

1

問題のページへ

$$(1) f(x) = \frac{x - e^{x-1}}{1 + e^x} \text{ より, } f'(x) = \frac{(1 - e^{x-1})(1 + e^x) - (x - e^{x-1})e^x}{(1 + e^x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{条件より, } g(x) &= (1 + e^x)^2 f'(x) = (1 - e^{x-1})(1 + e^x) - (x - e^{x-1})e^x \\ &= 1 - e^{x-1} - xe^x + e^x = 1 - \left(x - 1 + \frac{1}{e}\right)e^x \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{また, } t = -x \text{ とおくと, } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t)e^{-t} = -\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = 0 \text{ となるので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

$$(2) g'(x) = -e^x - \left(x - 1 + \frac{1}{e}\right)e^x = -\left(x + \frac{1}{e}\right)e^x$$

ここで, 右表より  $g\left(-\frac{1}{e}\right) > 1 > 0$  かつ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  なので,  $g(x) = 0$  はただ 1

つの実数解を  $x > -\frac{1}{e}$  においてもつ。

$x$	-	...	$-\frac{1}{e}$	...	
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$	1	↗		↘	-

この実数解を  $x = \alpha$  とすると, この値の前後で  $g(x)$  の符号は正から負へと変わる。

すると,  $f'(x)$  の符号も  $x = \alpha$  の前後で正から負へと変わる。

$x$	-	...	$\alpha$	...	
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

よって,  $f(x)$  は  $x = \alpha$  においてのみ極値をもち, しかもそれは極大値である。

### [ 解 説 ]

$f(x)$  の極値に関する問題ですが, (1)が(2)のていねいな誘導となっています。親切すぎるのではないかと思うほどですが。

2

問題のページへ

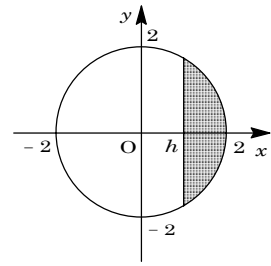
まず、 $x^2 + y^2 = 4$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) を  $x$  軸のまわりに回転して容器を作ると考える。

半球形の容器の体積は、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 2^3 = \frac{16}{3} \pi$  となるので、こぼれ出た水の量は、条件より  $\frac{11}{11+5} \cdot \frac{16}{3} \pi = \frac{11}{3} \pi$  となる。

$$\text{したがって、} \pi \int_0^h (4 - x^2) dx = \frac{11}{3} \pi$$

$$4h - \frac{h^3}{3} = \frac{11}{3}, \quad h^3 - 12h + 11 = 0, \quad (h-1)(h^2 + h - 11) = 0$$

$0 < h < 2$  より  $h = 1$  となり、このとき  $\sin \alpha^\circ = \frac{1}{2}$  なので、 $\alpha = 30$  である。



### [ 解 説 ]

超有名問題です。最近では 97 年に島根医大で同じ構図の問題が出題されています。

3

問題のページへ

まず,  $(e^{-t} \sin t)' = -e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t \dots\dots\dots$

$(e^{-t} \cos t)' = -e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t \dots\dots\dots$

+ より,  $e^{-t} \sin t = -\frac{1}{2} \left\{ e^{-t} (\sin t + \cos t) \right\}'$

- より,  $e^{-t} \cos t = \frac{1}{2} \left\{ e^{-t} (\sin t - \cos t) \right\}'$

$f(x) = \int_0^x e^{-t} \sin t dt = -\frac{1}{2} \left[ e^{-t} (\sin t + \cos t) \right]_0^x = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2}$

$g(x) = \int_0^x e^{-t} \cos t dt = \frac{1}{2} \left[ e^{-t} (\sin t - \cos t) \right]_0^x = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$

さて,  $f(x)$  が極大値をとるのは,  $f'(x)$  の符号が正から負に変わるときなので,  $f'(x) = e^{-x} \sin x$  より,  $x = (2k-1)\pi$  ( $k$  は自然数) においてである。

$f((2k-1)\pi) = -\frac{1}{2} e^{-(2k-1)\pi} (-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 + e^{-(2k-1)\pi})$

すると,  $k$  の値が増加するに従って  $f((2k-1)\pi)$  の値は減少するので, 極大値が最大となるのは,  $k=1$  すなわち  $x = \pi$  のときである。

$x$	0	...	$\pi$	...	$2\pi$	...	$3\pi$	...
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	0	↗		↘		↗		↘

したがって, 増減表より,  $f(x)$  の最大値は  $f(\pi) = \frac{1}{2} (1 + e^{-\pi})$  となる。

また,  $g(x)$  が極小値をとるのは,  $g'(x)$  の符号が負から正に変わるときなので,  $g'(x) = e^{-x} \cos x$  より,  $x = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi$  ( $k$  は自然数) においてである。

$g\left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \frac{1}{2} e^{-(2k-\frac{1}{2})\pi} (-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - e^{-(2k-\frac{1}{2})\pi})$

すると,  $k$  の値が増加するに従って  $g\left(\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$  の値も増加するので, 極小

$x$	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	$\frac{5}{2}\pi$	...	$\frac{7}{2}\pi$	...
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	0	↗		↘		↗		↘		↗

値が最小となるのは,  $k=1$  すなわち  $x = \frac{3}{2}\pi$  においてである。

ここで,  $g\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\frac{3}{2}\pi}) > g(0) = 0$  より,  $g(x)$  の最小値は  $g(0) = 0$  となる。

[ 解 説 ]

曲線  $y = e^{-t} \sin t$  と  $t$  軸ではさまれた面積について考えると, 結論はほぼ明らかです。これを明確に示すのが本問のねらいでしょう。

