

1

解答解説のページへ

袋 A には赤玉 2 個と白玉 5 個，袋 B には赤玉 2 個が入っている。まず，袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し，玉の色は確認せず，そのまま袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から 2 個の玉を取り出す。次の問いに答えよ。

- (1) 袋 A から取り出された 3 個の玉が，赤玉 1 個と白玉 2 個である確率，白玉 3 個である確率をそれぞれ求めよ。
- (2) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉である確率を求めよ。
- (3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき，袋 B に白玉が残っている条件付き確率を求めよ。

**2**

解答解説のページへ

座標平面上に点  $O(0, 0)$ ,  $A(0, 1)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $C(-1, 0)$ ,  $P(t, 0)$  がある。ただし,  $t$  は正の実数である。また, 線分  $OA$  上の点および線分  $BC$  上の点を通る直線  $l: y = ax + b$  がある。次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $l$  が正方形  $OABC$  の面積を二等分するとき,  $a$  を  $b$  を用いて表せ。
- (2) 直線  $l$  が正方形  $OABC$  の面積を二等分し, さらに直角三角形  $OAP$  の面積を二等分するとき,  $b$  を  $t$  を用いて表せ。
- (3)  $t \rightarrow +0$  および  $t \rightarrow \infty$  のときの(2)で求めた  $b$  の極限值をそれぞれ求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上の  $x > 0$  の領域において、2 つの曲線  $C_1 : y = \frac{\log x}{x}$  と  $C_2 : y = \frac{k}{x}$  を考える。ここで、 $k$  は正の実数である。曲線  $C_1$  と曲線  $C_2$  はただ 1 つの交点をもつので、その  $x$  座標を  $a$  とする。 $a$  が  $1 < a < e$  の範囲にあるとき、次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底である。また、必要ならば  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$  を用いてもよい。

- (1)  $k$  の値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線  $C_1$ 、曲線  $C_2$ 、直線  $x = 1$  および直線  $x = e$  によって囲まれる図形の面積  $S$  を  $k$  を用いて表せ。
- (3) 面積  $S$  の最小値とそのときの  $k$  の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

自然数  $n$  に対して, 関数  $f_n(x)$  を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x)$$

と定める。ただし,  $(-x)^{3k}$  は  $k=0$  のとき 1 とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1}$  を示せ。
- (2)  $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)}$  を示せ。
- (3) 無限級数  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right)$  の和を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) 赤玉 2 個と白玉 5 個が入っている袋 A から 3 個の玉を同時に取り出したとき、赤玉 1 個と白玉 2 個である確率を  $p_2$ 、白玉 3 個である確率を  $p_3$  とすると、

$$p_2 = \frac{{}_2C_1 \times {}_5C_2}{{}_7C_3} = \frac{4}{7}, \quad p_3 = \frac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{2}{7}$$

- (2) 袋 A から 3 個の玉を同時に取り出し、赤玉が 2 個入っている袋 B に入れた後、袋 B から 2 個の玉を取り出したとき、それが 2 個とも白玉である確率を  $q$  とする。

このとき、袋 A から袋 B には、赤玉 1 個と白玉 2 個、または白玉 3 個を取り出して入れた場合しかないので、

$$q = p_2 \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} + p_3 \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{2}{35} + \frac{3}{35} = \frac{1}{7}$$

- (3) 袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であり、しかも袋 B に白玉が残っているのは、袋 A から白玉 3 個を取り出し袋 B に入れた場合なので、その確率は、

$$p_3 \times \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{35}$$

これより、袋 B から取り出された玉が 2 個とも白玉であったとき、袋 B に白玉が残っている条件付き確率は、(2)から、

$$\frac{3}{35} \div \frac{1}{7} = \frac{3}{5}$$

### [解説]

基本的な確率の問題です。ミスに注意するだけです。

2

問題のページへ

- (1) 正方形 OABC の辺 OA, BC と直線  $l: y = ax + b$  との交点をそれぞれ Q, R とおくと,  $Q(0, b)$ ,  $R(-1, -a + b)$  となる。

ここで,  $l$  が正方形 OABC の面積を二等分することより,

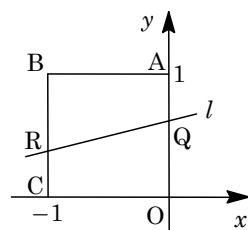
$$\frac{1}{2}(b - a + b) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2$$

すると,  $-a + 2b = 1$  より,  $a = 2b - 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$  となる。

