1

解答解説のページへ

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1)　$\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

2

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・ 1 回目は，出た目が得点になる。

・ 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・ 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数平面上の点 $z\left(z \neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1)　点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次の条件によって定める。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_5を求めよ。

(2)　a_{n+1}をa_nの式で表せ。

(3)　無限級数$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$が収束することを示し，その和を求めよ。

5

解答解説のページへ

曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

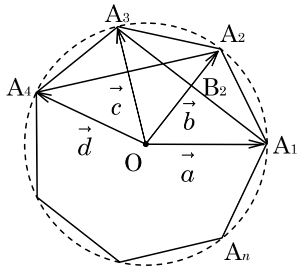
(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。

(4)　$S(t)$ が最大となるような t の値を α とすると，$\alpha > \log\dfrac{12}{5}$ であり，$S(\alpha) < \dfrac{95}{144}$ となることを示せ。必要ならば $\log\dfrac{24}{5} < 1.57$ を用いてもよい。

1

問題のページへ



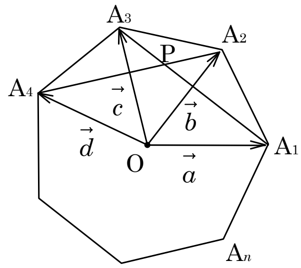
(1)　点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。



(2)　まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1\,,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0\,,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2\cdots\cdots\cdots③$

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

［解　説］

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

2

問題のページへ

(1)　題意の総得点 n が最大となるのは，3 回の出た目が 6，5，4 の場合で，最大値は $n=6+5+4=15$ である。このときの確率 p_{15} は，

$$p_{15}=3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

また，総得点 n が最小となるのは，3 回の出た目が 1，1，1 の場合で，最小値は $n=1+0+0=1$ である。このときの確率 p_1 は，

$$p_1=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(2)　総得点が 6 のとき，3 回の出た目について同じ目の出方で場合分けをする。

(i)　同じ目が出なかったとき

出た目が 1, 2, 3 の場合だけであり，このときの確率は $3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6}{216}$ である。

(ii)　同じ目が 2 回出たとき

出た目が 1, 1, 5 または 1, 5, 5 または 2, 2, 4 または 2, 4, 4 の場合であり，このときの確率は，

$$\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=4\cdot3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{12}{216}$$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が 6, 6, 6 の場合だけであり，このときの確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$ である。

(i)～(iii)より，総得点 6 の確率 p_6 は，$p_6=\frac{6}{216}+\frac{12}{216}+\frac{1}{216}=\frac{19}{216}$

(3)　題意の総得点 n の値の範囲は，(1)から $1\leqq n\leqq 15$ である。そして，(2)と同様に，同じ目の出方について，場合分けをする。

(i)　同じ目が出なかったとき

出た目が a，b，c $(a<b<c)$ のとき，n の値とその出方 N 通りの関係は，

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	$3!$	$3!$	$2\cdot3!$	$3\cdot3!$	$3\cdot3!$	$3\cdot3!$	$3\cdot3!$	$2\cdot3!$	$3!$	$3!$

(ii)　同じ目が 2 回出たとき

出た目が a，a，b か a，b，b $(a<b)$ のとき，n の値とその出方 N 通りの関係は，

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	$2\cdot3$	$2\cdot3$	$4\cdot3$	$4\cdot3$	$6\cdot3$	$4\cdot3$	$4\cdot3$	$2\cdot3$	$2\cdot3$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が a だけのとき，n の値とその出方 N 通りの関係は，

n	1	2	3	4	5	6
N	1	1	1	1	1	1

(i)～(iii)より，n の値とその出方 N 通りの関係をまとめると，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	1	1	7	7	13	19	24	24	30	24	24	18	12	6	6

以上より，$n=9$ のとき N の値が最大となるので，p_n の最大値は，

$$p_9 = 30\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{5}{36}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。理系単独の(3)は，1 組の出た目について，その確率がすべて $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ であることに着目して，出た目のパターンの数を全調査しました。時間はかなりかかりましたが。

3　問題のページへ

(1)　与えられた条件より，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}\left(z\neq-\dfrac{i}{2}\right)\cdots\cdots\cdots①$

