130y=m_0$ の整数解をすべて求めよ。

(3)　次の条件を満たす m の最小値を求めよ。

　　方程式 $70x+130y=m$ は，x, y がともに正の整数である解をちょうど 3 組もつ。

[2020]

2　半径がそれぞれ $a,\ b$ の円を C_a，C_b とする。C_a 上に点 A，C_b 上に点 B をとる。はじめに 2 点 A，B を一致させ，C_b を C_a に外接させながら滑らないように回転させる。ここで，点 B が再び C_a 上に来るときを C_b の回転の 1 周期とする。次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，自然数 $m,\ n$ の最大公約数を $\gcd(m,\ n)$ で表せ。

(1)　$a,\ b$ を自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，$a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$a,\ b$ を正の有理数とし，$a=\dfrac{p}{q}$，$b=\dfrac{s}{t}$ とおく。ここで $p,\ q$ は互いに素な自然数とし，$s,\ t$ も互いに素な自然数とする。C_b 上の点 B が C_a 上の点 A に再び一致するとき，C_b は何周期回転しているか，$p,\ q,\ s,\ t$ を用いて表せ。

(3)　$a,\ b$ は互いに素な自然数とする。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ a$ に対して，C_b が k 周期回転したとき，点 B が一致する C_a 上の点を A_k とする。このとき $\{\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_a\}$ は C_a をちょうど a 等分することを示せ。　[2019]

3　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測して，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　不等式 $a_n>1-10^{-18}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし $\log_{10}2=0.3010$ とする。　[2017]

4　数列 $\{a_n\}$ を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどの項の値とも等しくないときは $a_n=a_{n-1}-1$ であり，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値が初項 a_1 から第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} までのどれかの項の値と等しいときは $a_n=a_{n-1}+6$ である。

次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の第 2015 項の値を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 201 項までの和を求めよ。　[2015]

5 実数 $a,\ b,\ c$ に対して, 3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。

(2) $f(2010)$, $f(2011)$, $f(2012)$ が整数であるならば, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は整数であることを示せ。 [2011]

6 次の条件(ア)～(ウ)を満たす数列 $\{p_n\}$ について考える。

(ア) $p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n \leqq \cdots$ である。

(イ) p_1, p_2, $\cdots$, p_n, $\cdots$ はどれも自然数である。

(ウ) p_1, p_2, $\cdots$, p_n, $\cdots$ の中にはすべての自然数 k が現れ, その個数は k 以上 $k+2$ 以下である。

条件(ア)～(ウ)を満たし, すべての自然数 k がちょうど k 個現れる数列

$$1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots,\ \overbrace{k,\ k,\ \cdots,\ k}^{k\text{個}},\ \cdots$$

を $\{a_n\}$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 項数 5 の数列で, 数列 $\{p_n\}$ の初めの 5 項となり得るものをすべて挙げよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 210 項 a_{210} の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{i=1}^{50} p_i$ のとり得る最小の値を求めよ。 [2010]

■ 確率

1 平面上に正五角形 ABCDE があり，頂点 A, B, C, D, E は時計回りに配置されている。点 P をまず頂点 A の位置に置き，この正五角形の辺にそって時計回りに頂点から頂点へ与えられた正の整数 n だけ動かす。たとえば，$n=2$ ならば点 P は頂点 C の位置にあり，$n=6$ ならば点 P は頂点 B の位置にある。次の問いに答えよ。

(1) さいころを 2 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率および点 P が頂点 B の位置にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 A の位置にある確率を求めよ。

(3) さいころを k 回投げて出た目の積で n を与えるとき，点 P が頂点 B の位置にある確率を b_k とする。b_{k+1} を b_k を用いて表せ。

(4) (3)で与えた b_k に対して，$f_k=6^k b_k$ とおく。数列 $\{f_k\}$ と $\{b_k\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。 [2021]

2 n を正の整数とする。3 種類の数字 1, 2, 3 を並べて，各位の数が 1, 2, 3 のいずれかである n 桁の整数をすべて作る。数字は重複して使ってもよいし，使わない数字があってもよい。次の問いに答えよ。

(1) 各位の数の合計が奇数になる整数の総数を x_n，各位の数の合計が偶数になる整数の総数を y_n とする。y_n+x_n，y_n-x_n および y_n の値を n を用いてそれぞれ表せ。