ただし,  $0 \leq b \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$  かつ  $0 \leq -a + b \leq 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$  であり,  $\textcircled{1}\textcircled{3}$  をまとめると  $\textcircled{2}$

と一致することより, 求める条件は,  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  より,

$$a = 2b - 1 \quad (0 \leq b \leq 1) \cdots \cdots \textcircled{4}$$



- (2) 直線  $l$  が正方形 OABC および直角三角形 OAP の面積を二等分するとき,

- (i) 直角三角形 OAP と  $l$  が辺 OP 上で交わる場合

$a < 0$  から,  $\textcircled{4}$  より  $0 \leq b < \frac{1}{2}$  となり,  $OQ < \frac{1}{2}$  から条件に反する。

- (ii) 直角三角形 OAP と  $l$  が辺 AP 上で交わる場合

直線 AP の方程式は  $x + ty = t$  となり,  $l$  と連立して,

$$x + t(ax + b) = t, \quad (at + 1)x = t(1 - b)$$

$at + 1 = 0$  のときは不成立なので,  $x = \frac{t(1 - b)}{at + 1}$

すると, 辺 AP と  $l$  の交点を S とおくと,  $\textcircled{4}$  より,

$$\triangle AQS = \frac{1}{2}(1 - b) \cdot \frac{t(1 - b)}{at + 1} = \frac{t(1 - b)^2}{2(at + 1)} = \frac{t(1 - b)^2}{2\{(2b - 1)t + 1\}}$$

条件より,  $\frac{t(1 - b)^2}{2\{(2b - 1)t + 1\}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot t \right)$  から,  $2(1 - b)^2 = 2bt - t + 1$  となり,

$$2b^2 - 2(t + 2)b + t + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$f(b) = 2b^2 - 2(t + 2)b + t + 1$  とおくと,  $f(0) = t + 1 > 0$ ,  $f(1) = -t - 1 < 0$

すると,  $0 \leq b \leq 1$  を満たす  $\textcircled{5}$  の解は,

$$b = \frac{t + 2 - \sqrt{(t + 2)^2 - 2(t + 1)}}{2} = \frac{t + 2 - \sqrt{t^2 + 2t + 2}}{2}$$

- (3) (2) より,  $\lim_{t \rightarrow +0} b = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{t + 2 - \sqrt{t^2 + 2t + 2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(t + 2)^2 - (t^2 + 2t + 2)}{2(t + 2 + \sqrt{t^2 + 2t + 2})} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + 1}{t + 2 + \sqrt{t^2 + 2t + 2}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

### [解説]

$xy$  平面上の図形に極限を絡めた問題です。詰め部分がやや面倒です。

3

問題のページへ

(1)  $C_1 : y = \frac{\log x}{x} \dots\dots ①$ ,  $C_2 : y = \frac{k}{x} \dots\dots ②$ を連立すると,

$$\frac{\log x}{x} = \frac{k}{x}, \log x = k \dots\dots ③$$

③の解が  $1 < x < e$  に 1 つ存在する条件は, 右図より,

$$0 < k < 1$$

(2) ①より,  $y' = \frac{1 - \log x}{x^2}$

すると, ①の増減は右表のようになり,  $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$ ,

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$  に注意して曲線  $C_1$  の概形, および曲線  $C_2$  の

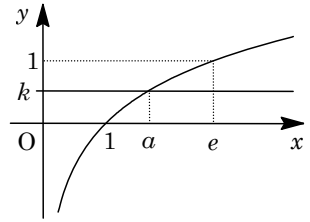
概形を描くと右図のようになる。

さらに, ③の解を  $x = a$  とおくと,  $\log a = k \dots\dots ④$

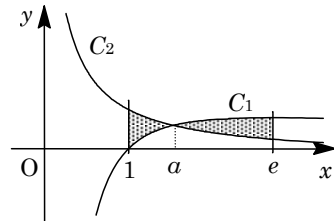
ここで,  $C_1$ ,  $C_2$ , 直線  $x = 1$ ,  $x = e$  によって囲まれる図形の面積  $S$  は, ④を用いると,

$$\begin{aligned} S &= \int_1^a \left( \frac{k}{x} - \frac{\log x}{x} \right) dx + \int_a^e \left( \frac{\log x}{x} - \frac{k}{x} \right) dx \\ &= \left[ k \log x - \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^a + \left[ \frac{1}{2} (\log x)^2 - k \log x \right]_a^e \\ &= k \log a - \frac{1}{2} (\log a)^2 + \left( \frac{1}{2} - k \right) - \frac{1}{2} (\log a)^2 + k \log a \\ &= 2k \log a - (\log a)^2 + \frac{1}{2} - k = 2k^2 - k^2 + \frac{1}{2} - k = k^2 - k + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) (2)より,  $S = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$  となり,  $S$  は  $k = \frac{1}{2}$  のとき最小値  $\frac{1}{4}$  をとる。



