1

解答解説のページへ

$n \geqq 4$ とする。$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 からなる数列 a_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　このような数列 $\{a_k\}$ は何通りあるか求めよ。

(2)　数列 $\{a_k\}$ の初項から第 k 項までの積を $b_k = a_1 a_2 \cdots a_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とおく。$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ がとり得る値の最大値および最小値を求めよ。

(3)　$b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ の最大値および最小値を与える数列 $\{a_k\}$ はそれぞれ何通りあるか求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 c に対して，行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を T とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) xy 平面上の同一直線上にない 3 点 P，Q，R が T によってそれぞれ P$'$，Q$'$，R$'$ に移るとする。三角形 P$'$Q$'$R$'$ の面積が三角形 PQR の面積の k 倍 $(k\geqq 1)$ となる c の値を求めよ。

(2) 楕円 $E:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上の点が T によって楕円 E' 上の点に移るとする。楕円 E' 上のすべての点が楕円 E の周上または外部にあるための，c の条件を求めよ。

3

解答解説のページへ

正の定数 a に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-ax\cos t\right|dt$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

1 辺の長さが$\sqrt{2}$の正四面体 OABC において, 辺 AB の中点を M, 辺 BC を$1:2$に内分する点を N, 辺 OC の中点を L とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) 3 点 L, M, N を通る平面と直線 OA の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。

(2) 辺 OB の中点 K から直線 DN 上の点 P へ垂線 KP を引く。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1)　a_1，a_2，$\cdots$，a_n が，$(n-4)$ 個の 1 と 4 個の -1 で構成される数列 a_k に対して，数列 $\{a_k\}$ 全体は，

$$ {}_n\mathrm{C}_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)\ \text{（通り）} $$

(2) $b_k = a_1a_2\cdots a_k$ より，a_1，a_2，$\cdots$，a_k の中に -1 が 1 個または 3 個あると $b_k=-1$，それ以外は $b_k=1$ である。

すなわち，$1 \leqq p < q < r < s \leqq n$ として，$a_p = a_q = a_r = a_s = -1$ とすると，

$$ b_p = b_r = -1,\ b_q = b_s = 1 $$

さて，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=-1$ となる k が 2 個，$b_k=1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $q=p+1$，$s=r+1$ の場合より，その値は，

$$ b_1+b_2+\cdots+b_n = (-1)\cdot 2 + 1\cdot(n-2) = n-4 $$

また，$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値をとるのは，$b_k=1$ となる k が 2 個，$b_k=-1$ となる k が $(n-2)$ 個，すなわち $p=1$，$r=q+1$，$s=n$ の場合より，その値は，

$$ b_1+b_2+\cdots+b_n = 1\cdot 2 + (-1)\cdot(n-2) = -n+4 $$

(3)　$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最大値 $n-4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 2 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)\ \text{（通り）} $$

$b_1+b_2+\cdots+b_n$ が最小値 $-n+4$ をとるのは，$(n-4)$ 個の 1 と連続した 2 個の -1 を 1 組並べると考えて，このとき数列 $\{a_k\}$ は，

$$ {}_{n-3}\mathrm{C}_1 = n-3\ \text{（通り）} $$

［解　説］

場合の数と数列の融合問題です。題意を把握する力，さらに考えた過程を記述する力が要求されています。おもしろい問題です。

2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{R}(x_3,\ y_3)$，$\mathrm{P}'(x_1',\ y_1')$，$\mathrm{Q}'(x_2',\ y_2')$，$\mathrm{R}'(x_3',\ y_3')$とおくと，条件より，

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_2' \\ y_2' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_3' \\ y_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{pmatrix} x_2'-x_1' \\ y_2'-y_1' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$………①，$\begin{pmatrix} x_3'-x_1' \\ y_3'-y_1' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \end{pmatrix}$………②

①②をまとめて，$\begin{pmatrix} x_2'-x_1' & x_3'-x_1' \\ y_2'-y_1' & y_3'-y_1' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}$………③

ここで，③の両辺に行列式をとると，$\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = 1+c^2$から，

$$\det\begin{pmatrix} x_2'-x_1' & x_3'-x_1' \\ y_2'-y_1' & y_3'-y_1' \end{pmatrix} = (1+c^2)\cdot\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}$$