(2) 各位の数の合計が 4 の倍数になる整数の総数を z_n とするとき，z_n の値を n を用いて表せ。

(3) y_n，z_n は(1), (2)で求めたものとする。初項 c_1 は 0 でないとして，次の条件を満たす等比数列 $\{c_n\}$ の公比を求めよ。

数列 $\left\{ c_n\left(\dfrac{z_n}{y_n}-\dfrac{1}{2}\right)\right\}$ が 0 でない値に収束する。 [2020]

3　袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず，袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

(1)　袋 A から取り出された 3 個の玉が，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率，白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。

(3)　袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。　[2018]

4　3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3，5，10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1)　操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2)　操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3)　操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。　[2016]

5　箱の中に 1 から 9 までの異なる整数が 1 つずつ書かれたカードが 9 枚入っている。「箱からカードを 1 枚引き，カードに書かれた整数を記録して箱の中に戻す」という操作を 3 回繰り返す。記録された 3 つの整数の最小値を m，最大値を M とする。次の問いに答えよ。

(1)　$5<m$ となる確率および $M<5$ となる確率を求めよ。

(2)　$m \leqq 5 \leqq M$ となる確率を求めよ。

(3)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 9$ に対して，$m \leqq k \leqq M$ となる確率を $p(k)$ とする。$p(k)$ の最大値，最小値を求めよ。　[2012]

6 数直線上の動点 A がはじめ原点にある。動点 A は 1 秒ごとに数直線上を正の向きまたは負の向きにそれぞれ$\dfrac{1}{2}$の確率で指定された長さを移動するものとする。n 秒後に動点 A が原点に戻る確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_1，p_2 を求めよ。

(2) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 1 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。

(3) 動点 A が 1 秒ごとに正の向きに 3 または負の向きに 1 移動するとき，p_n を求めよ。 [2011]

7 座標平面上の 4 点を$\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$，$\mathrm{C}(2,\ 2)$，$\mathrm{D}(2,\ 1)$とする。点 A に駒をおき，1 個のさいころを投げて，出た目の数だけこれらの点の上を時計まわりに駒を進める試行を考える。たとえば，出た目が 5 のとき，駒は A→B→C→D→A→B と進み B に止まる。1 回目の試行で止まる点を P とし，駒を点 A に戻し，2 回目の試行で止まる点を Q とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，O は原点を表す。

(1) O, P, Q が同一直線上にある確率を求めよ。

(2) O, P, Q を通る 2 次関数$y=f(x)$のグラフがただ 1 通りに定まるとき, P, Q の位置およびその 2 次関数をすべて求めよ。

(3) (2)で 2 次関数がただ 1 通りに定まるとき，その 2 次関数の最大値をXとし，そうでないとき$X=0$とする。このとき，Xの期待値を求めよ。 [2010]

■ 論証

1 多項式$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$について，次の問いに答えよ。ただし，$n$は 2 以上の整数とする。

(1) $Q(t)=P(t+1)$ とおく。多項式$Q(t)$ の定数項，t の係数およびt^2 の係数は 0 であることを示せ。

(2) $P(x)$は$(x-1)^3$で割り切れるが，$(x-1)^4$ では割り切れないことを示せ。

(3) 方程式$P(x)=0$の整数解は 1 および-1のみであることを示せ。 [2019]

2　次の問いに答えよ。

(1)　k, n は不等式 $k \leqq n$ を満たす自然数とする。このとき,

$$2^{k-1}n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1) \leqq n^k k!$$

が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 n に対して, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\dfrac{9}{19} < \log_{10} 3 < \dfrac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。　[2012]

■ 複素数

1　複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとし, $w = -\dfrac{2(2z-i)}{z+1}$ $(z \neq -1)$ とする。ただし, i は虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　$z = i$ のときの w の実部と虚部を求めよ。

(2)　z を w を用いて表せ。

(3)　点 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(4)　$|w|$ の最小値とそれを与える z を求めよ。　[2023]

2　複素数 z に対して, その共役複素数を $\overline{z}$ とし, i を虚数単位とする。次の問いに答えよ。

(1)　次の式を因数分解せよ。　$z\overline{z} + \overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + \alpha\overline{\alpha}$

