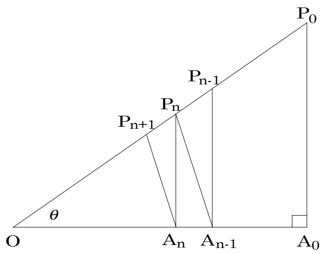
1

問題のページへ



(1) $S_1 = \triangle \mathrm{OA}_0\mathrm{P}_0 - \triangle \mathrm{OA}_0\mathrm{P}_1$

$$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\tan\theta - \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2(\tan\theta - \sin\theta)$$

(2) $\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n /\!/ \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}$，$\mathrm{A}_n\mathrm{P}_{n+1} /\!/ \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}_n$ より，

$$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1} \backsim \triangle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$$

その相似比は $\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n : \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}$，すなわち $\mathrm{OA}_n : \mathrm{OA}_{n-1}$ となる。

ここで，$\mathrm{OA}_n = \mathrm{OP}_n\cos\theta = \mathrm{OA}_{n-1}\cos\theta$ から，この相似比は $\cos\theta : 1$ となり，面積比は相似比の 2 乗より，

$$S_{n+1} = \cos^2\theta\cdot S_n$$

条件から，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので，$0 < \cos^2\theta < 1$

$$S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\cos^2\theta} = \frac{\frac{1}{2}a^2(\tan\theta - \sin\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

(3) $$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{2}a^2\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}a^2\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)} = \frac{1}{4}a^2$$

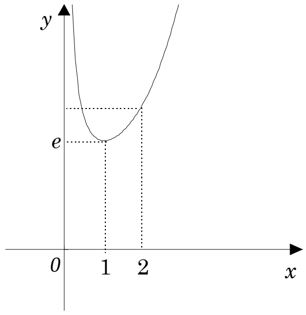
[解 説]

無限等比級数の図形への応用というよく見かける問題です。問題文に図が書いてありますので，相似比の 2 乗が面積比というのを用いることも気づきやすいのではないかと思われます。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$　$(x>0)$



$$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

x	0	……	1	……	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	e	↗	∞

$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2)　$f(1)=e$，$f(2)=\dfrac{e^2}{2}$ から，求める体積 V は,

$$V=\int_e^{\frac{e^2}{2}}\pi x^2dy=\int_1^2\pi x^2 f'(x)\,dx=\pi\int_1^2 x^2\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$$

$$=\pi\left\{\Big[(x-1)e^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx\right\}=\pi\left\{e^2-(e^2-e)\right\}=\pi e$$

[解 説]

y 軸回転体の体積を求める問題ですが, x が y の関数として単純な式では表せませんので, ここでは変数を y から x へと置換しました。これは必修技法の一つです。

3

問題のページへ

(1)　$g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$ とおくと，つねに $g(t)>0$ より，

$2x+1>x$　$(x>-1)$ のとき，$f(x)>0$

$2x+1<x$　$(x<-1)$ のとき，$f(x)<0$

よって，$f(x)=0$ となるのは，$2x+1=x$ のときだけである。

すなわち，$x=-1$

(2)　$f'(x)=g(2x+1)\cdot(2x+1)'-g(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$$=\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{-x(x+2)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$$

$f'(x)=0$ とすると，$x(x+2)=0$ から $x=0,\ -2$

(3)　(1)より，$f(x)$ の最大値は $x>-1$ に存在するので，$x>-1$ における $f(x)$ の値の増減を調べる。

x	-1	……	0	……	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	

最大値は $f(0)=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{t^2+1}dt$ となり，$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

[解　説]

逆三角関数は高校数学の範囲外なので，直接的な積分計算を回避して，設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで，本問の出来は決まります。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & 0 \\ ab & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & bd \\ ab & abd+c \end{pmatrix}$