4

問題のページへ

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6+(-6) \\ 4+(-4) & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とすると, } \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2a = 1 \dots\dots, \quad 2b + 6d = 0 \dots\dots, \quad 4a + 3c = 0 \dots\dots, \quad 3d = 1 \dots\dots$$

$$\text{より } a = \frac{1}{2}, \quad \text{に代入して } c = -\frac{2}{3}$$

$$\text{より } d = \frac{1}{3}, \quad \text{に代入して } b = -1$$

$$\text{よって, } X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) P \# P_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \# \begin{pmatrix} a^n & k_n b \\ k_n c & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & k_n ab + bd^n \\ ca^n + k_n cd & d^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\text{ここで, } k_n ab + bd^n = (a^{n-1} + a^{n-2}d + \dots + ad^{n-2} + d^{n-1})ab + bd^n$$

$$= (a^n + a^{n-1}d + \dots + a^2d^{n-2} + ad^{n-1} + d^n)b = k_{n+1}b$$

$$ca^n + k_n cd = ca^n + (a^{n-1} + a^{n-2}d + \dots + ad^{n-2} + d^{n-1})cd$$

$$= (a^n + a^{n-1}d + a^{n-2}d^2 + \dots + ad^{n-1} + d^n)c = k_{n+1}c$$

以上より,  $P_{n+1} = P \# P_n$

$$(4) P_4 = E \text{ のとき, } \begin{pmatrix} a^4 & k_4 b \\ k_4 c & d^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a^4 = d^4 = 1 \dots\dots, \quad k_4 b = k_4 c = 0 \dots\dots$$

$$\text{より, } a^2 = d^2 = 1$$

(i)  $k_4 = 0$  のとき

$$k_4 = a^3 + a^2d + ad^2 + d^3 = 0 \quad (\text{このとき は満たされている})$$

$$a^2 = d^2 = 1 \text{ より } a + d + a + d = 0, \quad a + d = 0$$

$$\text{すなわち } k_2 = 0 \text{ となり, } k_2 b = k_2 c = 0$$

(ii)  $k_4 \neq 0$  のとき

$$\text{より } b = c = 0 \text{ となり, } k_2 b = k_2 c = 0$$

$$(i)(ii) \text{ のいずれの場合も, } P_2 = \begin{pmatrix} a^2 & k_2 b \\ k_2 c & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

## [ 解 説 ]

記号の意味どおりに演算を進めていけば, 完答できる問題です。

5

問題のページへ

(1)  $\overrightarrow{AQ} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $Q(2 + \cos \theta, \sin \theta)$  より,

直線 PQ の方程式は,  $\cos \theta(x - 2 - \cos \theta) + \sin \theta(y - \sin \theta) = 0$

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 2 \cos \theta + 1 \dots\dots\dots$$

直線 OP は PQ と垂直なので, その方程式は,  $-x \sin \theta + y \cos \theta = 0 \dots\dots\dots$

より,  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2 \cos \theta + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2 \cos \theta + 1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \cos \theta + 1) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

よって,  $x = (2 \cos \theta + 1) \cos \theta$ ,  $y = (2 \cos \theta + 1) \sin \theta$

(2)  $x = f(\theta)$ ,  $y = g(\theta)$  とおくと,  $f(-\theta) = f(\theta)$ ,  $g(-\theta) = -g(\theta)$  より, 点 P の軌跡は  $x$  軸対称となる。以下,  $\theta$  が  $0 \rightarrow \pi$  を動くときを考える。

さて,  $\frac{dx}{d\theta} = -2 \sin \theta \cos \theta + (2 \cos \theta + 1)(-\sin \theta)$   
 $= -\sin \theta(4 \cos \theta + 1)$

$\cos \theta = -\frac{1}{4}$  の解を  $\theta = \alpha$  ( $0 < \alpha < \pi$ ) とおくと,

$\theta$	0	...	$\alpha$	...	$\pi$
$\frac{dx}{d\theta}$	0	-	0	+	
$x$	3	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	1

$\theta = \alpha$  のとき点 P の  $x$  座標が最小になる。

このとき  $x = -\frac{1}{8}$ , また  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$  より,  $y = \frac{\sqrt{15}}{8}$  となる。

$x$  軸に関する対称性を考えて,  $x$  座標が最小の点 P の座標は,  $\left(-\frac{1}{8}, \pm \frac{\sqrt{15}}{8}\right)$

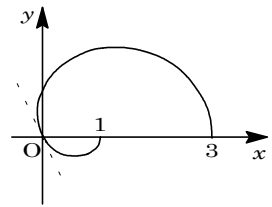
(3) 原点を極,  $x$  軸の正の部分を開始線とする極座標を設定すると, 点 P の軌跡は,

$$r = 2 \cos \theta + 1$$

$0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$  において  $r$  は単調減少し,  $0 < \theta < \frac{2}{3}\pi$  では

$r > 0$ ,  $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$  では  $r < 0$  となるので, 点 P の軌跡の概

形は右図のような曲線になる。



さらに, この曲線とこれを  $x$  軸対称した曲線とを合わせた曲線が,  $-\pi < \theta < \pi$  における点 P の軌跡である。

すると, 直線  $x = k$  が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるのは, (2)の結果を用いて,  $-\frac{1}{8} < k < 0$ ,  $0 < k < 1$  となる。

[ 解 説 ]

(3)でも, (2)と同じく  $y$  の増減を調べ, 点 P の軌跡の概形を調べようかとも思いました。しかし, それほどの設問でもないので, 極方程式で概形を考えました。