さて，点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くことより，$|z|=1\cdots\cdots\cdots②$

①より，$w(2z+i)=z+2i$ となり $(2w-1)z=-i(w-2)$ であるが，$w=\dfrac{1}{2}$ のときは成立しないので，$w\neq\dfrac{1}{2}$ となり，

$$z=\frac{-i(w-2)}{2w-1}\left(w\neq\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{-i(w-2)}{2w-1}\right|=1$ から $\dfrac{|-i||w-2|}{|2w-1|}=1$ となり，

$$|w-2|=|2w-1|$$

両辺を 2 乗して $|w-2|^2=|2w-1|^2$ から，$(w-2)(\overline{w}-2)=(2w-1)(2\overline{w}-1)$

$$w\overline{w}-2w-2\overline{w}+4=4w\overline{w}-2w-2\overline{w}+1,\ w\overline{w}=1$$

よって，$|w|=1$ となるので，点 w は原点を中心とする半径 1 の円周を描く。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$|z-\alpha|=1\cdots\cdots\cdots④$

③を④に代入すると，$\left|\dfrac{-i(w-2)}{2w-1}-\alpha\right|=1$ から $\left|\dfrac{(-i-2\alpha)w+2i+\alpha}{2w-1}\right|=1$

$$|(-i-2\alpha)w+2i+\alpha|=|2w-1|,\ |(-i-2\alpha)w+2i+\alpha|^2=|2w-1|^2$$

$$\{(-i-2\alpha)w+2i+\alpha\}\{(i-2\overline{\alpha})\overline{w}-2i+\overline{\alpha}\}=(2w-1)(2\overline{w}-1)\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描くことより，$|w|=r$ から，

$$w\overline{w}=r^2\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥が一致することより，$(-i-2\alpha)(-2i+\overline{\alpha})=-2$，$(2i+\alpha)(i-2\overline{\alpha})=-2$ が必要となるが，この 2 式は等しく，

$$-2-i\overline{\alpha}+4i\alpha-2\alpha\overline{\alpha}=-2,\ 2\alpha\overline{\alpha}+(\overline{\alpha}-4\alpha)i=0\cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，p, q を実数として，$\alpha=p+qi$ とおくと，⑦より，

$$2(p^2+q^2)+(p-qi-4p-4qi)i=0,\ (2p^2+2q^2+5q)-3pi=0$$

よって，$2p^2+2q^2+5q=0$ かつ $p=0$ より，$(p,\ q)=(0,\ 0)$，$\left(0,\ -\dfrac{5}{2}\right)$ となり，

(i)　$\alpha=0$ のとき　(1)より⑤は $w\overline{w}=1$ となり，⑥から $r=1$ である。

(ii)　$\alpha=-\dfrac{5}{2}i$ のとき　$-i-2\alpha=4i$，$2i+\alpha=-\dfrac{1}{2}i$ となるので，⑤に代入する。

すると，$16w\overline{w}+\dfrac{1}{4}=4w\overline{w}+1$ から $w\overline{w}=\dfrac{1}{16}$ となり，⑥から $r=\dfrac{1}{4}$ である。

［解　説］

複素数平面上の円の変換の問題です。なお，(2)は(1)と同じ方法を採用しています。

4

問題のページへ

(1)　$a_1=2$ で，$b_n=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくと，$a_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}$ ……①となり，

$$b_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\ a_2=1+\frac{1}{b_1}=1+2=3$$

$$b_2=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6},\ a_3=1+\frac{1}{b_2}=1+6=7$$

$$b_3=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)=\frac{1}{42},\ a_4=1+\frac{1}{b_3}=1+42=43$$

$$b_4=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}\right)=\frac{1}{1806},\ a_5=1+\frac{1}{b_4}=1+1806=1807$$

(2)　①より，$a_{n+1}-1=\frac{1}{b_n}$ から $a_{n+1}\neq 1$ で，しかも $a_1\neq 1$ なので，$a_n\neq 1$ である。

これより，$b_n=\frac{1}{a_{n+1}-1}$ ……②となり，$n\geqq 2$ で $b_{n-1}=\frac{1}{a_n-1}$ ……③である。