ただし, α は複素数とする。

(2)　以下を満たす複素数 z が存在するような複素数 β の範囲を複素数平面上に図示せよ。

$$z\overline{z} + (1-i+\overline{\beta})z + (1+i+\beta)\overline{z} = \beta$$

(3)　$|\beta| \leqq 2$ とする。複素数 z が以下を満たすとき, $|z|$ の最大値を求めよ。また, そのときの β, z を求めよ。

$$z\overline{z} + (1-i+\overline{\beta})z + (1+i+\beta)\overline{z} = \beta$$

[2022]

3　複素数平面上の原点を中心とする単位円周上の 4 点 z_1，z_2，z_3，z_4 は

$$\arg\frac{z_2}{z_1}=\theta_1>0,\ \arg\frac{z_3}{z_2}=\theta_2>0,\ \arg\frac{z_4}{z_3}=\theta_3>0,\ \theta_1+\theta_2+\theta_3<2\pi$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$|z_2-z_1|$ を θ_1 を用いて表せ。

(2)　$|z_3-z_1|$，$|z_4-z_1|$ を θ_1，θ_2，θ_3 を用いて表せ。

(3)　$\dfrac{|z_4-z_1||z_2-z_1|+|z_3-z_2||z_4-z_3|}{|z_2-z_1||z_3-z_2|+|z_4-z_3||z_4-z_1|}=\dfrac{|z_3-z_1|}{|z_4-z_2|}$ を示せ。　[2021]

4　複素数を極形式で表したときの偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲にとる。3 以上の整数 n に対して，方程式 $z^n=i$ の解を極形式で表したとき，偏角の小さい順に α_0，α_1，$\cdots$，α_{n-1} とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，α_k を極形式で表せ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$\alpha_k=\alpha_0\beta_k$，$(\beta_k)^n=1$ を同時に満たす複素数 β_k が存在することを証明せよ。

(3)　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$\gamma_k=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k$ とする。また，γ_k を表す複素数平面上の点を P_k とする。このとき，P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_{n-1} を頂点とする多角形は正 n 角形であることを証明せよ。

(4)　$n=6$ とし，(3)で求めた正六角形の頂点 P_0，P_1，P_2，$\cdots$，P_5 を通る円の中心が表す複素数を求めよ。ただし，求めた答えの複素数には極形式を使わないこと。

[2020]

■ 曲線

1　t は $t>\dfrac{1}{2}$ を満たす実数とする。座標平面上に楕円 $x^2+4y^2=1$ が与えられている。点 $\mathrm{P}(-1,\ -t)$ からこの楕円に引いた接線のうちで y 軸と平行でない接線を l，その接点を $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とする。また，x 軸，y 軸および接線 l で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{Q}(a,\ b)$ における接線 l の方程式は，$ax+4by=1$ であることを示せ。

(2)　a, b を，それぞれ t を用いて表せ。

(3)　面積 $S(t)$ を，t を用いて表せ。

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{t}$ を求めよ。　[2017]

■ 極限

1 数列$\{a_n\}$を次のように定める。関数$f(x)=x^2$とし，$a_1=10$とする。曲線$y=f(x)$の点$(a_n,\ f(a_n))$における法線と曲線$y=f(x)$との2つの交点を$(a_n,\ f(a_n))$，$(-a_{n+1},\ f(-a_{n+1}))$とする。次の問いに答えよ。

(1) a_{n+1}をa_nを用いて表せ。

(2) すべての$n\geqq 1$に対して，$\left|a_n-\sqrt{n+99}\right|\leqq 1$が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$を求めよ。　[2022m]

2 $a\geqq 0$とし, nを正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$のとき，$\displaystyle\frac{x}{1+a}\left(1-\frac{x}{2(1+a)}\right)<\log\frac{1+a+x}{1+a}<\frac{x}{1+a}$を示せ。

(2) $\displaystyle I_n(a)=\left(1+\frac{1}{n^2(1+a)}\right)\left(1+\frac{2}{n^2(1+a)}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2(1+a)}\right)$とおく。
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log I_n(a)$を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{}_{3n^2+n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n^2+n}\mathrm{C}_n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$を求めよ。　[2021m]

3 nを0以上の整数とし, 次の式でI_nを定める。

$$I_0=\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx,\quad I_n=\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}\,dx\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1およびI_2の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}}$の値を$n$を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^n}=\infty$および$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{2^{2n}}=0$が成り立つことを証明せよ。　[2020]

4 一般項が$\displaystyle a_n=\frac{n!}{n^n}$で表される数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$を求めよ。