$\triangle\mathrm{P}'\mathrm{Q}'\mathrm{R}' = \dfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2'-x_1' & x_3'-x_1' \\ y_2'-y_1' & y_3'-y_1' \end{pmatrix}\right|$，$\triangle\mathrm{PQR} = \dfrac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{pmatrix}\right|$より，

$$\triangle\mathrm{P}'\mathrm{Q}'\mathrm{R}' = (1+c^2)\triangle\mathrm{PQR}$$

すると，条件より$1+c^2 = k$なので，$c = \pm\sqrt{k-1}$

(2)　楕円$E : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$上の点を$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$とおくと，

$$A\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta - c\sin\theta \\ 2c\cos\theta + \sin\theta \end{pmatrix}$$

条件より，$\dfrac{(2\cos\theta - c\sin\theta)^2}{4} + (2c\cos\theta + \sin\theta)^2 \geqq 1$となり，

$$(16c^2+4)\cos^2\theta + 12c\sin\theta\cos\theta + (c^2+4)\sin^2\theta - 4 \geqq 0$$

$$(16c^2+4)\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 12c\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} + (c^2+4)\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 4 \geqq 0$$

まとめると，$12c\sin 2\theta + 15c^2\cos 2\theta + 17c^2 \geqq 0$ ………④

(i)　$c = 0$のとき　④は任意のθで成立する。

(ii)　$c > 0$のとき　④より，$12\sin 2\theta + 15c\cos 2\theta + 17c \geqq 0$となり，

$$\sqrt{144+225c^2}\sin(2\theta+\alpha) + 17c \geqq 0 \text{………⑤}$$

ただし，$\sin\alpha = \dfrac{15c}{\sqrt{144+225c^2}}$，$\cos\alpha = \dfrac{12}{\sqrt{144+225c^2}}$とする。

⑤が任意のθで成立する条件は，$-\sqrt{144+225c^2} + 17c \geqq 0$より，

$$\sqrt{144+225c^2} \leqq 17c,\ 144+225c^2 \leqq 289c^2,\ 64c^2 \geqq 144$$

よって，$c^2 \geqq \dfrac{9}{4}$となり，$c > 0$から$c \geqq \dfrac{3}{2}$である。

(iii)　$c < 0$のとき　④より，$12\sin 2\theta + 15c\cos 2\theta + 17c \leqq 0$となり，

$\sqrt{144+225c^2}\sin(2\theta+\alpha)+17c \leqq 0$ ………⑥

⑥が任意のθで成立する条件は，$\sqrt{144+225c^2}+17c \leqq 0$より，

$\sqrt{144+225c^2} \leqq -17c$，$144+225c^2 \leqq 289c^2$，$64c^2 \geqq 144$

よって，$c^2 \geqq \dfrac{9}{4}$となり，$c<0$から$c \leqq -\dfrac{3}{2}$である。

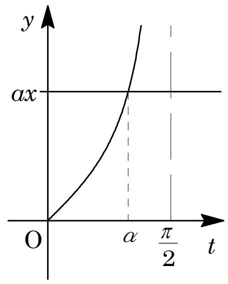
(i)～(iii)より，求める条件は，$c \leqq -\dfrac{3}{2}$，$c=0$，$c \geqq \dfrac{3}{2}$である。

［解 説］

行列Aで表される1次変換は，回転・拡大を表します。そのため，三角形は三角形，楕円は楕円に移されます。なお，(1)では，$\det(AB)=\det A \cdot \det B$という行列式に関する公式を利用しています。

3

問題のページへ



(1)　$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin t-ax\cos t\right|dt$ に対して，$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2}$ では，

$\sin t-ax\cos t=\cos t(\tan t-ax)$ と変形すると，$a>0$ より

$x>0$ のとき $\sin\alpha-ax\cos\alpha=0$ となる α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に 1 つ