条件より，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$bd=-\dfrac{1}{2}$，$ab=\dfrac{1}{2}$，$abd+c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$c=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$d=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) (1)から，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q & qs \\ pq & pqs+r \end{pmatrix}$

また，$A=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{6} & -\sin\dfrac{\pi}{6} \\ \sin\dfrac{\pi}{6} & \cos\dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}$より，$A^3=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{3\pi}{6} & -\sin\dfrac{3\pi}{6} \\ \sin\dfrac{3\pi}{6} & \cos\dfrac{3\pi}{6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とすると，$q=0$，$qs=-1$より不成立。

したがって，A^3は$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$の形には表せない。

(3) nを自然数として，$A^n=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{n\pi}{6} & -\sin\dfrac{n\pi}{6} \\ \sin\dfrac{n\pi}{6} & \cos\dfrac{n\pi}{6} \end{pmatrix}$

$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$とすると, (2)から,

$$\cos\frac{n\pi}{6}=q,\ -\sin\frac{n\pi}{6}=qs,\ \sin\frac{n\pi}{6}=pq,\ \cos\frac{n\pi}{6}=pqs+r$$

以上の連立方程式をまとめると,

$$q=pqs+r\cdots\cdots\cdots①,\ qs=-pq\cdots\cdots\cdots②,\ q^2+q^2s^2=1\cdots\cdots\cdots③$$

②から，$q(s+p)=0$となるが，$q=0$とすると③が不成立。

$q\neq 0$のとき，③からsが存在し，②からpが存在する。また，①からrが存在する。

よって，①②③をみたすp, q, r, sが存在する条件は$q\neq 0$である。

すなわち，$\cos\dfrac{n\pi}{6}\neq 0$で，$4\leqq n\leqq 15$のとき，$n\neq 9$，$15$

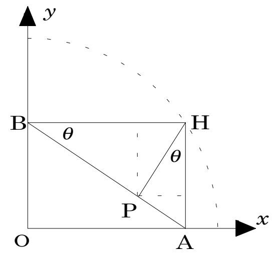
したがって，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$の形に表せない行列は，$A^9$と$A^{15}$である。

[解 説]

(2)と(3)の解は A が回転行列であることを利用しました。新課程では範囲外となった事項で，使用を避けたかったのですが，これを用いないと(3)がたいへんです。本問を数Cとして出題したとすると，疑問が残ります。

5

問題のページへ



(1)　四角形 OAHB は長方形より，$\mathrm{AB}=\mathrm{OH}=a$

また，$\angle\mathrm{ABH}=\angle\mathrm{AHP}=\theta$

よって，$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{HP}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}$ から，

$$a\cdot l=a\sin\theta\cdot a\cos\theta$$

$$l=a\sin\theta\cos\theta$$

(2)　$\mathrm{OA}=\mathrm{BH}=a\cos\theta$，$\mathrm{OB}=\mathrm{AH}=a\sin\theta$ から，

$$\mathrm{H}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

$$x=a\cos\theta-l\sin\theta=a\cos\theta-a\sin^2\theta\cos\theta=a\cos^3\theta$$

$$y=a\sin\theta-l\cos\theta=a\sin\theta-a\cos^2\theta\sin\theta=a\sin^3\theta$$

(3)　
$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2&=a^2\cos^6\theta+a^2\sin^6\theta=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)\\&=a^2(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)=a^2\left\{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\cos^2\theta\sin^2\theta\right\}\\&=a^2\left\{1-3\left(\frac{\sin2\theta}{2}\right)^2\right\}=a^2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta\right)\end{aligned}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より，$2\theta=\frac{\pi}{2}$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき OP^2 は最小値 $\frac{1}{4}a^2$ をとる。

よって，このとき OP は最小値 $\frac{1}{2}a$ をとる。

[解 説]

点 P の軌跡はアステロイドの一部分となります。これがわかれば, (3)の結論はすぐに導けます。なお, (3)は微分の利用も可能ですが，やや大袈裟です。