(3) 2以上の整数kに対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$を$k$を用いて表せ。　[2016]

■ 微分法

1　a, b を正の数とし，座標平面上の曲線 $C_1 : y = e^{ax}$， $C_2 : y = \sqrt{2x-b}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y = e^{ax}$ と関数 $y = \sqrt{2x-b}$ の導関数を求めよ。

(2)　曲線 C_1 と曲線 C_2 が 1 点 P を共有し，その点において共通の接線をもつとする。このとき，b と点 P の座標を a を用いて表せ。

(3)　(2)において，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形の面積を a を用いて表せ。　[2023]

2　a は $-2 < a < 2$ を満たす定数とし，関数 $f(x)$ を，$f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + a\sin x\cos x}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t = \sin x + \cos x$ とおいて，$f(x)$ を t と a を用いて表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

(3)　$a = -1$ と $a = 1$ の場合に，$u = \sin x - \cos x$ とおいて，置換積分法により定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ。　[2019]

3　a を $0 < a < 1$ を満たす実数として x の関数 $f(x) = ax - \log(1 + e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　a の関数 $y = M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3)　a の関数 $y = M(a)$ のグラフをかけ。　[2016]

4　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える。点 P は，点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　△CPQ の面積 S を，x を用いて表せ。

(2)　面積 S の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　線分 AQ の長さ L の最小値と，そのときの x の値を求めよ。　[2013]

5 平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ はそれぞれの大きさが 1 であり, また平行でないとする。次の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して, 不等式 $0 < |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \leqq (1+t)^2$ が成立することを示せ。

(2) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p} = \dfrac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}$ とおき, $f(t) = |\vec{p}|$ とする。このとき, 不等式 $f(t) \geqq \dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$ が成立することを示せ。

(3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。 [2013]

6 a を実数とし, xy 平面上において, 2 つの放物線

$$C : y = x^2,\ \ D : x = y^2 + a$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) p, q を実数として, 直線 $l : y = px + q$ が C に接するとき, q を p で表せ。

(2) (1)において, 直線 l がさらに D にも接するとき, a を p で表せ。

(3) C と D の両方に接する直線の本数を, a の値によって場合分けして求めよ。

[2012]

■ 積分法

1 実数 a と b に対して, 関数 $f(x)$ を $f(x) = ax^2 + bx + \cos x + 2\cos\dfrac{x}{2}$ と定める。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,dx$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2\sin x\,dx$ の値を求めよ。

(3) $f(x)$ が $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = 4+\pi$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{4}{3}(4+\pi)$ を満たすとき, a と b の値を求めよ。

(4) (3)で求めた a と b で定まる $f(x)$ に対して, $f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。 [2021]

2　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{1}{x^2-x+1}-\sum_{k=0}^{n}(-x)^{3k}(1+x)$$

と定める。ただし，$(-x)^{3k}$ は $k=0$ のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f_n(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{x^{3n+3}}{x^2-x+1}$ を示せ。

(2)　$\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\right|\leqq\dfrac{4}{3(3n+4)}$ を示せ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)$ の和を求めよ。　[2018]

3　自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ \ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)dt\quad（n\text{ が偶数のとき}）$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)dt\quad（n\text{ が 3 以上の奇数のとき}）$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。　[2015]

4　自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，不等式 $\left|\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx-a_n\right|\leqq\dfrac{1}{2n+3}$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ となることを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ を求めよ。　[2014]

5　微分可能な関数 $f(x)$ が，すべての実数 x, y に対して

$$f(x)f(y)-f(x+y)=\sin x\sin y$$

を満たし，さらに $f'(0)=0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{f(x)}$ を求めよ。　[2013]

6　次の問いに答えよ。

(1)　実数 $x\geqq 0$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x-\frac{1}{2}x^2\leqq\log(1+x)\leqq x$$

(2)　数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=n^2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}}\log(1+x)dx$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(3)　数列 $\{b_n\}$ を，$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。　[2012]

7　関数 $f(t)=\begin{cases} t & (0\leqq t\leqq\pi) \\ 2\pi-t & (\pi<t\leqq 2\pi)\end{cases}$ に対して，次のように 2 つの関数 $g(x)$，$h(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ で定義する。

$$g(x)=\int_0^{2\pi}f(t)\cos(t+x)dt,\quad h(x)=\int_0^{2\pi}f(t)\sin(t+x)dt$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$，$h(x)$ を求めよ。