すると，②－③から，$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1}$ となり，

$$-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}-1}-\frac{1}{a_n-1},\ \frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n(a_n-1)}$$

よって，$n\geqq 2$ で，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ ………④

$n=1$ のときは，$a_2-1=3-1=2$，$a_1(a_1-1)=2\cdot 1=2$ となり，このときも④は成立しているので，$n\geqq 1$ で，

$$a_{n+1}=a_n(a_n-1)+1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　⑤から，$a_{n+1}-a_n=a_n{}^2-2a_n+1=(a_n-1)^2>0$ となり，$a_n\geqq a_1=2$ なので，

$$a_{n+1}\geqq a_n(2-1)+1=a_n+1$$

すると，$a_n\geqq 2+(n-1)=n+1$ から，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となる。

さて，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-b_n$ なので，②から，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=1-\frac{1}{a_{n+1}-1}$ となり，

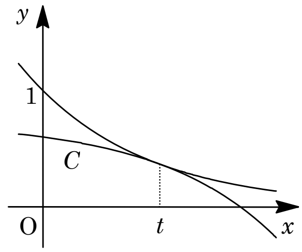
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}-1}\right)=1$$

［解　説］

漸化式と極限の問題です。与えられた漸化式は扱いにくそうですが，誘導に従えばそれほどではありません。

5

問題のページへ



(1)　曲線 $y=-e^x$ を x 軸方向に a, y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は,

$y=-e^{x-a}+b$ ………①

また, 曲線 C は曲線 $y=e^{-x}$ ……②と $x=t\ (t\geqq 0)$ で接するので, ①より $y'=-e^{x-a}$, ②より $y'=-e^{-x}$ から,

$-e^{t-a}=-e^{-t}$ ………③

$-e^{t-a}+b=e^{-t}$ ………④

③から, $t-a=-t$ より $a=2t$ となり, この式を④に代入すると, $-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので, ①に代入して,

$C: y=-e^{x-2t}+2e^{-t}$ ………⑤

(2)　C と x 軸との交点は, ⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から, $e^{x-2t}=2e^{-t}$

$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t$, $x=t+\log 2$

すると, C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})\,dx=\Big[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\Big]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3)　(2)より, $S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで, $f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと,

$f'(t)=1-e^{-t}$

これより, $t\geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると, $f(0)=-1+\log 2<0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ から, $f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ1つ存在する。

この α を用いて $t\geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると, 右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより, $S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。すなわち, $S(t)$ が最大となるような t の値はただ1つ存在する。

(4)　まず, $e^{-\log\frac{12}{5}}=e^{\log\frac{5}{12}}=\dfrac{5}{12}$ に注意すると,

$$f\Big(\log\frac{12}{5}\Big)=\log\frac{12}{5}-2+\log 2+\frac{5}{12}=\log\frac{24}{5}-\frac{19}{12}$$

ここで, $\log\dfrac{24}{5}<1.57$ から, $f\Big(\log\dfrac{12}{5}\Big)<1.57-1.58=-0.01<0$

よって, (3)の増減表から, $\alpha>\log\dfrac{12}{5}$ ……⑥である。

また，$f(\alpha)=\alpha-2+\log 2+e^{-\alpha}=0$ から，$\alpha=2-\log 2-e^{-\alpha}$ となり，

$$S(\alpha)=2(\alpha-1+\log 2)e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}=2(1-e^{-\alpha})e^{-\alpha}+e^{-2\alpha}=-e^{-2\alpha}+2e^{-\alpha}$$
$$=-(e^{-\alpha}-1)^2+1$$

ここで，⑥から $e^{\alpha}>e^{\log\frac{12}{5}}=\dfrac{12}{5}$ となり，$0<e^{-\alpha}<\dfrac{5}{12}$ なので，

$$S(\alpha)<-\left(\frac{5}{12}-1\right)^2+1=\frac{95}{144}$$

［解　説］

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので，混乱しないように注意が必要です。また，(4)の後半の不等式の証明については，不等号の向きに注目し，平方完成の手法を利用しています。