$x$	0	...	$e$	...
$y'$		+	0	-
$y$		↗	$\frac{1}{e}$	↘



[解説]

定積分と面積についての基本的な問題です。

4

問題のページへ

$$(1) f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - (1+x) \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} \dots\dots\dots ①$$

(i)  $(-x)^3 \neq 1 (x \neq -1)$  のとき

$$\sum_{k=0}^n (-x)^{3k} = \frac{1 - (-x)^{3(n+1)}}{1 - (-x)^3} = \frac{1 - (-1)^{3(n+1)} \cdot x^{3(n+1)}}{1 + x^3} = \frac{1 - (-1)^{n+1} \cdot x^{3n+3}}{(1+x)(1-x+x^2)}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1} - \frac{1 - (-1)^{n+1} \cdot x^{3n+3}}{1 - x + x^2} = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} \dots\dots\dots ②$$

(ii)  $(-x)^3 = 1 (x = -1)$  のとき

$$\sum_{k=0}^n (-x)^{3k} = n+1 \text{ となり, } f_n(-1) = \frac{1}{1+1+1} - (1-1)(n+1) = \frac{1}{3}$$

これは、②に  $x = -1$  をあてはめた値と一致する。

$$(i)(ii) \text{ より, } f_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} \dots\dots\dots ③$$

$$(2) ③ \text{ より } \left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| = \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} dx \right| = \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} dx \dots\dots\dots ④$$

ここで、 $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$  より、 $0 \leq x \leq 1$  において、

$$\frac{3}{4} \leq x^2 - x + 1 \leq 1, \quad 1 \leq \frac{1}{x^2 - x + 1} \leq \frac{4}{3}$$

$$\text{すると, } \int_0^1 \frac{x^{3n+3}}{x^2 - x + 1} dx \leq \int_0^1 \frac{4}{3} x^{3n+3} dx = \frac{4}{3} \left[ \frac{x^{3n+4}}{3n+4} \right]_0^1 = \frac{4}{3(3n+4)} \dots\dots\dots ⑤$$

$$④⑤ \text{ より, } \left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)} \dots\dots\dots ⑥$$

$$(3) ① \text{ より, } \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx - \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x) dx \dots\dots\dots ⑦$$

ここで、 $\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x) dx = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x)^{3k} (1+x) dx$  に注意して、 $I_k$  を

$$I_k = \int_0^1 (-x)^{3k} (1+x) dx \text{ とすると, } \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x) dx = \sum_{k=0}^n I_k \text{ となり,}$$

$$I_k = \int_0^1 (-1)^{3k} x^{3k} (1+x) dx = (-1)^k \int_0^1 (x^{3k} + x^{3k+1}) dx$$

$$= (-1)^k \left[ \frac{x^{3k+1}}{3k+1} + \frac{x^{3k+2}}{3k+2} \right]_0^1 = (-1)^k \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right) \dots\dots\dots ⑧$$

また、 $\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$  と変形し、 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  において、

$$x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \text{ とおくと, } dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 \theta) d\theta \text{ となり,}$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\frac{3}{4} \tan^2 \theta + \frac{3}{4}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \tan^2 \theta) d\theta = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{2}{9} \sqrt{3} \pi \dots\dots\dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

そこで, ⑦から,  $\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-x)^{3k} (1+x) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx - \int_0^1 f_n(x) dx$

$$\sum_{k=0}^n I_k = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx - \int_0^1 f_n(x) dx$$

⑧⑨を代入すると,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right) = \frac{2}{9} \sqrt{3} \pi - \int_0^1 f_n(x) dx \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

さらに, ⑥から,  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $\left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| \leq \frac{4}{3(3n+4)} \rightarrow 0$  となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f_n(x) dx \right| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0 \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

⑩⑪より,  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{3k+1} + \frac{1}{3k+2} \right) = \frac{2}{9} \sqrt{3} \pi$  である。

### [解 説]

定積分と無限級数の融合問題です。(3)は唐突な印象を与えますが,(1)と(2)での巧みな誘導のため,与えられた①を0から1まで積分するという方針に混乱はないでしょう。記述量は多めですが,内容は基本の組合せとなっています。