(2)　x が $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，関数 $y=g(x)+h(x)$ の最大値と最小値を求めよ。　[2011]

8　$F(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+e^{2t}}\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$\sqrt{1+e^{2t}}=u$ とおいて，$F(x)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{F(x)-e^x\}$ を求めよ。　[2010]

■ 積分の応用

1 a は $1 \leqq a \leqq 4$ を満たす定数とする。点 A を $(a,\ 0)$，点 B を $(a,\ a^2)$，点 C を $(-1,\ 1)$，点 D を $(-1,\ 0)$ とし，曲線 E を $y=x^2$ とする。線分 BC と曲線 E で囲まれる図形の面積を S とし，線分 AB，曲線 E，線分 CD，線分 DA で囲まれる図形の面積を T とする。次の問いに答えよ。

(1) S と T が等しくなるときの a の値を求めよ。

(2) S と T の差が最大となるときの a の値を求めよ。 [2023]

2 曲線 C を $y=x^2e^x$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) $\displaystyle\int xe^x dx$，$\displaystyle\int x^2e^x dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) 点 $(t,\ 0)$ を通る曲線 C の接線がちょうど 2 本存在するような t の値をすべて求めよ。

(4) (3)で求めた t のうち $-1<t<0$ を満たすものを T とする。点 $(T,\ 0)$ を通る 2 本の接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2022]

3 座標平面上の $x>0$ の領域において，2 つの曲線 $C_1 : y=\dfrac{\log x}{x}$ と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}$ を考える。ここで，k は正の実数である。曲線 C_1 と曲線 C_2 はただ 1 つの交点をもつので，その x 座標を a とする。a が $1<a<e$ の範囲にあるとき，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。また，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてもよい。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 曲線 C_1，曲線 C_2，直線 $x=1$ および直線 $x=e$ によって囲まれる図形の面積 S を k を用いて表せ。

(3) 面積 S の最小値とそのときの k の値を求めよ。 [2018]

4　$f(x)=xe^{1-x^2}$ とする。2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=x^k$ で囲まれた部分の面積を S_k とする。ただし，k は自然数とする。次の問いに答えよ。必要があれば，$\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値，グラフの凹凸と変曲点，および漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

(3)　S_k を，k を用いて表せ。

(4)　次の条件(＊)を満たす最小の自然数 n を求めよ。
　(＊)　すべての自然数 m に対して，$4S_{2n-1}>7S_{2m}$ が成り立つ。　[2017]

5　座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とし，$f(x)=(x-a)^2+b$ とする。点 $\mathrm{B}(0,\ -2)$ から放物線 $y=f(x)$ に引いた接線を l_1，l_2 とし，接点をそれぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$p<q$ である。放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l_1 の方程式と接点 P の座標，および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a，b を用いて表せ。

(2)　面積 S を b を用いて表せ。

(3)　点 A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。　[2015]

6　関数 $f(x)=(-4x^2+2)e^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　a を $a\geqq 0$ となる実数とし，$I(a)=\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ とする。このとき，定積分 $\int_0^a x^2e^{-x^2}\,dx$ を a，$I(a)$ を用いて表せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$，x 軸，y 軸および直線 $x=5$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

[2014]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

k を実数とする。全体集合を実数全体の集合とし，その部分集合 A, B を次のように定める。

$$A=\{x\mid x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0\}$$
$$B=\{x\mid x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0\}$$

次の問いに答えよ。

(1)　$k=-1$ のとき，集合 A，B，$A\cap B$，$A\cup B$ を，$\{a,\ b,\ c\}$ のように集合の要素を書き並べて表す方法により，それぞれ表せ。空集合になる場合は，空集合を表す記号で答えよ。

(2)　集合 B が集合 A の部分集合となるような k の値をすべて求めよ。そのような k の値が存在しない場合は，その理由を述べよ。

(3)　集合 $A\cup B$ の要素の個数を求めよ。 [2023]

解答例

(1)　まず，$x^3-x^2-(k^2+4k+4)x+k^2+4k+4=0$ に対して，

$$x^2(x-1)-(k^2+4k+4)(x-1)=0\,,\ (x-1)\{x^2-(k+2)^2\}=0$$
$$(x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0$$