存在する。なお，$t=\dfrac{\pi}{2}$ では，$\sin t-ax\cos t=1>0$ である。

(i)　$x>0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\alpha}-(\sin t-ax\cos t)dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-ax\cos t)dt$$

$$=\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_0^{\alpha}-\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\cos\alpha+ax\sin\alpha-1-ax+\cos\alpha+ax\sin\alpha$$

$$=2ax\sin\alpha+2\cos\alpha-ax-1$$

ここで，$\sin\alpha=ax\cos\alpha$ より，$(ax\cos\alpha)^2+\cos^2\alpha=1$ より，

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{a^2x^2+1}},\quad \sin\alpha=\frac{ax}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

よって，$f(x)=\dfrac{2a^2x^2}{\sqrt{a^2x^2+1}}+\dfrac{2}{\sqrt{a^2x^2+1}}-ax-1=2\sqrt{a^2x^2+1}-ax-1$

(ii)　$x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-ax\cos t)dt=-\Big[\cos t+ax\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-ax+1$$

(2)　$x\leqq 0$ のときは $f'(x)=-a<0$ から $f(x)$ は単調に減少し，$x>0$ のとき，

$$f'(x)=\frac{4a^2x}{2\sqrt{a^2x^2+1}}-a$$

$$=\frac{a\left(2ax-\sqrt{a^2x^2+1}\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}}$$

$$=\frac{a\left(3a^2x^2-1\right)}{\sqrt{a^2x^2+1}\left(2ax+\sqrt{a^2x^2+1}\right)}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘		↗

すると，$f(x)$ は増減が右上表のようになり，$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}a}$ で最小となる。最小値は，

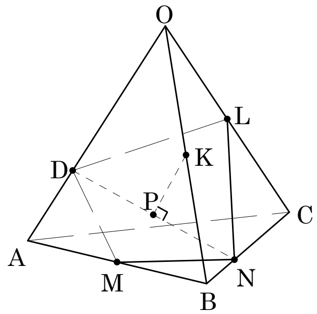
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}a}\right)=2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{3a^2}+1}-a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}a}-1=\frac{4}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\sqrt{3}-1$$

［解　説］

絶対値付きの関数を積分する標準的な問題ですが，計算力が必要です。

4

問題のページへ



(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおくと，点 D は直線OA上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{a}$………①

また，点Dは平面LMN上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=r\overrightarrow{\mathrm{OL}}+s\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$
$$=r\cdot\frac{\vec{c}}{2}+s\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$
$$=\frac{s}{2}\vec{a}+\left(\frac{s}{2}+\frac{2}{3}t\right)\vec{b}+\left(\frac{r}{2}+\frac{t}{3}\right)\vec{c}\text{………②}$$

ただし，$r+s+t=1$………③

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は1次独立なので，①②より，

$$k=\frac{s}{2}\text{………④},\ \frac{s}{2}+\frac{2}{3}t=0\text{………⑤},\ \frac{r}{2}+\frac{t}{3}=0\text{………⑥}$$

④より$s=2k$，⑤に代入して$t=-\frac{3}{4}s=-\frac{3}{2}k$，⑥に代入して$r=-\frac{2}{3}t=k$

すると，③から$2k-\frac{3}{2}k+k=1$となり，$k=\frac{2}{3}$より$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{3}\vec{a}$である。

(2) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=(\sqrt{2})^2\cos 60^\circ=1$………⑦

まず，点Pは直線DN上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+u\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\frac{2}{3}u\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{KP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{2}\vec{b}=\frac{2}{3}(1-u)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}u-\frac{1}{2}\right)\vec{b}+\frac{1}{3}u\vec{c}$$
$$=\frac{1}{6}\left\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\right\}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DN}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$となり，$\overrightarrow{\mathrm{KP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DN}}=0$から，

$$\left\{(4-4u)\vec{a}+(4u-3)\vec{b}+2u\vec{c}\right\}\cdot(-2\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=0$$

⑦より，$(4-4u)(-4+2+1)+(4u-3)(-2+4+1)+2u(-2+2+2)=0$

$$20u-13=0,\ u=\frac{13}{20}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{20}\vec{a}+\frac{2}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{b}+\frac{1}{3}\cdot\frac{13}{20}\vec{c}=\frac{7}{30}\vec{a}+\frac{13}{30}\vec{b}+\frac{13}{60}\vec{c}$

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用についての基本的な問題です。