また，$x^3-(k^2+3k+3)x^2+k^2x-k^4-3k^3-3k^2=0$ に対して，

$$x^2\{x-(k^2+3k+3)\}+k^2\{x-(k^2+3k+3)\}=0$$
$$(x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0$$

したがって，$A=\{x\mid (x-1)(x+k+2)(x-k-2)=0\}$………①

$B=\{x\mid (x^2+k^2)(x-k^2-3k-3)=0\}$………②

さて，$k=-1$ のとき，①から，$A=\{x\mid (x-1)^2(x+1)=0\}=\{-1,\ 1\}$

②から，$B=\{x\mid (x^2+1)(x-1)=0\}=\{1\}$ となり，

$A\cap B=\{1\}$，$A\cup B=\{-1,\ 1\}$

(2)　B の要素の個数について，②より $k=0$ のときは 2 個，$k\neq 0$ のときは 1 個である。

ここで，B が A の部分集合となるのは，

(i)　$k=0$ のとき　$A=\{-2,\ 1,\ 2\}$，$B=\{0,\ 3\}$ なので，$B\subset A$ でない。

(ii)　$k\neq 0$ のとき　$B=\{k^2+3k+3\}$ から，B が A の部分集合となる必要条件は，

①から，$k^2+3k+3=1$ または $k^2+3k+3=-k-2$ または $k^2+3k+3=k+2$

(ii-i)　$k^2+3k+3=1$ のとき　$(k+1)(k+2)=0$ から，$k=-1,\ -2$，

・$k=-1$ のとき　(1)より $B\subset A$ である。

・$k=-2$ のとき　$A=\{0,\ 1\}$，$B=\{1\}$ より，$B\subset A$ である。

(ii-ii)　$k^2+3k+3=-k-2$ のとき　$k^2+4k+5=0$ から，実数 k は存在しない。

(ii-iii)　$k^2+3k+3=k+2$ のとき　$(k+1)^2=0$ から $k=-1$ なので $B\subset A$ である。

(i)(ii)より，B が A の部分集合となるのは，$k=-1,\ -2$ のときである。

(3)　A の要素の個数について，①より，2 個となるのは，$1=-k-2\ (k=-3)$ のとき，$1=k+2\ (k=-1)$ のとき，$-k-2=k+2\ (k=-2)$ のときである。また，1 個だけとなるときはなく，$k\neq-3,\ -2,\ -1$ のときは 3 個である。

すると，$A\cup B$ の要素の個数を N とおくと，

(i)　$k=0$ のとき　(2)より $A\cup B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ なので $N=5$

(ii)　$k=-1$ のとき　(1)より $A\cup B=\{-1,\ 1\}$ なので $N=2$

(iii)　$k=-2$ のとき　(2)より $A\cup B=\{0,\ 1\}$ なので $N=2$

(iv)　$k=-3$ のとき　$A=\{-1,\ 1\}$，$B=\{3\}$ から $A\cup B=\{-1,\ 1,\ 3\}$ より $N=3$

(v)　$k\neq-3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき　$A=\{1,\ -k-2,\ k+2\}$，$B=\{k^2+3k+3\}$

$A\cup B=\{1,\ -k-2,\ k+2,\ k^2+3k+3\}$ より $N=4$

(i)～(v)より，$A\cup B$ の要素の個数は，

$k=-1,\ -2$ のとき 2 個，$k=-3$ のとき 3 個，$k=0$ のとき 5 個

$k\neq-3,\ -2,\ -1,\ 0$ のとき 4 個

コメント

集合を題材とした問題です。内容的には場合分けの方法が問われており，慎重な処理が要求されます。なお，冒頭の 2 つの 3 次方程式の因数分解については，係数に着目した方法を採っています。

問　題

座標平面の原点を O とし，2 点 $A\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$B\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$ をとり，単位円周上に点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{12}$，$\cos\frac{\pi}{12}$，$\sin\frac{5\pi}{12}$，$\cos\frac{5\pi}{12}$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 四角形 OAPB の面積 S を θ を用いて表せ。

(3) $\frac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{12}$ のとき，S の最大値と最小値を求めよ。　[2022]

解答例

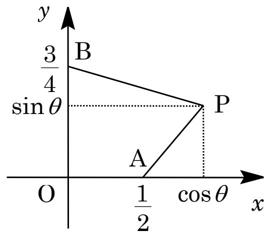
(1) $\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(2) 点 $A\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$，$B\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$，$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ に対して，四角形 OAPB の面積 S は，



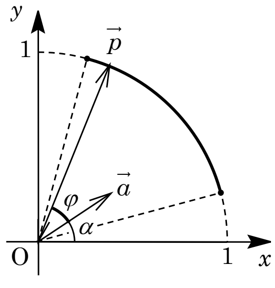
$$S=\triangle OAP+\triangle OBP=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta$$

$$=\frac{1}{4}\sin\theta+\frac{3}{8}\cos\theta\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $\vec{a}=\left(\frac{3}{8},\ \frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}(3,\ 2)$，$\vec{p}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ おくと，(*)から，

$$S=\frac{3}{8}\cos\theta+\frac{1}{4}\sin\theta=\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\varphi$$ （φ は $\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角）

すると，$|\vec{a}|$，$|\vec{p}|$ は一定なので，S が最大となるのは $\cos\varphi$ が最大すなわち φ が最小のとき，また S が最小となるのは $\cos\varphi$ が最小すなわち φ が最大のときに対応する。



ここで，$\vec{a}$ と x 軸の正の部分とのなす角を α とおくと，

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

そして，$\frac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{12}$ に注意すると，

(i) φ が最小となるとき　$\theta=\alpha$ より，S の最大値は，

$$S=\frac{3}{8}\cos\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{13}{8\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{8}$$

(ii)　φ が最大となるとき　$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$ より，S の最小値は，

$$S=\frac{3}{8}\cos\frac{5\pi}{12}+\frac{1}{4}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{3}{8}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{6}-\sqrt{2}}{32}$$

コメント

基本的な三角関数の図形への応用問題です。(3)は sin での合成という方法もありますが，不等式の処理が面倒なので，内積を利用した図形的な解法を採りました。

問　題

式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数は，$\dfrac{6!}{1!2!3!}=60$ である。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式の一般項は，

$$\frac{8!}{(8-p-q)!p!q!}x^p(xy)^q=\frac{8!}{(8-p-q)!p!q!}x^{p+q}y^q$$

このとき x^5y^3 の項の係数は，$p+q=5$ かつ $q=3$ から $(p,\ q)=(2,\ 3)$ となり，

$$\frac{8!}{(8-2-3)!2!3!}=\frac{8!}{3!2!3!}=560$$

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式の一般項は，

$$\frac{10!}{(10-p-q-r)!p!q!r!}x^p(xy)^q(xy^2)^r=\frac{10!}{(10-p-q-r)!p!q!r!}x^{p+q+r}y^{q+2r}$$

このとき x^8y^{13} の項について，$p+q+r=8$ かつ $q+2r=13$ から，

$$q=-2r+13,\quad p=8-(-2r+13)-r=r-5$$

ここで，p, q, r は 0 以上の整数で，$r-5\geqq 0$ かつ $-2r+13\geqq 0$ かつ $r\geqq 0$ から，

$$r=5,\ 6$$

よって，$(p,\ q,\ r)=(0,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 6)$ となり，x^8y^{13} の項の係数は，

$$\frac{10!}{(10-3-5)!0!3!5!}+\frac{10!}{(10-1-1-6)!1!1!6!}=\frac{10!}{2!3!5!}+\frac{10!}{2!6!}=5040$$

コメント

二項定理を拡張した多項定理を理解するための例題のような問題です。

問　題

整式$P(x)=x^4+x^3+x-1$について，次の問いに答えよ。

(1)　iを虚数単位とするとき，$P(i)$，$P(-i)$の値を求めよ。

(2)　方程式$P(x)=0$の実数解を求めよ。

(3)　$Q(x)$を3次以下の整式とする。次の条件

$$Q(1)=P(1),\ Q(-1)=P(-1),\ Q(2)=P(2),\ Q(-2)=P(-2)$$

をすべて満たす$Q(x)$を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$P(x)=x^4+x^3+x-1$に対して，

$$P(i)=1-i+i-1=0,\ P(-i)=1+i-i-1=0$$

(2)　(1)より，$P(x)$は$(x-i)$と$(x+i)$を因数にもつ，すなわち$(x-i)(x+i)=x^2+1$で割り切れ，

$$P(x)=(x^2+1)(x^2+x-1)$$

すると，$P(x)=0$の実数解は，$x^2+x-1=0$から$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$である。

(3)　3次以下の整式$Q(x)$に対して，$R(x)=P(x)-Q(x)$とおくと，$R(x)$は4次の整式で，しかも4次の係数が1である。

そして，条件から$R(1)=R(-1)=R(2)=R(-2)=0$なので，$R(x)$は$(x-1)$，$(x+1)$，$(x-2)$，$(x+2)$を因数にもつ。

これらのことをまとめると，

$$R(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=(x^2-1)(x^2-4)=x^4-5x^2+4$$

すると，$Q(x)=P(x)-R(x)$より，

$$Q(x)=(x^4+x^3+x-1)-(x^4-5x^2+4)=x^3+5x^2+x-5$$

コメント

因数定理を理解するための基本問題です。

問　題

整数aに対して$P(x)=x^3-ax^2+ax-1$とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(x)$を$x-1$で割ったときの商を求めよ。

(2)　3 次方程式$P(x)=0$が虚数解をもつような整数aの値をすべて求めよ。

(3)　3 次方程式$P(x)=0$のすべての解が整数となるような整数 a の値をすべて求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$P(x)=x^3-ax^2+ax-1$を$x-1$で割ると,

$$P(x)=(x-1)\{x^2-(a-1)x+1\}$$

これより，求める商は$x^2-(a-1)x+1$である。

(2)　3 次方程式$P(x)=0$が虚数解をもつ条件は，$x^2-(a-1)x+1=0$が虚数解をもつことより，判別式をDとして,

$$D=(a-1)^2-4<0,\ (a-1+2)(a-1-2)<0,\ (a+1)(a-3)<0$$

これより，$-1<a<3$となり，求める整数aの値は$a=0,\ 1,\ 2$である。

(3)　3 次方程式$P(x)=0$のすべての解が整数となる条件は，$x^2-(a-1)x+1=0$の 2 つの解が整数であることより，この解α，βを整数として,

$$\alpha+\beta=a-1\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha\beta=1\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$となり,

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 1)$のとき　①から，$a=(1+1)+1=3$

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ -1)$のとき　①から，$a=(-1-1)+1=-1$

(i)(ii)より，求める整数aの値は$a=-1,\ 3$である。

コメント

3 次方程式を題材にした基本事項の確認問題です。

問　題

a を $a \geqq 0$ となる実数とし，θ の関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos\theta - \sin\theta) + 1$$

とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $t = \cos\theta - \sin\theta$ とおく。このとき，$f(\theta)$ を a, t を用いて表せ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$f(\theta)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。 [2014]

解答例

(1) $f(\theta) = 2\sin 2\theta + 4a(\cos\theta - \sin\theta) + 1$ に対して，$t = \cos\theta - \sin\theta$ とおくと，

$$t^2 = 1 - 2\cos\theta\sin\theta = 1 - \sin 2\theta, \quad \sin 2\theta = 1 - t^2$$

すると，$f(\theta) = 2(1 - t^2) + 4at + 1 = -2t^2 + 4at + 3$ となる。

(2) $t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{3}{4}\pi\right)$ となり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $\frac{3}{4}\pi \leqq \theta + \frac{3}{4}\pi \leqq \frac{7}{4}\pi$ から，

$$\sqrt{2}\cdot(-1) \leqq t \leqq \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\sqrt{2} \leqq t \leqq 1$$

(3) $f(\theta) = g(t)$ とおくと，$g(t) = -2(t - a)^2 + 2a^2 + 3 \quad (-\sqrt{2} \leqq t \leqq 1)$

(i) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$g(t)$ の最大値は $2a^2 + 3$ ($t = a$ のとき)，最小値は $-4\sqrt{2}a - 1$ ($t = -\sqrt{2}$ のとき)

(ii) $a > 1$ のとき

$g(t)$ の最大値は $4a + 1$ ($t = 1$ のとき)，最小値は $-4\sqrt{2}a - 1$ ($t = -\sqrt{2}$ のとき)

(i)(ii)より，$f(\theta)$ の最大値は，$0 \leqq a \leqq 1$ のとき $2a^2 + 3$，$a > 1$ のとき $4a + 1$ である。

また，$f(\theta)$ の最小値は $-4\sqrt{2}a - 1$ である。

コメント

三角関数の最大と最小の問題です。基本的な内容で頻出するタイプです。